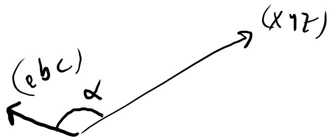
$$\langle (x,y,z)\cdot(a,b,c)\rangle = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\;\cos\alpha$$



$$\cos\alpha = \frac{\langle (x\,y\,z)\cdot(a\,b\,c)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi

Prodtto scalare in $\mathbf{R}^n$: $\langle (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$;

Prodtto vettore in $\mathbf{R}^3$: $(a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) = (b\gamma - \beta c, -(a\gamma - \alpha c), a\beta - \alpha b)$,

quindi $\langle (a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (a, b, c) \rangle = \langle (a, b, c) \times (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \rangle = 0$.

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^2$ la retta passante per i punti $(-3, 1)$ e $(-2, -4)$; b- si scriva un'equazione della stessa retta.

Domanda 2 Le rette $(1, 1) + t(1, -1)$, $t \in \mathbf{R}$ e $(2 + 2t, 2 - t)$, $t \in \mathbf{R}$ si incontrano?

Domanda 3 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ la retta passante per i punti $(1, -2, 1)$ e $(-2, 1, -3)$. Si scrivano equazioni della stessa retta.

Domanda 4 a- Si mostri che per ogni m le equazioni $y - mx = 0$, $z = m$ definiscono una retta. b- Si mostri che le coppie di rette della famiglia così definite sono sghembe. PER CASA

Domanda 5 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ il piano passante per i punti $(1, 2, 3)$, $(0, 4, 0)$ e $(0, -1, 2)$. Si scriva un'equazione dello stesso piano.

Domanda 6 Quali delle seguenti coppie di rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ sono sghembe?

a- $(0, 1, 2) + t(1, 1, 1), \ t \in \mathbf{R}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$

b- $\begin{cases} -1 = x + 2y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - 2y + z \end{cases}$

c- $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2), \ t \in \mathbf{R}$, $\begin{cases} 1 = x - 2y + z \\ 5 = 4x - 3y + z \end{cases}$

Domanda 7 Si scrivano le equazioni dei piani del fascio passante per la retta $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2), \ t \in \mathbf{R}$.

Domanda 8 Si calcolino i prodotti *scalare* e *vettore* tra $(1, 2, 3)$ e $(-1, 2, -3)$.

Domanda 9 Si calcoli il coseno dell'angolo tra le rette in $\mathbf{R}^4$ date da $(2t - 3, 2t - 1, 2t + 2, t), \ t \in \mathbf{R}$, e da $(t - 3, t - 1, t + 2, t), \ t \in \mathbf{R}$.

Domanda 10 Si scriva l'equazione del piano passante per $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(0, 1, 2)$.

Domanda 11 Si scriva l'equazione del piano passante per il punto $(1, 1, 1)$ e la retta di equazioni $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$.

Domanda 12 Si scriva un'equazione del piano per $(1, 1, 1)$ parallelo a quello dato da $3x + 4y + 5z = 1$.

Domanda 13 Si scrivano delle equazioni per una retta passante per $(1, 1, 1)$ e che non interseca il piano dato da $3x + 4y + 5z = 1$.

Domanda 14 a- Si trovi la distanza tra i due piani definiti rispettivamente da $2x - 2y + 2z = 4$ e $x - y + z = 2$.

$A^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A,\ x_2 \in A, \dots x_n \in A\} = A \times A \times \dots \times A$

Domanda 1 a- Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^2$ la retta passante per i punti $(-3,1)$ e $(-2,-4)$;
b- si scriva un'equazione della stessa retta.

P_0 $\quad$ P_1

$P_1 - P_0 = (-2,-4) - (-3,1) =$

$= (-2,-4) + (3,-1) =$

$= (-2+3, -4-1)$

FORMA PARAM. $P_0 + t(\underbrace{P_1 - P_0}_{v}) =$

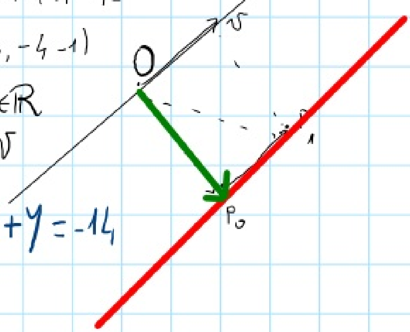
$= (-3,1) + t(1,-5) =$

$= (-3+t,\ 1-5t)$

PRIMO MOD $\begin{cases} x = -3+t \\ y = 1-5t \end{cases}$

$t \in \mathbb{R}$

tv



$5x + y = -14$

1) RICAVO t DA UN'EQUAZIONE $\begin{cases} t = x+3 \\ y = 1-5t \end{cases}$

2) LO SOSTITUISCO NELLE RIMANENTI $\quad y = 1 - 5(x+3)$

Domanda 3 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ la retta passante per i punti $(1,-2,1)$ e $(-2,1,-3)$.
Si scrivano equazioni della stessa retta.

(x,y,z) t.c. $\exists t \in \mathbb{R}$ $(x,y,z) =$

$= P_0 + t(P_1 - P_0) = (-2,1,-3) + t(3,-3,4)$

$P_1 \quad P_0 \quad P_1 - P_0 =$

$= (3,-3,4)$

$= (-2+3t,\ 1-3t,\ -3+4t)$

cioè $\begin{cases} x = 3t-2 \\ y = 1-3t \\ z = -3+4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{\begin{cases} x+y = -1 & (1) \\ 4y+3z = -5 & (2) \end{cases}}$

Viceversa risolviamo il sistema

$\begin{cases} x+y = 1 \\ 4y+3z = -5 \end{cases}$

da (1) $y = 1-x$, sostituisco in (2) $\overset{4y}{-4-4x} + 3z = -5$

$3z - 4x = -1 \quad z = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ le soluzioni sono

$(x,\ 1-x,\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}) = (0, 1, -\frac{1}{3}) + x(1, -1, \frac{4}{3})$

$x \in \mathbb{R}$

• RISOLVERE UN SISTEMA VUOL DESCRIVER LE SOLUZIONI IN FORMA PARAMETRICA

• FORMA PARAMETRICA DI UN INSIEME A

rette = immagine

A = Immagine di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$f(t) = (-2+3t, 1-3t, -3+4t)$

• EQUAZIONI DI UN INSIEME A

retta EQUAZIONI

A = Preimmagine del valore di una funzione $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A = F^{-1}(\{(-1,-5)\})$

$F(x,y,z) = (x+y, 4y+3z)$

Domanda 2 Le rette $(1,1)+t(1,-1)$, $t \in \mathbf{R}$ e $(2+2t, 2-t)$, $t \in \mathbf{R}$ si incontrano?

r_1

$(2,2)+t(2,-1)$ r_2

non sono parallele perché

$\lambda(1,-1)+\mu(2,-1) \neq (0,0) \quad \forall \lambda, \mu$

$\lambda^2+\mu^2 \neq 0$

Altra soluzione

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 2-t \end{cases}$

? $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$

? $\exists P \in r_1 \cap r_2$

$\exists t_1$ $\quad$ $\exists t_2$

$P(x,y)$

$\begin{cases} 1+t = 2+2t \\ 1-\cancel{t} = 2-\cancel{t} \end{cases}$ NON HA SOLUZIONI ???

$\begin{cases} x = 1+t_1 \\ y = 1-t_1 \end{cases}$ $P \in r_1$

$\begin{cases} x = 2+2t_2 \\ y = 2-t_2 \end{cases}$ $P \in r_2$

$\begin{cases} 1+t_1 = 2+2t_2 \\ 1-t_1 = 2-t_2 \end{cases}$

$t_1 = -3$

$1+\cancel{t_1} = 2+2+\cancel{2}t_1$

$t_2 = 2-1+t_1 = 1+t_1$

Domanda 5 Si scriva in forma parametrica in $\mathbf{R}^3$ il piano passante per i punti $(1,2,3)$, $(0,4,0)$ e $(0,-1,2)$. Si scriva un'equazione dello stesso piano. π

$P_0 \quad P_1 \quad P_2$

$\overrightarrow{P_0P_1}(-1,2,-3)$

$\overrightarrow{P_0P_2}(-1,-3,-1)$

$P_0 + s(P_1-P_0)+t(P_2-P_0)=$

$=(1,2,3)+s(-1,2,-3)+t(-1,-3,-1)=$

$=(1-s-t,\ 2+2s-3t,\ 3-3s-t)$

sto vedendo π come immagine

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$f(s,t)=(1-s-t,\ 2+2s-3t,\ 3-3s-t)$

$\pi=\{P\in\mathbb{R}^3 : \exists(s,t) : P=f(s,t)\}$

ORA SI VUOL VEDERE π COME PRE-IMMAGINE (LUOGO DI ZERI) DI UNA

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$\pi=\{P : F(P)=0\}=F^{-1}(\{0\})$

$$\begin{cases} x=1-s-t \\ y=2+2s-3t \\ z=3-3s-t \end{cases}$$

$t=1-s-x$

$$\begin{cases} y=\cancel{2}+2s-3+3s+3x \\ z=\cancel{3}-3s-1+s+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-1+5s+3x \\ z=2-2s+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y=-2+10s+6x \\ 5z=10-10s+5x \end{cases}$$

SOMMO ED ELIMINO s

$F(x,y,z)=-11x+2y+5z-8$

$-11x+2y+5z-8=0$

Domanda 7 Si scrivano le equazioni dei piani del fascio passante per la retta $(2t-3, 2t-1, 2t+2)$, $t\in\mathbf{R}$.

$$\begin{cases} x=2t-3 \\ y=2t-1 \\ z=2t+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ y-z=-3 \end{cases}$$

x è un numero naturale pari

$x=2n \mid n\in\mathbb{N}$

$x=6m \quad m\in\mathbb{N}$

$\alpha^2+\beta^2\neq 0$

$\alpha(x-y+2)+\beta(y-z+3)=0$

per α e β non entrambi nulli

$$\boxed{\alpha x+(\beta-\alpha)y-\beta z+2\alpha+3\beta=0}$$

Domanda 6 Quali delle seguenti coppie di rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ sono sghembe?

a- $\boxed{(0,1,2)+t(1,1,1),}\ t\in\mathbf{R}$; $\begin{cases}1=x+y+z\\0=x-y+z\end{cases}$

$f(t)$, r_1, r_2

$r_1 = \mathrm{Im}\,(t, 1+t, 2+t)$

r_2 : Preimmagine $(1,0)$ mediante $\begin{pmatrix}x+y+z\\x-y+z\end{pmatrix}$

b- $\begin{cases}-1=x+2y+z\\-2=x-y+z\end{cases}$; $\begin{cases}1=x+y+z\\0=x-2y+z\end{cases}$

c- $(2t-3, 2t-1, 2t+2)$, $t\in\mathbf{R}$, $\begin{cases}1=x-2y+z\\5=4x-3y+z\end{cases}$

$f: A \to B$ $\quad C \subset B$ $\quad C=\{v_0\}$

$\mathrm{Im} f = f(A) = \{v\in B : \exists t\in A \ \ v=f(t)\}$ *

$f^{-1}(C) = \{t\in A : f(t)\in C\}$ **

$\{t\in A: f(t)=v_0\}$

6a. Per il parallelismo basta mettere la seconda in forma parametrica

$P, Q \in r$

$\begin{cases}1 = x+y+z\\ y = x+z\end{cases}$ $\quad 1 = x + \underbrace{x+z}_{y} + z$ $\quad z = \frac{1}{2} - x$

$y = x + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}$

$P \in r$, $v \neq 0$

$X \in r \iff \exists t\in\mathbb{R}\ \ X = P + t(Q-P)$

$\exists t \in \mathbb{R}.\ X = P + tv$

FORMA PARAMETRICA

$$\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-x\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + x(1,0,-1)$$

NON SON PARALLELE.

• Incidente $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}$ $\quad r_1 = \mathrm{Im}(t, 1+t, 2+t)$ $\quad f_1 : \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^3$ $\quad x(t)\,y(t)\,z(t)$

$\begin{cases}1=x+y+z\\0=x-y+z\end{cases}$ $\quad r_2 = f_2^{-1}(\{(1,0)\})$ $\quad f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix}x+y+z\\x-y+z\end{pmatrix}$

$r_1 = \{(x,y,z) : \exists t\ \ x=t, y=1+t, z=2+t\}$

$r_2 = \{(x,y,z) ;\ x+y+z=1 \text{ e } x-y+z=0\}$

$\{(x,y,z)\ \begin{pmatrix}x+y+z\\x-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ **

$\begin{cases}1 = \overset{x}{t} + \overset{y}{1+t} + \overset{z}{2+t}\\ 0 = \cancel{t} - 1 - \cancel{t} + 2+t\end{cases}$ $\quad \begin{cases}1 = 3t+3\\0 = t+1\end{cases}$ $\quad \begin{cases}t=-\frac{2}{3}\\t=-1\end{cases}$

Non ci son soluz.

$P \in r_1$, (x,y,z) $\quad \begin{matrix}x_p = t\\ y_p = 1+t\\ z_p = 2+t\end{matrix}$ $\quad P\in r_2$ $\quad \begin{cases}1 = x_p + y_p + z_p\\0 = x_p - y_p + z_p\end{cases}$

$\begin{cases}1 = t + 1+t + 2+t\\0 = t - 1 - t + 2+t\end{cases}$

b- Si determini l'equazione dei due piani paralleli, rispettivamente contenenti le due rette sghembe $(0,1,2)+t(1,1,1),\ t\in\mathbf{R};\ \begin{cases}1=x+y+z\\0=x-y+z\end{cases}$

c- Si calcolii la distanza tra le due rette.

Domanda 15 Si trovi il simmetrico di $(1,2,3)$ rispetto al piano dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 16 Si calcoli la distanza di $(1,1,1)$ dal piano dato da $3x+4y+5z=1$.

Domanda 17 Si trovi il simmetrico di $(1,2,3)$ rispetto alla retta data da $\begin{cases}1=3x+4y+5z\\0=x+y+z\end{cases}$

Domanda 18 Si calcoli la distanza di $(1,1,1)$ dalla retta data da $\begin{cases}1=3x+4y+5z\\0=x+y+z\end{cases}$.

Domanda 19 Si scriva l'equazione del piano passante per $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(0,1,2)$, e si calcoli la distanza dello stesso dal punto $(-1,-1,-1)$.

Domanda 20 Siano $v=(a,b)$, $w=(A,B)$ in $\mathbf{R}^2$: $aB-Ab=0$ se e solo se vi sono λ e μ in $\mathbf{R}$ per cui $\lambda v+\mu w=(0,0)$, cioè v e w sono paralleli.

Domanda 21 Siano $v=(a,b,c)$, $w=(A,B,C)$ in $\mathbf{R}^3$: $aB-Ab=0$ e $bC-Bc=0$ se e solo se vi sono λ e μ in $\mathbf{R}$ per cui $\lambda v+\mu w=(0,0,0)$, cioè v e w sono paralleli. Si noti che ne segue anche $aC-Ac=0$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1. a- Si scrivano le equazioni della retta ottenuta proiettando ortogonalmente la retta di equazioni $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + z \end{cases}$ sul piano di equazione $x + 2y + 3z = 4$.
b- Si calcoli la distanza del punto $(1, 1, 1)$ da tale retta.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 2. a- Mostrare che le rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ date da $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = x - y + 2z \end{cases}$ sono sghembe.
b- Trovare l'unica coppia di piani parelli ognuno contenente una delle due precedenti rette.
c- Per quale tra i punti $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (1, 0, 0)$ passa una retta che interseca le rette date?

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Primo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3. a- Mostrare che le rette nello spazio $\mathbf{R}^3$ date da $\begin{cases} 0 = x + 3y + z \\ -2 = x - y + z \end{cases}$; $\begin{cases} 1 = x + y + z \\ 0 = 2x - y + z \end{cases}$ sono sghembe.
b- Si discuta se esiste un piano contenente la prima retta ed ortogonale alla seconda: nel caso se ne scriva l'equazione.