Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Sesto foglio di esercizi

NOTAZIONE: se $M(t)$ è una matrice di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili si ha:
$$\lim_{h\to 0}\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \big((m_i^j(t))'\big)_{i,j} =_{\text{def}} M'(t).$$

Esercizio 1 (Regola di Leibniz per la derivata del determinante di una matrice di funzioni)

a- Si calcoli la dervata rispetto a t di: $\det\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ t^2 & 2t & 2\\ t^3 & 3t^2 & 6t\end{pmatrix}$.

b- Sia $M(t) = (M^1(t)|\dots|M^n(t))$, una matrice $n\times n$ di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili in $t\in\mathbf{R}$, con colonne nell'ordine $M^1,\dots,M^n$. Indicando con $M_{\not i}^{\not j}$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da M toglindo la i^a riga e la j^a colonna, provare che
$$\begin{aligned}(\det M)' &=\\ &= \sum_{j=1}^n \det\big(\dots M^{j-1}|(M^j)'|M^{j+1}\dots\big)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (m_i^j)'(-1)^{i+j}\det M_{\not i}^{\not j}\\ &=_{\text{def}} \operatorname{tr}[M'\operatorname{adj}M] = \big\langle M'\cdot {}^t(\operatorname{adj}M)\big\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}} =_{\text{def}} \langle M'\cdot\operatorname{cof}M\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}}\end{aligned}$$

NOTA: il determinante di una matrice $n\times n$ può esser considerato come un "prodotto in blocco" delle n colonne (righe), essendo lineare per colonne (righe): se le colonne di M si indicano con $M^1,\dots M^n$, scrivendo in modo suggestivo $\det M = M^1\cdot\dots\cdot M^n$ si avrebbe quindi come per il prodotto di funzioni
$$\big(M^1\cdot\ldots\cdot M^n\big)' = \sum_{i=1}^n \dots M^{i-1}\cdot\big(M^i\big)'\cdot M^{i+1}\dots$$

c- Se $M(0) = I_{n\times n}$ provare che
$$\det M(t) = 1 + t\cdot\operatorname{tr}M'(0) + o(t).$$

Che dire, per $M(t)$ generica matrice di funzioni derivabili in t, dello sviluppo di Taylor di $\det M(t)$ di ordine 1 e centrato in $t=0$?

d- Se, data un'altra $A(t)$ matrice $n\times n$ di funzioni (continue), si ha $M'(t) = A(t)M(t)$, provare che
$$(\det M(t))' = \operatorname{tr}A(t)\cdot\det M(t), \qquad \text{per cui} \qquad \det M(t) = d\cdot e^{\int^t[\operatorname{tr}A(\tau)]\,d\tau}.$$

Esercizio 2 Siano $M(t)$, $n\times k$, ed $N(t)$, $k\times m$, due matrici di funzioni derivabili.

a- Provare che $(M(t)N(t))' = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

b- Se $k=n$ e le $M(t)$ sono invertibili allora $M^{-1}(t)$ è derivabile e $\big(M^{-1}(t)\big)' = -M^{-1}(t)M'(t)M^{-1}(t)$.

c- Trovare un esempio in cui $\big(M^{-1}(t)\big)' \neq -M^{-2}(t)M'(t),\ -M'(t)M^{-2}(t)$.

Esercizio 3 a - Sia $M(t)$ una matrice ortogonale di funzioni derivabili. Provare che ${}^tMM'$ è antisimmetrica.
b - Si considerino i moti $p(t)$, di egual rotazione uniforme attorno ad un asse *fisso*, per l'origine, individuato dal versore v, $||v||=1$, dati da $p(t) = M(t)u$, ove: le u sono le posizioni iniziali e $M(t)$ una matrice, di funzioni derivabili, per cui $M(0) = Id$. Provare che:
- ${}^tMM = Id$, $\det M = 1$,
- in generale la matrice associata all'applicazione lineare $L(x,y,z) = (a,b,c)\times(x,y,z)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

- detto Ω il vettore (costante) di velocità angolare, velocità $= p'(t) = M'u = \Omega \times Mu = \Omega \times p(t)$, si ha

$$M'(t)^t M(t) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

- ${}^tM$ ed M' commutano.

Esercizio 4 Data $B \in \mathcal{M}(n,n)$ si consideri l'endomorfismo $L : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,n)$ dato da

$$L(A) = BA.$$

a- Se $n = 2$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcolino gli autovalori di L, le dimensioni dei rispettivi autospazi, e si discuta la diagonalizzabilità di L.
b- In generale si provi che B ed L hanno gli stessi autovalori.
c- Si esprima il polinomio caratteristico di L in termini di quello di B,
[può convenire identificare $\mathcal{M}(n,n)$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, e quindi L con una matrice $n^2 \times n^2$].
- Trovare la relazione tra la molteplicità algebrica di un autovalore relativa a B con quella relativa ad L.
Si provi che se B è diagonalizzabile anche L lo è.
d- Si provi che un polinomio annulla B se e solo se annulla L. Se ne deduca che se L è digonalizzabile anche B lo è.
f- Si provi che ogni autovalore ha molteplicità geometrica rispetto ad L eguale ad n volte quella rispetto a B

[può esser utile considerare un elemento di $\mathrm{Ker}\,(\mu Id_{\mathcal{M}} - L)$ come funzione lineare da $\mathbf{R}^n \to \mathrm{Ker}\,(\mu Id_{\mathbf{R}^n} - B)$].

Esercizio 5 Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare *non identicamente nulla*, e $v_0 \in \mathbf{R}^n$ *non nullo*. Si definisce l'endomorfismo lineare $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ come segue

$$T(x) \ = \ x \ + \ f(x)v_0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

a- Per quali $v_0 \in \mathbf{R}^n$ l'endomorfismo T è diagonalizzabile?

b- Per quali è triangolabile? Si descriva come può essere trovata una base rispetto alla quale la matrice associata a T è triangolare superiore.

c- Si calcoli il polinomio minimo di T.