

Ingegneria dell'energia,
ALGEBRA LINEARE V.M.Tortorelli
Note teoriche sul determinante: un approccio diverso

Qualche idea geometrico intuitiva e le conseguenze algebriche

Coppie ordinate di elementi di \mathbf{R}^2 , matrici reali 2×2 , parallelogrammi ordinati: dati due elementi di \mathbf{R}^2 , $U = (a, b)$, $V = (c, d)$, considerando U come primo dato e V come secondo, in quanto segue è conveniente identificare la coppia ordinata (U, V) con una matrice 2×2 costruita con le quattro coordinate date. Per esempio mettendole ordinatamente come prima e seconda colonna:
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (U|V).$$

Si identifichi il piano geometrico con un sistema di riferimento cartesiano con \mathbf{R}^2 . Si tenga ben presente che la struttura di spazio vettoriale di \mathbf{R}^2 permette di interpretare $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sia come *posizione nel piano*, sia come vettore fisico (*spostamento da* $(0, 0)$ ad (a, b)).

Dato un parallelogramma \mathcal{P} con un vertice nell'origine $O \equiv (0, 0)$, i due lati, OP , OQ , orientati da O si identificano con le coordinate dei rispettivi secondi estremi $P \equiv U = (a, b)$, $Q \equiv V = (c, d) \in \mathbf{R}^2$. Si scelga il primo e il secondo tra i due lati da O . I suoi vertici si identificheranno (regola del parallelogramma) quindi con gli elementi di \mathbf{R}^2 : $(0, 0)$, U , V , $U + V$. In tale senso una matrice $(U|V)$, reale 2×2 individua il parallelogramma $\mathcal{P} = \mathcal{P}(U, V)$, con vertice nell'origine, e dà un ordine (e.g. quello delle colonne) ai lati da O .

Orientazione in \mathbf{R}^2 come concetto relativo Anche a livello intuitivo il concetto di orientazione è relativo: *due coppie ordinate* di vettori da uno stesso punto nel piano si dicono avere la stessa orientazione se i secondi "spazzano" l'angolo convesso verso i primi nello "stesso senso".

In \mathbf{R}^2 si dirà che una coppia ordinata di suoi elementi U, V (per ora linearmente indipendenti: cioè entrambi non nulli e non paralleli) ha *orientazione positiva* se ha la *stessa orientazione* della coppia degli elementi (ordinati) della base canonica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, *negativa altrimenti*. Scriveremo $O(U, V) = 1$ rispettivamente $O(U, V) = -1$.

Se i due elementi di \mathbf{R}^2 sono linearmente dipendenti si pone $O(U, V) = 0$.

$$\text{Chiaramente } O(U, V) = -O(V, U).$$

Rapporto di aree "orientate" o "con segno" di parallelogrammi nel piano Data una coppia ordinata (U, V) di elementi di \mathbf{R}^2 , si considera il parallelogramma associato $\mathcal{P} = \mathcal{P}(U, V)$. Si definisce la seguente funzione reale $d(U|V) = O(U, V) \text{Area}(\mathcal{P})$. Le proprietà che si deducono dalle definizioni e dalla geometria elementare sono

1) $d(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) = 1$

(unità di misura di area orientata: quindi, più propriamente, d è un rapporto di aree con segno)

2) $d(U|V) = -d(V|U)$ (funzione alternante, per cui $d(U|U) = 0$),

2') $d(U + \tau V|V) = d(U|V + \sigma U) = d(U|V)$

(parallelogrammi con stessa base ed altezza hanno eguale area)

2'') $d(U|\tau V) = d(\tau U|V) = \tau d(U|V)$

(variando una dimensione lineare l'area varia dello stesso fattore, e cambiando verso di un lato cambia l'orientazione),

dalle ultime tre si deduce la seguente che estende le ultime due

3) $d(U + sW|V) = d(U|V) + sd(W|V)$, $d(U|V + tW) = d(U|V) + td(U|W)$ (funzione bilineare)

La proprietà 3) brevemente si deduce, se U e V sono indipendenti, come segue:

ogni W si scrive come $\sigma U + \tau V$, quindi

$$d(U + sW|V) = d(U + s\sigma U + s\tau V|V) = (\text{per } 2') d(U + s\sigma U|V) = (\text{per } 2'') (1 + s\sigma)d(U|V) = d(U|V) + d(s\sigma U|V) = d(U|V) + d(s\sigma U + s\tau V|V) = d(U|V) + sd(W|V).$$

- Per esercizio si dimostri l'identità quando U e V sono linearmente dipendenti, e la linearità nel secondo argomento.

Nota: è bene sottolineare che l'essere alternante e bilineare di $d(U|V)$ rende comodo trattare tale funzione come un *prodotto* (tra elementi di \mathbf{R}^2 ma a valori reali), *anticommutativo*, e *distributivo rispetto alla somma* di elementi di \mathbf{R}^2 .

Calcolo in coordinate Usando le proprietà 3), 2), 1) dati $U = (a, b) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, $V = (c, d) = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$ si ottiene:

$$d(U|V) = d(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2|c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) = ac d(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1) + ad d(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) + bc d(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) + bd d(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_2) = \\ ad d(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) + bc d(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) = ad d(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) - bc d(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) = ad - bc.$$

Definizione di determinante di matrici 2×2 si dice determinante (rispetto alla base canonica) di una matrice 2×2 a coefficienti in un campo \mathbf{K} il numero $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Definizione di orientazione per una coppia ordinata (U, V) di elementi di \mathbf{K}^2 , $U = (a, b)$, $V = (c, d)$, l'orientazione relativa ai vettori della base canonica è il numero $\text{segno} \left[\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right]$.

Nota: evitando di usare la proprietà 1), e ripetendo il precedente calcolo usando solo le proprietà 3) e 2), si ottiene che una qualsiasi funzione Λ di matrici M , 2×2 , che sia 3) bilineare ed 2) alternante per colonne sarà del tipo $\Lambda(M) = \Lambda(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) \cdot \det(M)$, chiaramente il numero $\Lambda(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2)$ sarà arbitrario e distingue le varie funzioni con tali proprietà.

Domanda: come cambia tale determinante calcolandolo rispetto alle coordinate di un'altra base?

Nota: analoghe considerazioni intuitive si possono immaginare per k vettori in uno spazio vettoriale dato. Per esempio per due vettori in \mathbf{R}^3 . Ma il punto di partenza per sviluppare tali considerazioni saranno piuttosto le proprietà astratte da tali osservazioni qualitative. Ovvero le proprietà 2) e 3).

Nota: nel seguito \mathbf{K} sarà un campo per cui per ogni $\kappa \in \mathbf{K}$ si ha $\kappa + \kappa \neq 0_{\mathbf{K}}$.

Tappe della presentazione:

1) studio *a priori* delle principali conseguenze delle proprietà di tali funzioni multilineari alternanti per colonne senza porsi il problema che ve ne siano.

(Per $n = 2$, come visto nel primo paragrafo, tali funzioni esistono e sono quelle del tipo $\Lambda(M) = r \cdot \det(M)$ con $r \in \mathbf{K}$ arbitrario).

In particolare si dedurranno

1.1) la formula di Leibniz e quindi che se c'è una tale funzione non nulla, essa è *univocamente determinata* se si assegna il suo valore sulla matrice identica $Id_{n \times n} = (\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_n)$.

Si definirebbe quindi il *determinante* di una matrice quadrata M , $\det(M)$, come il valore $\Lambda(M)$ dell'eventuale unica funzione n -lineare alternante per colonne per cui $\Lambda(Id) = 1$;

1.2) la formula di *Cauchy-Binet*: se esiste una funzione Λ lineare alternante per colonne allora $\Lambda(Id)\Lambda(MN) = \Lambda(M)\Lambda(N)$. Da ciò segue che *due matrici simili debbano avere eguale determinante*.

Si potrà perciò definire il *determinante di un endomorfismo lineare* da \mathbf{R}^n in sé;

1.3) il *teorema della trasposta* $\Lambda(M) = \Lambda({}^T M)$.

Per cui le funzioni lineari alternanti per colonne coincidono con quelle lineari alternanti per righe.

2) Costruzioni e metodi di calcolo del determinante, in particolare:

2.1) grazie al fatto che $f(x_1, \dots, x_n) = \text{segno} \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ è una funzione alternante dei numeri (x_1, \dots, x_n) , si ottiene che la formula di Leibniz definisce in effetti una funzione lineare alternante per colonne e dà un metodo per calcolarla;

2.2) formula di Laplace degli sviluppi per righe di Laplace: si mostra che le funzioni così definite sono lineari alternanti per colonne e valgono 1 sull'identità. Pertanto vi sono funzioni lineari alternanti per colonne e gli sviluppi di Laplace ne individuano una in particolare. (In altre trattazioni questa formula viene data come definizione di determinante, deducendo *a posteriori* 1.2) ed 1.3));

2.3) uso del metodo di riduzione a scala per matrice quadrate per il calcolo del determinante di una matrice quadrata generica, avendo che per una matrice quadrata triangolare il determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

NOTAZIONI MATRICIALI

NOTA: per n -ple che possono esser viste come matrici $1 \times n$ (righe) che come $n \times 1$ (colonne), *non sempre ci si atterrà* alle notazioni qui di seguito introdotte.

Matrici: • data una matrice $V \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{K})$ indichiamo con V^j , $j \leq n$, la sua j^a colonna, con V_i , $i \leq m$, la sua i^a riga, quindi con V_i^j la sua componente di riga i^a e di colonna j^a .

- In particolare $V = (V^1 | \dots | V^n)$, $V^j = {}^T(V_1^j \dots V_m^j)$, $V_i = (V_i^1 \dots V_i^n)$.

- Si indica la matrice identica ($m = n$) con $I_n = (\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_n)$, o, se non vi è ambiguità, con I .

- Si indicano con $V_{i\checkmark}$, $V^{\checkmark j}$, $V_{i\checkmark}^{\checkmark j}$ rispettivamente le matrici $(m-1) \times n$, $m \times (n-1)$, $(m-1) \times (n-1)$ ottenute da V cancellando la i^a riga, la j^a colonna, ed entrambe.

• Se σ è una funzione da $\{1, \dots, n\}$ in sé, ed $V \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{K})$, si indica con V^σ o con $V^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ la matrice $(V^{\sigma_1} | \dots | V^{\sigma_n})$ che ha come colonna j^a la colonna σ_j^a di V . Se σ non è iniettiva per certo si ripetono in V^σ colonne eguali. Similmente per le righe. In particolare $I^\sigma = (\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n})$.

• Se $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$, $h < m$, ovvero $\mathbf{i} : \{1, \dots, h\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ crescente str., e $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, $k < n$, ovvero $\mathbf{j} : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ crescente str., con $V^{\mathbf{j}}$ o $V^{j_1 \dots j_k}$, $V_{\mathbf{i}}$ o $V_{i_1 \dots i_h}$, $V_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$ o $V_{i_1 \dots i_h}^{j_1 \dots j_k}$, si indicano rispettivamente le sottomatrici di V con solo le righe, le colonne, le righe e le colonne specificate dagli indici. Analogamente $V^{\checkmark \mathbf{j}}$ o $V^{\checkmark j_1 \dots j_k}$, $V_{\checkmark \mathbf{i}}$ o $V_{\checkmark i_1 \dots i_h}$, $V_{\checkmark \mathbf{i}}^{\checkmark \mathbf{j}}$ o $V_{\checkmark i_1 \dots i_h}^{\checkmark j_1 \dots j_k}$ si indicano le sottomatrici di V privata delle righe e/o colonne specificate.

• Se $V \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{K})$, $U \in \mathcal{M}(m, 1, \mathbf{K})$, $W \in \mathcal{M}(1, n, \mathbf{K})$ con $V[U/V^j]$, $V[W/V_i]$ rispettivamente si intendono le matrici ottenute sostituendo U alla j^a colonna di V , e W alla i^a riga di V .

Funzioni k -lineari ed alternanti.

Definizione Se $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k, \mathcal{V}$ sono spazi vettoriali su uno stesso campo una funzione

$$\Lambda : \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_k \rightarrow \mathcal{V}$$

di dice:

$$k\text{-lineare se } \Lambda(\dots U + tW, \dots) = \Lambda(\dots U, \dots) + t\Lambda(\dots W \dots)$$

$$\text{alternante se } \Lambda(\dots U, \dots V \dots) = -\Lambda(\dots V, \dots U \dots)$$

Nota: quando $\mathcal{U}_1 = \dots = \mathcal{U}_k = \mathcal{V} = \mathbf{K}$ e quindi $\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_k = \mathbf{K}^k$, le funzioni k -lineari, che se non nulle non potranno esser alternanti, sono quelle calcolate dai monomi $\alpha x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$, cioè i *monomi liberi da quadrati di grado k* in k variabili a coefficienti in \mathbf{K} .

Nota: spesso è utile pensare una funzione k -lineare (anche non alternante) come “*un prodotto in blocco dei k fattori*” essendo distributivo rispetto alla somma di colonne. Un prodotto che inoltre “*commuta*” con il *prodotto per numeri* di ogni fattore.

Nota: in generale una funzione multilineare (non necessariamente alternante) definita sul prodotto cartesiano di n copie dello stesso spazio vettoriale \mathbf{K}^N $\Lambda : \mathbf{K}^N \times \dots n \text{ volte } \dots \times \mathbf{K}^N \rightarrow \mathbf{K}$ come funzione delle coordinate dei vettori $(V^1, \dots, V^n) = (V_1^1, \dots, V_N^1, V_1^2, \dots, V_N^2, \dots, V_N^n)$ di \mathbf{K}^{nN} , sarà calcolata dai polinomi omogeni di grado n , dati da somme di monomi di grado n in cui compare *esattamente una* coordinata tra le N di ognuno degli n fattori:

$$\begin{aligned} \Lambda(V^1, \dots, V^n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq N} \Lambda^{i_1}(V^2, \dots, V^n) V_{i_1}^1 = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \Lambda^{i_1, i_2}(V_3, \dots, V_n) V_{i_1}^1 V_{i_2}^2 = \dots = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq N} \dots \sum_{1 \leq i_n \leq N} \Lambda^{i_1, i_2, \dots, i_n} V_{i_1}^1 V_{i_2}^2 \dots V_{i_n}^n \end{aligned}$$

ove $\Lambda^{j_1, \dots, j_n} \in \mathbf{K}$ sono N^n numeri, e le $\Lambda^{j_1, \dots, j_k}$, $k < n$, sono funzioni multilineari sul prodotto cartesiano di $n - k$ copie di \mathbf{K}^N . Quindi tali funzioni multilineari sono individuate da N^n numeri.

Ovvero, *identificando* le colonne delle matrici $N \times n$, a coefficienti in \mathbf{K} , con le coordinate degli elementi di \mathbf{K}^N nella base canonica, si identifica Λ con una funzione di matrici:

$$\Lambda : \mathcal{M}(N, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$$

che si dirà quindi funzione n -lineare per colonne, eventualmente alternante.

Nota: per il seguito si analizzerà il caso di più diretto interesse per definire, e calcolare, i determinanti di matrici quadrate, ovvero quello di funzioni n -lineari alternanti su il prodotto cartesiano di n copie di \mathbf{K}^n e a valori in \mathbf{K} , il campo dei numeri reali \mathbf{R} , o il campo dei numeri complessi \mathbf{C} :

$$\Lambda : \mathbf{K}^n \times \dots n \text{ volte } \dots \times \mathbf{K}^n \sim \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K}) \sim \mathbf{K}^{n^2} \rightarrow \mathbf{K}$$

1: le principali proprietà derivate dall'alternanza e dalla multilinearità

Notazioni e definizioni. *Permutazioni:* Le funzioni bigettiva da $\{1, \dots, n\}$ in sé si dicono *permutazioni su n* . Si userà anche la notazione σ_i per indicare $\sigma(i)$.

L'insieme da esse costituito si indica con \mathcal{S}_n . Se $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ allora $\tau \circ \sigma \in \mathcal{S}_n$, e $\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n$ (gruppo).

- Una permutazione τ su n si dice *scambio* o *trasposizione* se è diversa dall'identità solo su due numeri $i \neq j$: per cui deve essere $\tau_i = j$ e $\tau_j = i$, per cui $\tau = \tau^{-1}$. Quindi per specificare una trasposizione τ basta dichiarare la coppia di scambio (i, j) , $i \neq j$.

- Data una permutazione σ su n si dice *orbita* generata da σ a partire da $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ l'insieme, *invariante* per σ , dei valori che si ottengo iterando l'applicazione di σ a partire da i_0 , sino ad ottenere, essendo σ iniettiva con un numero finito di valori, di nuovo i_0 :

$\hat{\sigma}_{i_0} = \{\sigma(i_0), \sigma(\sigma(i_0)), \dots, \sigma^{(k-1)}(i_0), i_0\}$, $\sigma^{(k)}(i_0) = \sigma(\sigma^{(k-1)}(i_0)) = i_0$. Per ogni $i \in \hat{\sigma}_{i_0}$ si ha $\hat{\sigma}_{i_0} = \hat{\sigma}_i$. Ogni permutazione su n permette di ripartire $\{1, \dots, n\}$ in orbite disgiunte.

1.1) Formula di Leibniz: se $\Lambda : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ è multilineare alternante per colonne, allora

1- se le colonne di V sono linearmente dipendenti allora $\Lambda(V) = 0$.

$$\begin{aligned} 2- \Lambda(V) &= \sum_{1 \leq \sigma_1 \leq n} \sum_{1 \leq \sigma_2 \leq n} \cdots \sum_{1 \leq \sigma_n \leq n} V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n \Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n}) = \\ &= \sum_{1 \leq \sigma_1 \leq n} \sum_{\sigma_2 \neq \sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_n \neq \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}} V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n \Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n V_{\sigma_i}^i \Lambda(I^\sigma). \end{aligned}$$

Dimostrazione: 1) per prima cosa si osserva che se V ha due colonne eguali allora, scambiandole di posto, da una parte si ottiene la stessa matrice, dall'altra, per alternanza, il valore di Λ sulle due matrici deve esser di segno opposto: $\Lambda(V) = -\Lambda(V)$: quindi $\Lambda(V) = 0$.

- Se le colonne sono linearmente dipendenti, scambiando la prima colonna con quella dipendente dalle rimanenti, si ha per alternanza che cambierebbe solo il segno del valore della funzione sulla matrice così ottenuta. Si può quindi assumere che la prima colonna sia dipendente dalle rimanenti: vi sono dei numeri non nulli c_1, \dots, c_{n-1} per cui $V^1 = c_1 V^2 + \dots + c_{n-1} V^n$. Quindi per multilinearità:

$$\begin{aligned} \Lambda(V^1 | V^2 | \dots | V^n) &= \Lambda(c_1 V^2 + \dots + c_{n-1} V^n | V^2 | \dots | V^n) = \\ &= c_1 \Lambda(V^2 | V^2 | \dots | V^n) + \dots + c_{n-1} \Lambda(V^k | V^2 | \dots | V^k | \dots | V^n) + \dots = 0 + \dots + 0 + \dots = 0. \end{aligned}$$

2) Poichè $V^j = V_1^j \mathbf{e}_1 + \dots + V_n^j \mathbf{e}_n = \sum_{1 \leq \sigma_j \leq n} V_{\sigma_j}^j \mathbf{e}_{\sigma_j}$ (indicando con σ_j l'indice dell' j^a sommatoria):

$$\begin{aligned} \Lambda(V) &= \Lambda(V^1 | V^2 | \dots | V^n) = (V_1^1 \mathbf{e}_1 + \dots + V_n^1 \mathbf{e}_n | V^2 | \dots | V^n) = \sum_{1 \leq \sigma_1 \leq n} V_{\sigma_1}^1 \Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | V^2 | \dots | V^n) = \dots \\ &= \sum_{1 \leq \sigma_1 \leq n} \cdots \sum_{1 \leq \sigma_n \leq n} V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n \Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n}) = \sum_{\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}} V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n \Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n}) \end{aligned}$$

nell'ultima uguaglianza si è passati da n sommatorie su numeri tra 1 a n ad una sola sommatoria su funzioni $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Quindi quando due indici di sommatorie diverse sono uguali, ovvero quando si sceglie una funzione non iniettiva, si ottiene $\Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n}) = 0$. Per cui ci si restringe alla somma sulle sole permutazioni, essendo gli altri addendi nulli

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n \cdot \Lambda(I^\sigma).$$

Lemma: ogni permutazione diversa dall'identità è composizione di trasposizioni.

Dimostrazione: data $\sigma \in \mathcal{S}_n$, si decomponga $\{1, \dots, n\}$ in orbite disgiunte $\hat{\sigma}(i_1), \dots, \hat{\sigma}(i_m)$.

- Ogni orbita è invariante per σ , e σ ristretta ad un'orbita $\{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{(k-1)}(i)\}$, $\sigma^k(i) = i$ è composizione di $k-1$ trasposizioni. Per esempio scambiando "all'indietro": $\sigma = \tau_{[1] \circ \dots \circ \tau_{[k-1]}$, con $\tau_{[j]}$, $1 \leq j \leq k-1$: $\tau_{[k-1]}(i) = \tau_{[k-1]}(\sigma^{(k)}(i)) = \sigma^{(k-1)}(i)$, $\tau_{[j]}(\sigma^{(j+1)}(i)) = \sigma^{(j)}(i)$, $\tau_{[1]}(\sigma^{(2)}(i)) = \sigma(i)$.

- Infine essendo le orbite disgiunte ed essendo σ ristretta ad ogni orbita composizione di trasposizioni, si ha che l'intera σ è composizione di trasposizioni.

Nota: vi possono essere *diversi modi* di ottenere σ dalla composizione di diverse trasposizioni. Vale:

Teorema la parità del numero di trasposizioni la cui composizione sia una fissata permutazione non dipende dalle trasposizioni usate

Ciò è equivalente ad asserire che vi sono funzioni alternanti per colonne non nulle (seg. corollario).

Corollario unicità: se vi sono $\Lambda, \Omega : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ multilineari alternanti per colonne,

$$\text{e } \Lambda(I) = \Omega(I) \text{ allora}$$

1) $\Lambda(I^\sigma) = \Omega(I^\sigma)$ per ogni funzioni σ da $\{1, \dots, n\}$ in sè; 2) quindi $\Lambda(V) = \Omega(V)$ per ogni V .

Dimostrazione: 1) assumendo che Λ ed Ω siano funzioni i valori $\Lambda(I^\sigma), \Omega(I^\sigma)$ sono ben definiti. Ora poichè σ è composizione di scambi, $\sigma = \tau_{[m] \circ \dots \circ \tau_{[1]}$, ed essendo Λ ed Ω alternanti partendo

dall'identità $\Lambda(\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_n) = \Omega(\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_n)$ ad ogni scambio si cambia solo il segno e l'identità si mantiene.

2) Segue dalla formula di Leibniz e dal punto precedente.

Corollario: se vi è Λ multilineare alternante non nulla allora i numeri di trasposizioni la cui composizione calcola una data permutazione, hanno la stessa parità.

Definizione di determinante di matrice se vi sono funzioni n -lineari alternanti per colonne non nulle, si definisce *determinante* di una matrice $M \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K})$

il valore su M dell'unica funzione multilineare alternante che valga 1 sulla matrice identica:

$$\det_n(M) = \det(M) = \Lambda(M), \quad \Lambda(I) = 1.$$

Nota: quindi se vi sono funzioni multilineari alternanti non nulle, esse sono tutte e sole

$$\Lambda(M) = k \cdot \det(M), \text{ al variare di } k \in \mathbf{K} \setminus \{0\}.$$

Definizione: si definirebbe la *segno di una permutazione* σ il numero $\varepsilon(\sigma) = \det I^\sigma = (-1)^{\nu_\sigma}$, ove ν_σ è 0 se per ottenere σ occorrono un numero *pari* di trasposizioni, 1 se ne occorrono un numero *dispari*.

Nota: $\varepsilon(\sigma\circ\eta) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\eta)$.

1.2) Formula di Cauchy-Binet per matrici quadrate: se vi è Λ multilineare alternante allora il valore di Λ sul prodotto righe per colonne di due matrici quadrate per la costante $\Lambda(I)$, è il prodotto dei valori di Λ sui due fattori:

$$\Lambda(I)\Lambda(BA) = \Lambda(B)\Lambda(A),$$

Dimostrazione: se Λ è multilineare alternante si considerino le due funzioni di matrice $\Lambda_1(A) = \Lambda(B)\Lambda(A)$ e $\Lambda_2(A) = \Lambda(I)\Lambda(BA)$. - Chiaramente Λ_1 è multilineare alternante per colonne.

- Lo è anche Λ_2 . È multilineare: infatti, per definizione di prodotto righe per colonne di A a sinistra per B si ha $(BA)^j = B A^j$, pertanto essendo Λ multilineare per colonne (per brevità e comodità di notazione si tralascia di ripetere il seguente calcolo per la prima e l'ultima colonna)

$$\begin{aligned} \Lambda(B(A^1 | \dots | A^i + tV | \dots | A^n)) &= \Lambda(BA^1 | \dots | BA^i + tBV | \dots | BA^n) \\ &= \Lambda(\dots BA^1 | BA^i | \dots | BA^n) + t\Lambda(\dots BA^1 | BV | \dots | BA^n) = \Lambda(BA) + \Lambda(B(A^1 | \dots | V | \dots | A^n)) \end{aligned}$$

Analogamente si prova che Λ_2 è alternante per colonne.

- Infine si osservi che $\Lambda_1(I) = \Lambda(B)\Lambda(I) = \Lambda_2(I)$. Per il corollario di unicità si conclude.

Corollario: nel caso vi siano multilineari alternanti non nulle:

$$1) \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M};$$

2) matrici simili hanno lo stesso determinante.

Definizione di determinante di un endomorfismo: sia L un endomorfismo lineare su \mathcal{U} , di dimensione finita su \mathbf{K} . Se è ben definito il determinante di matrice allora è ben definito $\det L = \det M$ qualsiasi sia la matrice M associata ad L in qualche base di \mathcal{V} .

1.3) Teorema della trasposta

Lemma per ogni permutazione σ si ha ${}^T I^\sigma = (I^\sigma)^{-1} = I^{(\sigma^{-1})}$.

Dimostrazione: - prima eguaglianza: poichè il prodotto riga per colonna ${}^T \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, si ha che ${}^T I^\sigma I^\sigma = I$.

- Per la seconda eguaglianza: per prima cosa si osserva che $(I^\sigma)_i^j = (\mathbf{e}_{\sigma(j)})_i$ e $(I^{\sigma^{-1}})_i^j = (\mathbf{e}_{\sigma^{-1}(j)})_i$. Quindi $\left(I^{(\sigma^{-1})} I^\sigma \right)_i^j = \sum_{1 \leq k \leq n} (\mathbf{e}_{\sigma^{-1}(k)})_i (\mathbf{e}_{\sigma(j)})_k$, ma in tale somma l'unico addendo non nullo, e nel caso uguale ad 1, si ha solo se $\sigma^{-1}(k) = i$ e $k = \sigma(j)$, cioè $k = \sigma(i) = \sigma(j)$, ed essendo σ iniettiva la sommatoria è non nulla solo se $i = j$, e nel caso vale 1. Perciò $I^{(\sigma^{-1})} I^\sigma = I$.

Teorema della trasposta se Λ è multilineare alternante si ha $\Lambda({}^T V) = \Lambda(V)$ per ogni $V \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K})$.

Dimostrazione: se Λ fosse nulla l'uguaglianza sarebbe immediata. Quindi si assume che Λ sia non nulla: $\Lambda(V) = k \det(V)$, $k \neq 0$.

- Poichè le permutazioni su n sono bigettive e il prodotto di elementi di \mathbf{K} è commutativo si ha

$$V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n = V_1^{\sigma_1^{-1}} \cdots V_n^{\sigma_n^{-1}}.$$

- Poichè $|\det(I^\sigma)| = 1$, $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$

$$\det(I^\sigma) = \det\left(I^{(\sigma^{-1})}\right).$$

- Quindi usando: la formula di Leibniz, e il lemma si ha:

$$\Lambda(V) = k \det(V) = k \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{j=1}^n V_{\sigma_j}^j \det(I^\sigma) = k \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n V_i^{(\sigma_i^{-1})} \det(I_\sigma) = k \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n V_i^{(\sigma_i^{-1})} \det(I^{(\sigma^{-1})}) =$$

poichè $\sigma^{-1} = \rho$ è un arbitraria permutazione

$$= k \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n V_i^{\rho_i} \det(I^\rho) = k \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n ({}^T V)_{\rho_i}^i \det(I^\rho) = k \det({}^T V) = \Lambda({}^T V).$$

Corollario Le funzioni multilineari alternanti per colonne sono lineari alternanti per righe.

2: esistenza e calcolo

2.1) esistenza usando la formula di Leibniz: da $\Lambda(V) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n \Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n})$

si ottiene immediatamente la dimostrazione della seguente proposizione

Teorema: se $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, è non nulla ed *anticommutativa*

$$f(\dots, u, \dots, w, \dots) = -f(\dots, w, \dots, u, \dots)$$

allora ponendo per definizione

$$\Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1} | \dots | \mathbf{e}_{\sigma_n}) = \text{segno} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

la funzione $\Lambda : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ definita dalla formula di Leibniz è in effetti multilineare ed alternante non nulla. Se $f(1, \dots, n) > 0$ si ha $\Lambda(I^\sigma) = \det I^\sigma = \varepsilon_\sigma$.

Dimostrazione: - se σ è iniettiva nei monomi nelle coordinate $\mu_\sigma(V) = \mu(V) = V_{\sigma_1}^1 \cdots V_{\sigma_n}^n$ compare esattamente una di esse per ogni colonna.

- - Quindi se ad una colonna V^j si somma sW , si ottiene che solo il fattore $V_{\sigma_j}^j$ cambia, diventando $V_{\sigma_j}^j + sW_{\sigma_j}$. Quindi per distributività e commutatività del prodotto in \mathbf{K} :

$$\mu(\dots | V^j + sW | \dots) = \prod_{h \neq j} V_{\sigma_h}^h \cdot (V_{\sigma_j}^j + sW_{\sigma_j}) = \prod_{h \neq j} V_{\sigma_h}^h \cdot V_{\sigma_j}^j + s \prod_{h \neq j} V_{\sigma_h}^h \cdot W_{\sigma_j} = \mu(V) + s\mu(\dots | W | \dots)$$

Cioè se σ è una permutazione i monomi $\mu_\sigma(V)$ calcolano una funzione multilineare per colonne. Pertanto essendo le funzioni multilineari per colonne uno spazio vettoriale lo è anche Λ .

- D'altronde se nella matrice $V = (\dots | V^i | \dots | V^j | \dots)$ si scambia la colonna V^i con la colonna V^j , $i < j$ ottenendo la matrice $\tilde{V} = (\dots | V^j | \dots | V^i | \dots)$, si ha:

$$\Lambda(\dots | V^j | \dots | V^i | \dots) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \dots V_{\sigma_i}^j \dots V_{\sigma_j}^i \dots \text{segno} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \text{ Quindi poichè}$$

- - $\mu_\sigma(V) = \mu_\sigma(\tilde{V})$, poichè il prodotto in \mathbf{K} è commutativo e i due monomi hanno gli stessi fattori ma in ordine diverso

- - $f(\dots \sigma_i \dots \sigma_j \dots) = -f(\dots \sigma_j \dots \sigma_i \dots)$, per ipotesi

si ottiene

$$\begin{aligned} \Lambda(\dots | V^j | \dots | V^i | \dots) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \dots V_{\sigma_i}^j \dots V_{\sigma_j}^i \dots \text{segno} f(\dots \sigma_i \dots \sigma_j \dots) = \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \dots V_{\sigma_i}^j \dots V_{\sigma_j}^i \dots \text{segno} f(\dots \sigma_j \dots \sigma_i \dots) = \\ &= - \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \dots V_{\rho_j}^j \dots V_{\rho_i}^i \dots \text{segno} f(\rho_1, \dots, \rho_n) = -\Lambda(V) \end{aligned}$$

avendo chiamato ρ la permutazione ottenuta da una data permutazione σ componendo con la trasposizione (i, j) : $\rho_k = \sigma_k$ per $k \neq i, j$, $\rho_i = \sigma_j$, $\rho_j = \sigma_i$.

Lemma: per $n \geq 2$ la funzione

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_3) \cdots (x_n - x_{n-1}) = \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^n (x_j - x_i) = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

è anticommutativa non nulla.

Dimostrazione: - poichè per scambiare il valore x_i della variabile i^a posizione con quello x_j in j^a posizione, $i < j$, si può scambiare prima x_1 , quello in 1^a , con quello in i^a , quindi x_j quello in j^a con quello x_i ora in 1^a , e infine quello x_1 ora in i^a con quello x_j ora in 1^a , basta provare l'asserto per $i = 1$.

- Si quindi scrivano i fattori di $f(x_1, \dots, x_n)$ in tabella come segue:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \bullet & & & \\
 x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{j-1} - x_1 & x_j - x_1 & x_{j+1} - x_1 & \dots & x_n - x_1 & \bullet \\
 & x_3 - x_2 & \dots & & x_j - x_2 & & \dots & x_n - x_2 & \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\
 & & & & x_j - x_{j-1} & & \dots & x_n - x_{j-1} & \\
 & & & & & x_{j+1} - x_j & \dots & x_n - x_j & \bullet \\
 & & & & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & & & & x_n - x_{n-1} &
 \end{array}$$

scambiando x_1 con x_j cambiano solo i fattori delle righe 1^a ed j^a , e quelli della colonna $(j-1)^a$ (contrassegnate con \bullet), non comparando negli altri né x_1 né x_j . Quindi si conclude osservando:

- nella 1^a riga i fattori sino a $x_{j-1} - x_1$ diventano eguali agli opposti a quelli a partire da $x_j - x_2$ nella colonna $(j-1)^a$, e viceversa;
- quindi per queste due liste fattori non vi è variazione di segno;
- nella 1^a riga i fattori a partire da $x_{j+1} - x_1$ diventano eguali a quelli nella j^a riga;
- quindi tali fattori non danno cambiamento di segno;
- il fattore $x_j - x_i$ diventa $x_1 - x_j$ quindi dà un cambio segno.

2.2) esistenza e calcolo con gli sviluppi di Laplace per righe

Definizione - si definiscono gli sviluppi di Laplace rispetto alle prime righe:

$$L_{1,n} : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$$

$$L_{1,1}((x)) = x, \quad L_{1,n+1}(V) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} V_1^j L_{1,n}(V_Y^j).$$

- Si definiscono gli sviluppi di Laplace rispetto alle prime colonne:

$$L_n^1 : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$$

$$L_1^1((x)) = x, \quad L_{n+1}^1(V) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} V_i^1 L_n^1(V_i^Y).$$

Nota: se Λ è multilineare e $\Lambda(\dots U \dots U \dots) = 0$ allora è alterante:

$$\begin{aligned}
 0 &= \Lambda(\dots U + W \dots U + W \dots) = \\
 &= \Lambda(\dots U \dots U \dots) + \Lambda(\dots W \dots W \dots) + \Lambda(\dots U \dots W \dots) + \Lambda(\dots W \dots U \dots) = \\
 &= \Lambda(\dots U \dots W \dots) + \Lambda(\dots W \dots U \dots).
 \end{aligned}$$

Proposizione Gli sviluppi rispetto alle prime righe sono funzioni multilineari alternanti per colonne.

Dimostrazione: per induzione su $n \geq 1$. Pr $n = 1$ è immediato. Per il passo induttivo:

- *multilinearità* per colonne: sia $V = (\dots | \lambda U + W |_{j^a \text{ col.}} \dots)$ con colonna j_0^a eguale ad $\lambda U + W$:

$$L_{1,n+1}(V) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} V_1^j L_{1,n}(V_Y^j) = \sum_{j \neq j_0} (-1)^{1+j} V_1^j L_{1,n}(V_Y^j) + (-1)^{1+j_0} (\lambda U_1 + W_1) L_{1,n}(V_Y^{j_0}) =$$

per ipotesi induttiva

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \sum_{j \neq j_0} (-1)^{1+j} V_1^j L_{1,n} \left((V[U/V^{j_0}])_Y^j \right) + \sum_{j \neq j_0} (-1)^{1+j} V_1^j L_{1,n} \left((V[W/V^{j_0}])_Y^j \right) + \\
 &\quad + \lambda (-1)^{1+j_0} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_0}) + (-1)^{1+j_0} W_1 L_{1,n}(V_Y^{j_0}) =
 \end{aligned}$$

$$= \lambda L_{1,n+1}(V[U/V^{j_0}]) + L_{1,n+1}(V[W/V^{j_0}]).$$

- *alternanza* per colonne: basta, cfr. precedente nota, provare induttivamente che per ogni $V \in \mathcal{M}(n+1, n+1, \mathbf{K})$ se due colonne di V sono eguali ($V^{j_1} = V^{j_2} = U$, $j_1 < j_2$) si ha $L_{1,n+1}(V) = 0$.

-- Se $j \neq j_1, j_2$ per ipotesi induttiva si ha $L_{1,n}(V_Y^j) = 0$. Quindi:

$$-- L_{1,n+1}(V) = (-1)^{1+j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) + (-1)^{1+j_2} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_2}).$$

-- Ora, essendo $j_1 < j_2$, si ha

$$V_Y^{j_1} = (\dots | V^{j_1-1} | V^{j_1+1} |_{j_1^a \text{ col.}} \dots | U |_{j_2-1 \text{ col.}} \dots), \quad V_Y^{j_2} = (\dots | U |_{j_1^a \text{ col.}} \dots | V^{j_2-1} | V^{j_2+1} |_{j_2^a \text{ col.}} \dots).$$

Perciò $V_Y^{j_2}$ si ottiene da $V_Y^{j_1}$ facendo $j_2 - 1 - j_1$ scambi di colonne. Quindi per ipotesi induttiva di alternanza

$$\begin{aligned} -- L_{1,n+1}(V) &= (-1)^{1+j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) + (-1)^{1+j_2} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_2}) = \\ &= (-1)^{1+j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) + (-1)^{1+j_2} (-1)^{j_2-1-j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) = \\ &= (-1)^{1+j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) + (-1)^{2j_2-j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) = \\ &= -(-1)^{j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) + (-1)^{j_1} U_1 L_{1,n}(V_Y^{j_1}) = 0. \end{aligned}$$

Proposizione: $L_{1,n}(I) = 1$

Dimostrazione: per induzione. Per $n = 1$ immediato. Passo induttivo

$$L_{1,n+1}(I_{n+1}) = L_{1,n+1}(\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} \mathbf{e}_j^1 L_{1,n}((I_{n+1})_Y^j) = L_{1,n}((I_{n+1})_Y^1) = L_{1,n}(I_n) = 1$$

Corollario: è ben definito $\det(V) = L_n^1(V) = L_{n,1}(V)$.

Definizione: si definiscono gli *sviluppi di Laplace rispetto alla i^a riga* $1 \leq i \leq n$:

$$L_{n,i}(V) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} V_j^i \det(V_Y^{j'}).$$

- Si definiscono gli *sviluppi di Laplace rispetto alla j^a colonna*:

$$\begin{aligned} L_n^j &: \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K} \\ L_n^j(V) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} V_1^i \det(V_Y^{i'}). \end{aligned}$$

Proposizione: $L_n^j(V) = \det V = L_{n,i}(V)$, per ogni i, j .

Dimostrazione: - lo sviluppo rispetto alla i^a riga è il prodotto di $(-1)^{i-1}$ con lo sviluppo rispetto alla prima riga della matrice ottenuta con $i - 1$ scambi: $L_{i,n}(V) = (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} V_i \\ V_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \det(V)$, l'ultima

eguaglianza segue dall'alternanza per righe delle funzioni multilineari alternanti per colonne ($\Lambda(V) = \Lambda(TV)$).

Sempre per alternanza per righe delle funzioni Λ multilineari alternanti ($\Lambda(V) = \Lambda(TV)$), si deduce la seconda eguaglianza.

2.3) determinante e metodo di riduzione di Gauss

Proposizione Se $N \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K})$ è ottenuta da M con delle mosse di Gauss allora $\det M = (-1)^s \det N$, ove s è il numero di scambi di riga.

Dimostrazione: - le mosse di Gauss son scambi di righe e sostituzione di una riga con la somma con un multiplo di un'altra;
- le funzioni lineari alternanti per colonne coincidono con quelle per righe;
quindi se la mossa non è una trasposizione il determinante non cambia, altrimenti cambia segno.

Proposizione Il determinante di una matrice triangolare superiore è il prodotto degli elementi della diagonale.

Dimostrazione: se V è triangolare superiore allora le sue colonne V_j , $1 \leq j \leq n$ saranno

$$V^1 = V_1^1 \mathbf{e}_1, \quad V^2 = V_1^2 \mathbf{e}_1 + V_2^2 \mathbf{e}_2, \quad V^3 = V_1^3 \mathbf{e}_1 + V_2^3 \mathbf{e}_2 + V_3^3 \mathbf{e}_3, \quad \dots \quad V^n = V_1^n \mathbf{e}_1 + \dots + V_n^n \mathbf{e}_n,$$

quindi essendo il determinante multilineare per colonne (cioè vedendolo come prodotto di n fattori distributivo rispetto alla somma), ad annullandosi se vi sono due colonne eguali:

$$\begin{aligned} \det V &= \det(V_1^1 \mathbf{e}_1, V_2^2 \mathbf{e}_2, V_2^3 \mathbf{e}_2 + V_3^3 \mathbf{e}_3, \dots, V_2^n \mathbf{e}_2 + \dots + V_n^n \mathbf{e}_n) = \text{induttivamente} \\ &= \det(V_1^1 \mathbf{e}_1, V_2^2 \mathbf{e}_2, V_3^3 \mathbf{e}_3, \dots, V_3^n \mathbf{e}_3 + \dots + V_n^n \mathbf{e}_n) = \dots = \det(V_1^1 \mathbf{e}_1, V_2^2 \mathbf{e}_2, V_3^3 \mathbf{e}_3, \dots, V_n^n \mathbf{e}_n) = \\ &= V_1^1 \cdot V_2^2 \cdot \dots \cdot V_n^n \det(I). \end{aligned}$$

3: alcune conseguenze ed estensioni

Definizione - per $M \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{K})$ si definisca la matrice dei *cofattori* di M , denotata con $\text{cof } M$, quella con componenti di riga i^a e colonna j^a eguali rispettivamente a $(-1)^{i+j} \det(M_{ij}^j)$.

- Si definisce *matrice aggiunta* di M , denotata da $\text{adj } M$, la trasposta di $\text{cof } M$: $(-1)^{i+j} \det(M_{ij}^j)$.

- Si osserva che $n \cdot \det M = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n M_i^h (-1)^{i+h} \det(M_{ij}^h) = \text{traccia}(M \text{cof } M)$.

3.1) formula per la matrice inversa $\det M \cdot I_n = M \cdot \text{adj } M$. Infatti ponendo $\delta_{i,j} = 0$ per $i \neq j$, e $\delta_{i,i} = 1$, sviluppando per la j^a riga:

$$\delta_{i,j} \det M = \det M [M_i / M_j] = \sum_h M_i^h (-1)^{h+j} \det(M_{ij}^h) = (M \cdot \text{adj } M)_i^j.$$

3.2) formula di Cramer Se $\det M \neq 0$, e $Mx = b$ allora $x_j = \frac{\det M [b / M^j]}{\det M}$.

3.3) determinante di matrici triangolari a blocchi

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{A_{h_1 \times h_1}^1} & B_{h_1 \times h_2} & \dots & B_{h_1 \times h_k} \\ O_{h_2 \times h_1} & \boxed{A_{h_2 \times h_2}^2} & \dots & B_{h_2 \times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{h_k \times h_1} & O_{h_k \times h_2} & \dots & \boxed{A_{h_k \times h_k}^k} \end{pmatrix} = \det A^1 \cdot \dots \cdot \det A^k, \text{ con } h_1 + \dots + h_k = n.$$

Definizione derivata di una matrice $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = ((M_i^j(t))')_{i,j} =_{\text{def}} M'(t)$.

3.4) formula di Leibniz per la derivata del determinante Sia $M(t) = (M^1(t) | \dots | M^n(t))$

$$(\det M)' = \sum_{j=1}^n \det (\dots M^{j-1} | (M^j)' | M^{j+1} \dots) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_i^j)' (-1)^{i+j} \det M_{ij}^j =$$

$$= \text{tr} [M' \text{adj } M] = \langle M' \cdot {}^T(\text{adj } M) \rangle_{\mathbf{R}^{n^2}} = \langle M' \cdot \text{cof } M \rangle_{\mathbf{R}^{n^2}}$$

3.5) funzioni n -lineari alternanti in \mathbf{K}^N

3.5.1 algebra come visto all'inizio del primo paragrafo una funzione Λ multilineare su n copie di \mathbf{K}^N , $N > n$, $\Lambda : \mathbf{K}^N \times \dots \times \mathbf{K}^N \sim \mathcal{M}(N, n, \mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$, si ha per multilinearit 

$$\Lambda(V^1 | \dots | V^n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq N} \dots \sum_{1 \leq j_n \leq N} V_{j_1}^1 V_{j_2}^2 \dots V_{j_n}^n \Lambda(\mathbf{e}_{j_1}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{j_2}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{j_n}^{\mathbf{K}^N}) =,$$

per l'alternanza come per la dimostrazione della formula di Leibniz si somma sulle funzioni iniettive

$$= \sum_{j: \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \{1, \dots, N\}} V_{j_1}^1 V_{j_2}^2 \dots V_{j_n}^n \Lambda(\mathbf{e}_{j_1}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{j_2}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{j_n}^{\mathbf{K}^N}) =$$

poich  scegliere una funzione iniettiva $j : \{1, \dots, n\} \hookrightarrow \{1, \dots, N\}$, equivale a scegliere la sua immagine cio  un sottinsieme di n elementi di $\{1, \dots, N\}$, ovvero l'unica $k : \{1, \dots, n\} \uparrow \{1, \dots, N\}$ strettamente crescente con tale immagine, e una permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_n$, in modo che $j = k \circ \sigma$

$$= \sum_{k: \{1, \dots, n\} \uparrow \{1, \dots, N\}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} V_{k_{\sigma_1}}^1 V_{k_{\sigma_2}}^2 \dots V_{k_{\sigma_n}}^n \Lambda(\mathbf{e}_{k_{\sigma_1}}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{k_{\sigma_2}}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{k_{\sigma_n}}^{\mathbf{K}^N}) =$$

$$= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \Lambda(\mathbf{e}_{k_1}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{k_2}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{k_n}^{\mathbf{K}^N}) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} V_{k_{\sigma_1}}^1 V_{k_{\sigma_2}}^2 \dots V_{k_{\sigma_n}}^n \det(I_\sigma^{\mathbf{R}^n}) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \Lambda(\mathbf{e}_{k_1}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{k_2}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{k_n}^{\mathbf{K}^N}) \det(V_{k_1, \dots, k_n})$$

ove V_{k_1, \dots, k_n} è la sottomatrice $n \times n$ di V ottenuta scegliendo le righe $k_1 < \dots < k_n$. Ovvero si sta considerando la proiezione ortogonale in \mathbf{K}^N delle colonne di V sul sottospazio coordinato di dimensione n delle coordinate k_1^a, \dots, k_n^a .

Nota: quindi una funzione n -lineare alternante su \mathbf{K}^N , $N > n$, è determinata dagli $\binom{N}{n}$ numeri $\Lambda(\mathbf{e}_{k_1}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{k_2}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{k_n}^{\mathbf{K}^N})$, uno per ogni scelta di n coordinate su N .

Corollario una funzione n -lineare alternante su \mathbf{K}^N è determinata quando siano dati i suoi valori $\Lambda(\mathbf{e}_{k_1}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{k_2}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{k_n}^{\mathbf{K}^N})$, $1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N$.

Formula di Cauchy-Binet siano $U, V \in \mathcal{M}(N, n, \mathbf{K})$, $N > n$, allora

$$\det({}^TUV) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \det(U_{k_1, \dots, k_n}) \det(V_{k_1, \dots, k_n})$$

Dimostrazione, traccia: $X \mapsto \det({}^TUX)$ definita per le matrici $N \times n$, è n -lineare ed alternante.

Quindi $\det({}^TUV) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \det({}^T U(\mathbf{e}_{k_1}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{k_n}^{\mathbf{K}^N})) \det(X_{k_1 \dots k_n}) = \sum \det(U_{k_1 \dots k_n}) \det(X_{k_1 \dots k_n})$.

Corollario Cauchy-Binet-Pitagora
 somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine n di $M \in \mathcal{M}(N, n, \mathbf{K})$, $N > n$
 \parallel
 determinante della matrice tMM di dimensione $n \times n$

3.5.2 interpretazione geometrico intuitive

A) Estendendo quanto osservato nell'introduzione si può interpretare il determinante di una matrice $V = (V^1 | \dots | V^n)$ (di rango massimo) come il “*volume n -dimensionale orientato*” del parallelepipedo n -dimensionale con vertici dati da tutte le possibili somme senza addendi ripetuti delle sue colonne: $0_{\mathbf{K}^n}, V^1, \dots, V^n, \dots, V^1 + V^2, \dots, V^1 + V^n, \dots, V^2 + V^3, \dots, \dots, V^1 + V^2 + V^3 + \dots + V^n$

Egual orientazione due basi di \mathbf{K}^n si dicono avere eguale orientazione se la matrice di cambiamento di di base per passare dalle coordinate dell'una a quelle dell'altra ha *determinante positivo*.

B) Dati $V^1, \dots, V^n \in \mathbf{K}^N$, $N > n$, si può considerare il parallelepipedo al più n -dimensionale con vertici

$$0_{\mathbf{K}^N}, V^1, \dots, V^n, \dots, V^1 + V^2, \dots, V^1 + V^n, \dots, V^2 + V^3, \dots, \dots, V^1 + V^2 + V^3 + \dots + V^n \text{ in } \mathbf{R}^N.$$

L'eguaglianza algebrica sopra dimostrata $\Lambda(V^1 | \dots | V^n) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \Lambda(\mathbf{e}_{k_1}^{\mathbf{K}^N} | \mathbf{e}_{k_2}^{\mathbf{K}^N} | \dots | \mathbf{e}_{k_n}^{\mathbf{K}^N}) \det(V_{k_1, \dots, k_n})$

e quanto detto in A), mostrano che le applicazioni n -lineari alternanti in \mathbf{K}^N , $N > n$, sono funzioni che “*misurano e danno l'orientazione*” dei parallepipedo n -dimensionali in \mathbf{K}^N , sommando con coefficienti i “*volumi n -dimensionali orientati*” dei parallepipedo n -dimensionali in \mathbf{R}^n ottenuti proiettando ortogonalmente sui sottospazi n -dimensionali coordinati $\langle \mathbf{e}_{k_1}^{\mathbf{K}^N}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}^{\mathbf{K}^N} \rangle$ il parallelepipedo in \mathbf{R}^N .

C) - Data $V \in \mathcal{M}(N, n, \mathbf{K})$, da una parte il determinante di una sottomatrice $\times n$ ottenuta scegliendo n righe di indici $k_1 < \dots < k_n$, rappresenta il volume orientato dell' n -parallelepipedo ottenuto proiettando il parallelepipedo generato dai V^1, \dots, V^n sull' n -spazio coordinato generato da $\mathbf{e}_{k_1} \dots \mathbf{e}_{k_n}$.

- Dall'altra: si considera sistema di coordinate cartesiano in \mathbf{R}^N , con i primi n elementi nel sottospazio generato dalle colonne di V . Detta C la matrice di cambio di coordinate C ($C^{-1} = {}^T C$ e $\det C = 1$) le nuove coordinate di V saranno CV ed avranno le ultime $N - n$ componenti nulle. Quindi $\det{}^T V V = \det{}^T V {}^T C C V = \det{}^T (C V) C V$ e quest'ultimo non è che il quadrato del determinante delle coordinate di V nel suo sottospazio: quindi rappresenta il quadrato del suo n -volume in tale sottospazio.

- Le precedenti formule possono essere così interpretate: dato un n -parallelepipedo P in \mathbf{R}^N , e le sue proiezioni ortogonali $P_{k_1 < \dots < k_n}$ sugli n -spazi coordinati generati da $\mathbf{e}_{k_1} \dots \mathbf{e}_{k_n}$, si ha la seguente

identità che generalizza il teorema di Pitagora:

$$\sqrt{\sum_{k_1 < \dots < k_n} Vol_n(P_{k_1 \dots k_n})^2} = Vol_n(P)$$