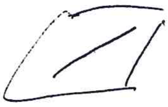
Sappiamo da Euclide che per 2 punti distinti passa una retta e che per 3 punti non allineati passa un piano.

- due rette distinte possono essere

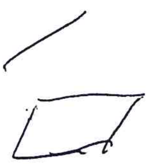
  - incidenti
  - parallele } complanari
  - sghembe.

- due piani distinti possono essere
  - incidenti in una retta
  - paralleli

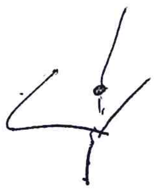
- un piano e una retta possono essere



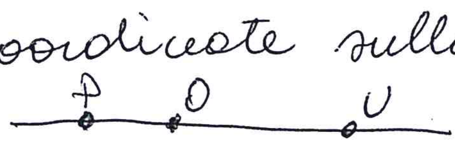
  - la retta giace nel piano
  - la retta è parallela al piano



  - la retta interseca il piano in un punto.



Coordinate sulla retta



$U \neq O$

Ogni P della retta verifica $P - O = t(U - O)$

La differenza di due punti rappresenta un segmento orientato $P-O$ è orientato da O verso P.

t è un numero reale positivo se P è dalla stessa parte di U rispetto a O, è negativo se P è dalla parte opposta.

Abbiamo incollato i numeri reali sulla retta, lo zero corrisponde a O, 1 corrisponde a U.

Ora fissiamo un punto O nello spazio e prendiamo 3 rette perpendicolari a 2 a 2 passanti per O. Su ciascuna fissiamo un punto

U_1, U_2, U_3 in modo che la lunghezza dei segmenti $\overline{OU_1}, \overline{OU_2}, \overline{OU_3}$ sia la stessa.

Adesso per ogni punto dello spazio si può costruire un parallelepipedo rettangolo con un vertice in O, i lati uscenti da O sulle rette scelte, in modo che P sia il vertice opposto a O nel parallelepipedo. ~~Le 3 facce uscenti da P segano le 3 rette~~ I tre piani per P

ortogonali alle 3 rette, le intersecano in 3 ③
punti P_1, P_2, P_3 dove $P_1 - O = x(U_1 - O)$, $P_2 - O =$
$= y(U_2 - O)$ e $P_3 - O = z(U_3 - O)$

P_1, P_2, P_3 sono i secondi vertici dei 3 lati del parallelepipedo uscenti da O e il punto P è univocamente determinato dalla terna (x, y, z).

Equazioni parametrica di una retta.

Siano P_1 e P_0 due punti distinti
Se X appartiene alla retta per P_0 e P_1 si deve avere

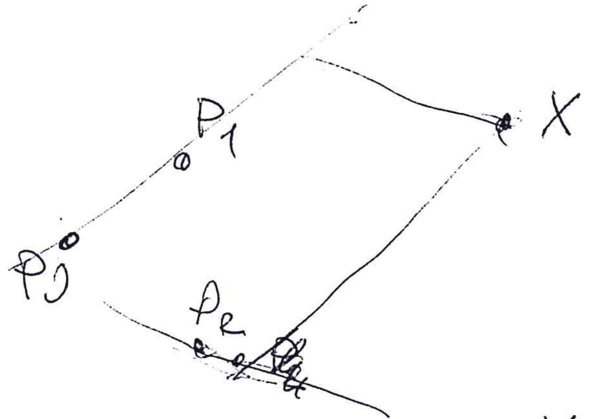
$X - P_0 = t(P_1 - P_0)$ per un certo ben determinato $t \in \mathbb{R}$. Quindi se $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ si avrà

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$ eq. par. della retta.

Equazioni parametriche di un piano

Siano $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ tre punti non allineati



Se X è un punto del piano X è il secondo estremo della diagonale di un unico parallelogramma con un vertice in P_0 e i lati paralleli alle rette P_0P_1 e P_0P_2.

Quindi $X-P_0 = t\,(P_1-P_0)+s\,(P_2-P_0)$

(la somma è con la regola del parallelogramma!). Dunque

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,(x_1-x_0) + s\,(x_2-x_0) \\ y = y_0 + t\,(y_1-y_0) + s\,(y_2-y_0) \\ z = z_0 + t\,(z_1-z_0) + s\,(z_2-z_0) \end{cases}$$

che sono le equazioni parametriche di un piano.

Osserviamo che i 3 coefficienti di t non possono essere tutti e 3 0 perché $P_1 \neq P_0$. Dunque possiamo calcolare t in una delle equazioni: se $x_1 \neq x_0$ si ha

$$t = \frac{1}{x_1 - x_0}\left(\cancel{x - x_0 - s(x_2 - x_0)}\right)\left(x - x_0 - s(x_2 - x_0)\right)$$

Sostituiamo nelle altre due equazioni

$$y = y_0 + \frac{1}{x_1 - x_0}\left(x - x_0 - s(x_2 - x_0)\right)(y_1 - y_0) + s(y_2 - y_0)$$

$$z = z_0 + \frac{1}{x_1 - x_0}\left(x - x_0 - s(x_2 - x_0)\right)(z_1 - z_0) + s(z_2 - z_0)$$

In queste due equazioni il coefficiente di s

è $\quad \dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) + y_2 - y_0$ nella prima

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}(z_1 - z_0) + (z_2 - z_0)$$

Ancora non possono essere entrambi 0

Quindi possiamo ricavare s da una

delle due equazioni e sostituirlo nell'altra

Otteniamo un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

di grado 1, le cui soluzioni sono i punti del piano.

Viceversa un'equazione non banale di grado 1 rappresenta un piano: basta calcolare 3 soluzioni non allineate dell'equazione (Ogni soluzione è una terna di numeri reali), fare il piano per i 3 punti, eliminare i parametri e si ritrova l'equazione precedente, forse moltiplicata per una costante. Si chiama EQUAZIONE CARTESIANA del piano.

<u>Osservazione</u> consideriamo le due equazioni

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \text{con } (a,b,c)\neq(0,0,0)$$
$$ax+by+cz+d'=0 \qquad \text{e } d'\neq d$$

E' chiaro che le due equazioni

1. rappresentano 2 piani
2. i due piani non si intersecano

Dunque: alterando il termine noto si ottiene un piano parallelo. Li abbiamo ottenuti tutti? Si. Un piano parallelo al primo è un piano che passa per un punto P non appartenente al piano

Se $P=(u,v,w)$ l'equazione sarà

$$ax+by+cz+d'=0$$

dove $d'=-(au+bv+cw)$ che ha solo il termine noto variato.

Equazioni cartesiane di una retta.

Ritorniamo alle equazioni parametriche della retta r per P_0 e P_1 di pag. 3. Poiché $P_0 \neq P_1$ uno almeno dei 3 coefficienti di t: x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0 è $\neq 0$. Mettiamo sia $x_1-x_0 \neq 0$. Allora

$$t = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0)$$

$$z = z_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}(z_1-z_0)$$

che possiamo scrivere

$$\begin{cases} (y_1-y_0)x - (x_1-x_0)y + y_0(x_1-x_0) - x_0(y_1-y_0) = 0 \\ (z_1-z_0)x - (x_1-x_0)z + z_0(x_1-x_0) - x_0(z_1-z_0) = 0 \end{cases}$$

vedete bene che sono 2 piani non paralleli.

Quindi r viene rappresentata come intersezione di 2 piani.

Se $\begin{cases} f=0 \\ g=0 \end{cases}$ sono le equazioni cartesiane (8)

di una retta r, è chiaro che

$$af+bg=0 \qquad (a,b)\neq(0,0)$$

è l'equazione cartesiana di un piano che passa per r. Al variare di $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ si ottengono tutti i piani che passano per r.

Infatti un tale piano è determinato dal passaggio per un punto $P=(x_0,y_0,z_0)\notin r$.

Calcoliamo

$$af(x_0,y_0,z_0)+b(g(x_0,y_0,z_0))=0$$

$f(x_0,y_0,z_0)$ e $g(x_0,y_0,z_0)$ non possono essere entrambi 0 perché $P\notin r$. Se per esempio $f(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ possiamo scrivere $a=-\dfrac{b\,g(x_0,y_0,z_0)}{f(x_0,y_0,z_0)}$

Se prendiamo $b=-1$ e $a=\dfrac{g(x_0,y_0,z_0)}{f(x_0,y_0,z_0)}$

abbiamo un piano che passa per r e per P_0

I vettori.

dato un segmento orientato P_1-P_0, c'è un unico segmento orientato $V-O$ che è

- parallelo a P_1-P_0
- lungo come P_1-P_0
- con lo stesso verso.

Diremo che due segmenti orientati sono equivalenti se hanno lo stesso $V-O$.

Chiamiamo VETTORI i segmenti orientati con primo estremo O e li chiamiamo con una lettera minuscola. In particolare

$$e_1 = U_1-O = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2 = U_2-O = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3 = U_3-O = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Dunque un vettore è una terna di numeri reali $v \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. ~~Inoltre~~

Possiamo dunque sommare due vettori

$$v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \quad v+w = \begin{pmatrix}a+\alpha\\b+\beta\\c+\gamma\end{pmatrix}$$

Esercizio. Dimostrare che $v+w$ è il vettore diagonale del parallelogramma con lati v e w

Quindi se $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$v = a e_1 + b e_2 + c e_3 .$$

La somma ha tutte le proprietà delle somma nei numeri interi $\mathbb{Z}$.

- $+$ è associativa e commutativa
- c'è un elemento nullo $\vec{0} = O - O$
- ogni v ha un opposto $-v = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$

Proiezione ortogonale su un piano o su una retta.

Sia dato un piano P.

Per ogni vettore $v = V - O$, c'è un'unica retta passante per V e perpendicolare a P.

Definiamo $\pi(v) =$ proiezione ortogonale di V nel piano P il vettore $v' = V' - O$ dove V' è il punto di intersezione tra P e la sua retta perpendicolare passante per V.

- se $\pi(v) = v'$ $\quad \pi(a v) = a v'$ $\quad a \in \mathbb{R}$
- se $v = v_1 + v_2$ $\quad \pi(v) = \pi(v_1) + \pi(v_2)$

Il secondo punto significa:

la proiezione ortogonale di un parallelo gramma è un parallelogramma (forse degenere).

Occorre dimostrare che la proiezione su un piano di due rette parallele è una coppia di rette parallele (forse coincidenti)

Questo è chiaro se le due rette sono parallele al piano P. Se no le due rette parallele intersecano ciascuna P in un punto.

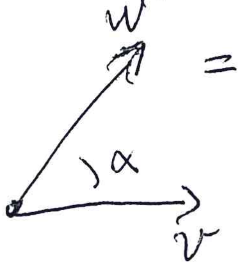
c'è un unico piano passante per una delle rette perpendicolare a P. Il piano perpendicolare a P per la seconda retta, se non è lo stesso, è parallelo all'altro. Dunque i due piani intersecano P in due rette parallele se sono diversi, nella stessa retta se coincidono

Anche la proiezione ortogonale P_2 su una retta soddisfa

- $P_2(a v) = a P_2(v)$
- $P_2(v+w) = P_2(v) + P_2(w)$

prodotto scalare tra due vettori

$\langle v, w \rangle =$ lunghezza di $v \cdot$ lunghezza di $w \cdot \cos\alpha$



$= \langle w, v \rangle$

(se $v = V - O$, lunghezza di v = lunghezza del segmento $\overline{OV}$)

Prendiamo r la retta per w e sia v' la proiezione di v su tale retta.

v' è un multiplo di w $v' = kw$. Come calcoliamo k. Beh $w =$ lunghezza di $w \cdot w_1$ dove w_1 è il vettore di lunghezza 1, nella stessa retta di w e orientato dalla stessa parte

Quindi $v' = \dfrac{k}{\text{lunghezza di } w} v'$.

e quanto è lungo v'? lunghezza $v \cos\alpha$

se $\cos\alpha > 0$ lunghezza $v \cos\alpha$ se $\cos\alpha < 0$ ma in questo caso $k < 0$ e quindi va bene lunghezza di $v \cos\alpha$.

che cosa abbiamo scoperto?

che $\langle v, w_1 \rangle =$ lunghezza $v \cos\alpha$

e $v' = \langle v, w_1 \rangle w_1$.

Ora se $v = v_1 + v_2$

$$v' = v_1' + v_2' = \langle v, w_1 \rangle w_1 =$$

$$= \left(\langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle \right) w_1$$

Abbiamo cioè scoperto che

$\langle v, w_1 \rangle$ nella prima variabile rispetta la somma. e (molto più facile) il prodotto per un numero $\langle a v, w_1 \rangle = a \langle v, w_1 \rangle$

Ma $\langle v, w_1 \rangle = \langle w_1, v \rangle$

e $w_1 = \dfrac{1}{\text{lungh } w} w$

quindi $\dfrac{1}{\text{lungh } w} \langle v, w \rangle = \dfrac{1}{\text{lungh } w} \left(\langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \right)$

$\dfrac{1}{\text{lungh } w} \neq 0$ quindi $\langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = \langle v_1 + v_2, w \rangle$

Conclusione

- $\langle v_1+v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$
- $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
- $\langle a v, w\rangle = a\langle v, w\rangle$

Ora scriviamo $v = a e_1 + b e_2 + c e_3$
$w = A e_1 + B e_2 + C e_3$

e calcoliamo $\langle v, w\rangle$. Poiché $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0$ e $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 0$ si ottiene con un po' di passaggi

$$\langle v, w\rangle = aA + bB + cC.$$

La formula è molto più facile da calcolare e conserva la proprietà

$$v \perp w \iff \langle v, w\rangle = 0$$