Lezione 21.10.2020 (1)

1. Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo a p equazioni e q incognite sono un sottospazio di $\mathbb{R}^q$. Infatti $AX = 0$, $AY = 0$ $\Rightarrow A(X+Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$

e $A(aX) = a A(X) = a \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Le soluzioni di un sistema non omogeneo NON sono un sottospazio di $\mathbb{R}^q$

$AX = B$, $AY = B$, $A(X+Y) = A(X) + A(Y) = B + B$
$= 2B \neq B$ se $B \neq 0$

3. Però se $A(Y) = B$ e $A(X) = 0$ $X + Y$ è soluzione $A(X+Y) = B$.
Quindi

$\mathrm{Sol}(AX = B) = \mathrm{Sol}(AX = 0) + Y$ dove Y è <u>una</u> soluzione di $AX = B$

4) distanza tra 2 rette sghembe
sol. 1 $d(r, s) = d(A, B)$ dove A e B sono piani paralleli $r \subset A$ $s \subset B$. Preso $P \in A$ prendiamo la retta r_0 per P perpendicolare ad A e B $r_0 \cap B = Q$ $d(A, B) = d(r, s) =$
$= d(P, Q)$

Sol 2 prendo P su r e Q su S ed impongo che P-Q sia ortogonale a r e ad s, trovo P e Q, $d(r,s)=d(P,Q)$ perché? perché la retta per p perpendicolare ad A e B contiene il segmento $\overline{PQ}$ che è perpendicolare a r ed s e quindi anche ad A e B. Ma questa retta incontra B in un unico punto e poiché $Q \in B$ deve essere proprio Q.

5 Ricapitoliamo quello che sappiamo su $\mathbb{R}^n$:

- c'è una somma

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad v+w = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

- + è associativa e commutativa
- c'è un elemento neutro $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$0+v = v+0 = v$$

- c'è un opposto $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \\ -a_n \end{pmatrix}$

$v+w=0$ e tale opposto è unico

- c'è il prodotto per un numero

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$a, v \longrightarrow av = \begin{pmatrix} a a_1 \\ \vdots \\ a a_n \end{pmatrix}$$

- verifica

$$c(v+w) = cv + cw, \ (c+c')v = cv + c'v,$$
$$cc'(v) = c(c'v) = c'(cv)$$
$$1 \cdot v = v \qquad 0 \cdot v = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notate che l'opposto di v è $(-1)v$

Queste operazioni danno a $\mathbb{R}^n$ una STRUTTURA. Ci sono altri esempi con la stessa struttura

- $\mathbb{R}[t] = \{$polinomi a coeff. reali$\}$
  - si possono sommare $p(t) + q(t)$ è ancora un polinomio: sia $d \leq s$

$$(a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d) + (b_0 + b_1 t + \dots + b_s t^s) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_d + b_d)t^d + (0 + b_{d+1})t^{d+1} + \dots$$
$$\dots + b_s t^s$$

④

- $\alpha p(t) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \dots + \alpha a_d t^q$

e valgono le stesse proprietà

- $M(p, q, \mathbb{R}) = \{$matrici a p righe e q colonne a coeff. reali$\}$

stesso discorso di $\mathbb{R}^n$.

- si possono sommare e moltiplicare per scalari.

6 Definizione Uno SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{R}$

è un insieme V ~~da~~ con due operazioni

$+ : V \times V \longrightarrow V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

che verificano:

- $+$ è commutativa e associativa
- $\exists$ elemento neutro $0 \in V$ $v + 0 = 0 + v = v$
- $\exists$ opposto $v + (-v) = 0$
- ~~verifica~~ $c(v+w) = cv + cw$,

$(c+c')(v) = cv + c'v$

$(cc')v = c(c'v) = c'(cv)$

$1 \cdot v = v \qquad 0v = 0$

Esempi di spazi vettoriali

$\mathbb{R}^n$, $M(p,q,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[t]$

$\{f : A \to \mathbb{R}\}$ A insieme qualunque

$\{f : A \to V\}$ A insieme qualunque
V spazio vettoriale

$\{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$ . . . .

Definizione $W \subset V$ è un SOTTOSPAZIO di V se

- $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$
- $a \in \mathbb{R}, v \in W \Rightarrow av \in W$

ovvero V è chiuso per combinazioni lineari

Esempio

~~le soluz.~~ Lo spazio $S = \{$soluz. di $AX = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^q$.

- $v_1, \dots, v_j \in V$, $\text{span}(v_1 - v_j) = \{$comb. lin. di $v_1 - v_j\}$ è un sottospazio di V.

Ricordate la definizione di dipendenza

e indipendenza lineare

Esempio $AX=0$ ha solo la soluzione nulla $\Leftrightarrow$ le colonne di A sono indipendenti in $\mathbb{R}^p$.

<u>Definizione</u> Sia $\mathcal{B}$ un insieme di vettori di V. $\mathcal{B}$ è una <u>base</u> di V se

1. $V = \text{span}\, \mathcal{B}$
2. i vettori di $\mathcal{B}$ sono indipendenti.

Non è detto che $\mathcal{B}$ sia un insieme finito.

Esempio: in $\mathbb{R}[t]$ sia ~~$\mathcal{B}\{1$~~ $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n, t^{n+1} \dots\}$

- $\text{span}\, \mathcal{B} = \mathbb{R}[t]$ ogni polinomio è comb. lineare di elementi di $\mathcal{B}$
- sono indipendenti: ogni combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$ è il polinomio nullo $\Leftrightarrow$ tutti i coeff. sono 0.

<u>Osservazione</u> • Se $V = \text{span}(v_1, \dots, v_e)$ e $v \in V$ allora $V = \text{span}(v_1, \dots, v_e, v)$

• se $v_1 \dots, v_e$ sono indipendenti, anche $v_2 \dots v_e$ sono indipendenti.

Allora una base è

1 un sistema MINIMALE di generatori

2 un sistema MASSIMALE di vettori indipendenti

1 significa: se levo un elemento non ~~è più~~ genera più V

2. significa: ogni altro vettore di V dipende linearmente dal sistema

Notate anche che se una lista di vettori contiene il vettore nullo o vettori ripetuti allora è certamente un insieme di vettori dipendenti.

<u>Problema</u> Ogni spazio vettoriale ha una base?

Risposta SI. Però lo proviamo solo se V è lo span di un numero finito di vettori.

<u>Teorema</u> Sia V span$(v_1 - v_k)$ e sia $B \subset \{v_1 - v_k\}$ un sottoinsieme massimale di vettori indipendenti. Allora B è base di V.

prova Possiamo supporre $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ ⑧
$r \leq k$. Quindi $v_1, \ldots, v_r$ sono indipendenti
Se proviamo che $v_{r+1}, \ldots, v_k \in \operatorname{span} \mathcal{B}$, allora
$\operatorname{span} \mathcal{B} \supset \{v_1, \ldots, v_k\}$ e quindi $\mathcal{B}$ genera V.

Ora ~~ogni~~ v_i $r+1 \leq i \leq k$ dipende linearmente da $v_1, \ldots, v_r$ perché $v_1, \ldots, v_r$ è un insieme massimale di vettori indipendenti

Quindi $v_i = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r \in \operatorname{span} \mathcal{B}$

$\square$

Esempi di basi

$(e_1, \ldots, e_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E_{ij} = matrice con 1 al posto ij e 0 altrove

$\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1q}, E_{21} \ldots E_{2q}, \ldots E_{p1} \ldots E_{pq}\}$

è una base di $M(p, q, \mathbb{R})$

Osservazione non c'è una sola base!! . Si può permutare ...

Teorema (del completamento). Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e $w_1, \ldots, w_k$ vettori indipendenti. Allora ci sono $n-k$ vettori della base che uniti a $w_1, \ldots, w_k$ formano una base.

prova: per induzione su k

- $k=1$. C'è solo $w_1 \neq 0$. $w_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ perché $(v_1 \ldots v_n)$ è una base di V

$w_1 \neq 0$ c'è un $a_i \neq 0$ che a meno di riordino si può supporre sia $a_1 \neq 0$, quindi posso ricavare v_1

$$v_1 = \frac{1}{a_1}\left(w_1 - a_2 v_2 - \ldots - a_n v_n\right)$$

quindi $v_1 \in \text{span}(w_1, v_2 \ldots v_n)$, quindi $\text{span}(w_1, v_2 \ldots v_n) \ni v_1, v_2, \ldots v_n)$ e quindi $\text{span}(w_1, v_2, \ldots, v_n) = V$

Dobbiamo solo provare che $w_1, v_2, \ldots, v_n$ sono indipendenti.

$b_1 w_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n = 0$ devo provare $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Sostituisco w_1 dalla sua espressione $w_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$

Mi viene

$$0 = b_1 a_1 v_1 + (b_1 a_2 + b_2) v_2 + \ldots + (b_1 a_n + b_n) v_n$$

$v_1 \ldots v_n$ sono indipendenti, tutti i coeff. devono essere 0. $b_1 a_1 = 0$ dato che $a_1 \neq 0$ implica $b_1 = 0$. quindi $b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n = 0$

$v_2, -, v_n$ sono anche loro indipendenti quindi $b_2 = \dots = b_n = 0$. Abbiamo provato $w_1 v_2 - v_n$ indipendenti $\Rightarrow$ sono una base di V.

passo induttivo: teorema vero per ogni $j < k$
Siano $w_1 - w_k$ indipendenti. Anche $w_1 - w_{k-1}$ sono indipendenti. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $(w_1 - w_{k-1} v_k - v_n)$ base di V (gli $n-(k-1)$ vettori che completano possiamo supporli gli ultimi).

Quindi $w_k = a_1 w_1 + \cdot + a_{k-1} w_{k-1} + a_k v_k + \cdot + a_n v_n$ e poiché $w_k \neq 0$ c'è almeno un $a_i \neq 0$.
Però poiché w_k è indipendente da $w_1 - w_{k-1}$ e quindi $w_k \notin span(w_1 - w_{k-1})$ ci deve essere $a_i \neq 0$ con $i \geq k$.
Possiamo supporre $i = k$ (a meno di permutazioni). Quindi possiamo scrivere

$$v_k = \frac{1}{a_k}\left(w_k - a_1 w_1 - \dots - a_{k-1} w_{k-1} - a_{k+1} v_{k+1} - \dots - a_n v_n\right)$$

Da questo otteniamo come nel passo base

$\text{span}(w_1 - w_k, v_{k+1} - , v_n) = V$

Dobbiamo solo provare che sono indipendenti

Poniamo

$$b_1 w_1 + \cdots + b_k w_k + b_{k+1} v_{k+1} + \cdots + b_n v_n = 0$$

Dobbiamo provare che tutti i b_j sono 0. Sostituiamo w_k con la sua espressione

$$b_1 w_1 + - + b_{k-1} w_{k-1} + b_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i w_1 + \sum_{i=k}^{n} a_i v_i\right) + \cdots + b_n v_n = 0$$

ci viene una combinazione lineare dei vettori della base $(w_1 - w_{k-1}, v_k - v_n)$ che sono indipendenti. Vediamo chi sono i coefficienti

$$(b_k a_1 + b_1) \cdots , (b_k a_{k-1} + b_{k-1}), b_k a_k) \cdots (b_k a_n + b_n)$$

Ora $b_k a_k = 0 \implies b_k = 0$ perché $a_k \neq 0$

Se $b_k = 0$ la comb. lineare diventa

$$b_1 w_1 + \quad + b_{k-1} w_{k-1} + b_{k+1} v_{k+1} + \cdots + b_n v_n = 0$$

Ma questi vettori fanno parte di una base e quindi sono indipendenti per cui oltre a $b_k = 0$ troviamo anche $b_1 = \quad = b_{k-1} = b_{k+1} = \cdots = b_n = 0$

e quindi $(w_1, - , w_k, v_{k+1}, - , v_n)$ è una base di V

<u>Corollario</u> Tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

<u>prova</u> Siano $(v_1 - v_n)$ e $(w_1 - w_k)$ basi di V

Dobbiamo provare $n = k$. Per assurdo sia $k < n$

Allora il teorema del completamento permette di aggiungere ai vettori indipendenti $w_1 - w_k$ altri $n-k$ vettori indipendenti da loro. Ma essendo una base $\{w_1 - w_k\}$ è un insieme massimale di vettori indipendenti, ogni altro vettore è loro comb. lineare. CONTRADDIZIONE. Quindi $k \geq n$. Lo stesso argomento prova che non può essere $n < k$. Quindi $n = k$.

<u>Definizione</u> La dimensione $\dim V$ è il numero di elementi di una sua base.

Esempio $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim M(p,q,\mathbb{R}) = p \cdot q$

$\dim\{\text{sol. di } AX=0\} = q - \#\text{pivots di una scala di } A$

$\dim \mathbb{R}[t] = \infty$.

Corollario $\dim V = n \Rightarrow$ se n vettori sono indipendenti allora costituiscono una base di V.

Corollario Se $W \subset V$ è un sottospazio $\dim W \leq \dim V$ e se sono uguali $W = V$

prova. Sia B una base di W. È costituita da vettori indipendenti. Quindi il loro numero è minore o uguale a $\dim V$ = max numero di vettori indipendenti.

Se $\dim V = n$ e W ha una base di n elementi, questa base è una base di V.

Esempio nello spazio $M(2,2,\mathbb{R})$ completare a base i vettori indipendenti

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo la base $E_{11}, \cancel{E_{12}}, E_{21}, E_{22}$

E_{12} c'è già, mettiamoci E_{11}, E_{21} vediamo

se $I, E_{12}, E_{11}, E_{21}$ sono indipendenti

$$aI + bE_{12} + cE_{11} + dE_{21} =$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & b \\ d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = b = d = 0 \\ a + c = 0 + c = 0 \end{array}$$

O.K.

sono indipendenti. Quindi sono una base di $M(2,2,\mathbb{R})$ perché $M(2,2,\mathbb{R})$ ha dim. 2
Vediamo che E_{22} è loro comb. lineare

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I - E_{11}$$