Lezione 3 15.10.2020 ①

Siano a, b due parametri reali. Il sistema

$$\begin{cases} a x+(a-1)y+(a+1)z=b \\ (a+1)x+a y+a z=0 \\ (a-1)x+(a+1)y+(a-1)z=b \end{cases}$$

ha come matrice

$$\begin{pmatrix} a & a-1 & a+1 & b \\ a+1 & a & a & 0 \\ a-1 & a+1 & a-1 & b \end{pmatrix}$$

Osserviamo che sommando le ultime due righe e mettendo la somma alla seconda riga possiamo fare il primo passo di Gauss: $R_2 \to R_2+R_3$

$$\begin{pmatrix} a & a-1 & a+1 & b \\ 2a & 2a+1 & 2a-1 & b \\ a-1 & a+1 & a-1 & b \end{pmatrix}$$

ora $R_2 \to R_2-2R_1$

$$\begin{pmatrix} a & a-1 & a+1 & b \\ 0 & 3 & -3 & -b \\ a-1 & a+1 & a-1 & b \end{pmatrix}$$

bivio $\begin{cases} a=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$

cominciamo con $a\neq 0$ $R_3 \to R_3-\frac{a-1}{a}R_1$

ci viene:

(2)

$$\begin{pmatrix} a & a-1 & a+1 & b \\ 0 & 3 & -3 & -b \\ 0 & 3-\frac{1}{a} & -1+\frac{1}{a} & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

moltiplichiamo per $a \neq 0$ la terza riga

CONTI

$$a+1-\frac{a-1}{a}(a-1) = a+1-\frac{(a-1)^2}{a} =$$

$$= a+1-\frac{a^2-2a+1}{a} = \cancel{a}+1-\cancel{a}+2-\frac{1}{a}$$

$$a-1-\frac{a-1}{a}(a+1) = a-1-\frac{(a^2-1)}{a} = \cancel{a}-1-\cancel{a}+\frac{1}{a}$$

$$b-\frac{a-1}{a}b = \cancel{b}-\cancel{b}+\frac{b}{a}$$

$$\begin{pmatrix} a & a-1 & a+1 & b \\ 0 & 3 & -3 & -b \\ 0 & 3a-1 & 1-a & b \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3-\frac{1}{3}(3a-1)R_2$$

$$\begin{matrix} a & a-1 & a+1 & b \\ 0 & 3 & -3 & -b \\ 0 & 0 & 4a & b\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}a\right) \end{matrix}$$

$$1-a+\frac{1}{\cancel{3}}(3a-1)\cancel{3} = \cancel{1}-a+3a\cancel{-1} = 4a$$

$$b+\frac{1}{3}(a-1)b = b+\frac{1}{3}ab-\frac{1}{3}b = b\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}a\right)$$

$4a \neq 0$. Per $a \neq 0$, $\forall b$ una sola soluzione

Torniamo al bivio e poniamo $a = 0$

Portiamo in cima la riga R_3

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 3 & -3 & -b \end{pmatrix} \quad \text{ora } R_3 \to R_3 + 3R_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

Per $a = 0$ la terza equazione ci dice $0 = 2b$

altro bivio $a = 0$ $\quad b \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}$

se $a = 0$ e $b \neq 0$ NON CI SONO SOLUZIONI

se $a = 0$ e $b = 0$ ci sono infinite soluzioni al variare di z (unica variabile senza pivot)

Osservazione: se in un sistema di p equazioni e q incognite la matrice dei coefficienti ha una colonna nulla, diciamo $A^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ con $j \leq q$, il sistema non dipende da x_j. Vuol dire che x_j non ha vincoli, può assumere qualunque valore.

Esempio: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ in $\mathbb{R}^3$ che soluzioni ha?

tutte le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$

cioè è la retta "asse delle y". La matrice del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ che ha una colonna nulla, quella delle y.

Abbiamo già osservato che un sistema (5)

$$AX = B$$

ha soluzione se e solo se B è combinazione lineare delle colonne di A. Le colonne di A sono vettori di $\mathbb{R}^p$, $X \in \mathbb{R}^q$. Ma allora abbiamo che A definisce una applicazione

$$A : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

che associa a un vettore $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$ il

vettore $a_1 A^1 + \dots + a_q A^q \in \mathbb{R}^p$

Che proprietà ha questa applicazione?

- $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$
- $A(kv) = k\,A(v)$

prova: $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$

$$A(v_1 + v_2) = (a_1 + b_1) A^1 + \dots + (a_q + b_q) A^q =$$

$$= a_1 A^1 + b_1 A^1 + \dots + a_q A^q + b_q A^q =$$

$$= a_1 A^1 + \dots + a_q A^q + b_1 A^1 + \dots + b_q A^q = A(v_1) + A(v_2)$$

$$A(kv) = A\begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_q \end{pmatrix} = ka_1 A^1 + \dots + ka_q A^q =$$

$$= k\left(a_1 A^1 + \dots + a_q A^q\right) = k\left(A(v)\right).$$

diciamo che A è una applicazione LINEARE.

Altra osservazione: consideriamo $e_1, \dots, e_q$ i vettori ~~che gen~~ di cui sono combinazione lineare tutti i vettori di $\mathbb{R}^q$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora $A(e_1) = A^1, \dots, A(e_q) = A^q$

<u>Definizione</u> Se $v_1, \dots, v_l \in \mathbb{R}^n$ $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_l)$

$= \{$combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_l\} =$

$= \{a_1 v_1 + \dots + a_l v_l,\ a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}\}$.

<u>Osservazione</u> se $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_l)$ contiene w_1 e contiene w_2 allora contiene $w_1 + w_2$. Se contiene w allora contiene aw per ogni $a \in \mathbb{R}$. Provare per credere.

$\mathbb{R}^n$ ha una struttura: in $\mathbb{R}^n$ possiamo sommare i vettori e sappiamo moltiplicarli per un numero. Le proprietà della somma e del prodotto per un numero discendono dalle proprietà di somma e prodotto di numeri reali

Per esempio:

$+$ è commutativo ed associativo

0 è elemento neutro

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}. \quad 0 + v = v + 0 = v$$

Ogni vettore ha un opposto

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_n \end{pmatrix} \quad -v = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \\ -a_n \end{pmatrix} \quad v + (-v) = 0$$

$\cdot$ è anche distributivo $\quad k(v+w) = kv + kw$

$1 \cdot v = v$

eccetera . . .

Allora chiameremo SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}^n$ un insieme $V \subset \mathbb{R}^n$ di vettori che verifichi

1) $\forall\, v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 \in V$ (V è chiuso per somma)

2) $\forall\, v \in V, \ \forall\, a \in \mathbb{R} \quad av \in V$ (V è chiuso per prodotto per un numero)

Esempio Se $v_1, \ldots, v_l \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{span}(v_1 \ldots v_l)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono:
$\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, le rette per 0 $r = \mathrm{span}(v)$, i piani passanti per 0 (un piano è lo span di 2 vettori: passa da 0, da P e da Q $\Rightarrow$ è lo span$(P-0, Q-0)$).

Se A è una matrice a p righe e q colonne

$$A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$$

ci sono un sottospazio di $\mathbb{R}^q$ e uno di $\mathbb{R}^p$ associati ad A, il nucleo di A è l'immagine di A

nucleo di $A = \mathrm{Ker}\, A = \{ X \in \mathbb{R}^q \mid AX = 0 \in \mathbb{R}^p \}$

Immagine di $A = \mathrm{Im}\, A = \{ Y \in \mathbb{R}^p \mid \exists X \in \mathbb{R}^q : AX = Y \} =$

$$= \mathrm{span}(A^1, \ldots, A^q)$$

Il primo è un sottospazio di $\mathbb{R}^q$ ed è lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$

Il secondo è un sottospazio di $\mathbb{R}^p$ (perché è uno span). Che sia lo span delle colonne è chiaro perché

$$X \in \mathbb{R}^q \Rightarrow X = x_1 e_1 + \dots + x_q e_q$$

$$AX = x_1 A(e_1) + \dots + x_q A(e_q) \text{ perché è lineare}$$

$$= x_1 A^1 + \dots + x_q A^q$$

Dunque $Y \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow Y$ è comb. lineare delle colonne di A cioè $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(A^1, \dots, A^q)$.