Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di "V* è somma diretta *di A e di B": $V = A \oplus S$.*

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 2).

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & = 0 \end{cases}$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2, 1, 1)$ in tale base.

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base $1,\ z,\ z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1,\ z^2 + 1,\ z^3 - z^2,\ z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \dots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \dots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

Oss.

V sp. vetto. $\quad V_1, \dots, V_k$ sott. di V

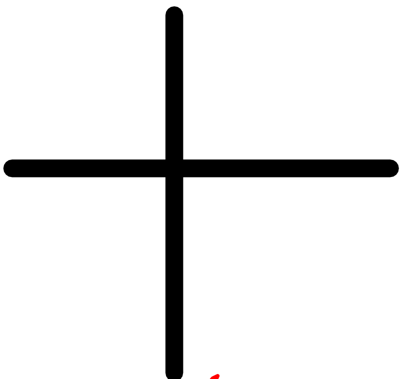
$V_1 \cup \dots \cup V_k$ in generale

NON È UN SOTTOSP.

e.g. $\quad V = \mathbb{R}^2$

$$V_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$V_2 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

$V_1 \cup V_2 =$ 

$(1,0) \in V_1 \quad (0,1) \in V_2$

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin V_1 \cup V_2$$

span $V_1 \cup V_2$ = sott. generato da $V_1 \cup V_2$ = combinazioni lineari di elementi di $V_1 \cup V_2$

$$v_1^1 \dots v_k^1 \in V_1$$

$$v_1^2 \dots v_h^2 \in V_2$$

$$\underbrace{\alpha_1^1 v_1^1 + \dots + \alpha_k^1 v_k^1}_{\in V_1 \text{ sp. vett.}} + \underbrace{\alpha_1^{(2)} v_1^2 + \dots \alpha_h^{(2)} v_h^2}_{\in V_2 \text{ s.v.}}$$

$$V_1 \qquad\qquad V_2$$

$$\subseteq V_1 + V_2 \subseteq \operatorname{span} V_1 \cup V_2$$

$$v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2 : \quad v_1 + v_2$$

$$\operatorname{span}(V_1 \cup \dots \cup V_k) = V_1 + V_2 + \dots + V_k$$

$$= \{ v \in V : \exists\, v_1 \in V_1 \dots v_k \in V_k \;\; v_1 + v_2 + \dots + v_k = v \}$$

A e $B \subseteq V$ sp. vett.

$$A \underset{V}{+} B = \{ v \in V : \exists a \in A \ \exists b \in B \ \ v = a \underset{V}{+} b \}$$

$r \in \mathbb{K}$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$r \underset{V}{\cdot} A = \{ v \in V : \exists a \in A \ \ v = r \underset{V}{\cdot} a \}$$

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:
a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \dots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \dots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\left\{t^n e^{at} : \ n \in \mathbf{N}, \ a \in \mathbf{C}\right\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

LO SPAZIO VETTORIALE AMBIENTE NEL CASO

$$\{ f : f \text{ funzione} , f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \} = V$$

$$(f +_V g)(x) \underset{\text{def.}}{=} f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

SOMMA IN $\mathbb{R}$

$$r \in \mathbb{R} \quad (r \cdot_V f)(x) = r \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

PRODOTTO IN $\mathbb{R}$

$$0_V(x) = 0_{\mathbb{R}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , (-_V f)(x) = - f(x)$$

in $\mathbb{R}$

$$\mathcal{P} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \forall x \ f(x) = f(-x) \}$$
$$= \{ f \in V : \forall x \ f(x) = f(-x) \}$$

$$\mathcal{D} = \{ f \in V : \forall x \ f(x) = - f(-x) \}$$

$\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ non è un sottospazio di V

NOTA

$0_V \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$

- oltre a 0_V e $x \mapsto x^2$

una funzione pari semplicissima

$x \mapsto 1 \quad f(x) = 1 \quad \forall x$

- una funzione dispari

molto semplice

$Id_{\mathbb{R}}(x) = x \quad \forall x$

$x \mapsto x \quad f(x) = x \quad \forall x$

$-(f(-x)) = -(-x) = x = f(x)$

$Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{D} \qquad 1_V \in \mathcal{P}$

$S(x) = (Id_{\mathbb{R}} +_V 1_V)(x)$

$= x + 1$

$-1 - x$

$\neq$

$S(-x) = 1 - x$

$\underset{x \neq 0}{\neq} x + 1 = S(x)$

Qual'è il sottospazio di V generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$

A)

1) $\mathcal{P}$ è un sottospazio vettoriale

$f(-x) = f(x)$

$g(-x) = g(x)$

$(f +_V g)(-x) \overset{def}{=}$

$= f(-x) + g(-x) =$

$= f(x) + g(x) \overset{def}{=} (f +_V g)(x)$

2) $\mathcal{D}$ è un sottospazio vett. di V

B)

$\text{span}\, \mathcal{P} \cup \mathcal{D} = \mathcal{P} + \mathcal{D} \overset{?}{=} V$

sottospazio vettoriale di V

$\varphi \in V$ qualsiasi

trovare $p \in \mathcal{P}$ e $d \in \mathcal{D}$

$\varphi = p + d$

$\varphi \in V$ qualsiasi

$$P_\varphi(x) \underset{def}{=} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$$

$$P_\varphi(-x) = \frac{\varphi(-x)+\varphi(-(-x))}{2} =$$

$$= \frac{\varphi(-x)+\varphi(x)}{2} = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$$

$$= P_\varphi(x)$$

$$D_\varphi(x) \underset{def}{=} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$$

$$D_\varphi(-x) = \frac{\varphi(-x)-\varphi(-(-x))}{2} =$$

$$= \frac{\varphi(-x)-\varphi(x)}{2} = -\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2} =$$

$$= -D_\varphi(x)$$

$$(P_\varphi +_V D_\varphi)(x) =$$

$$= P_\varphi(x) + D_\varphi(x) =$$

$$= \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2} =$$

$$= \frac{\varphi(x) + \cancel{\varphi(-x)} + \varphi(x) - \cancel{\varphi(-x)}}{2}$$

$$= \varphi(x)$$

$$P_\varphi +_V D_\varphi = \varphi$$

QUINDI

$$P + D = V \qquad (P \cap D = 0_V)$$

Definizione

Sia W uno spazio vett.

U e V sottospazi di W

se $U \cap V$ (che è sempre un sottospazio)

$U \cap V = (0_W)$

allora si indica

$U+V$ con $U \oplus V$

si dice che U e V sono in somma diretta

$V_{\text{FUNZION}} = P \oplus D$

Sottoesercizio

Se U e V sttosp. di W

sono in somma diretta

cioè $\underline{U \cap V} = (0_W)$

allora

esiste un unico

$\forall s \in U+V$

$\exists! \, u \in U, \; \exists! \, v \in V$

t.c.

$$s = u +_W v$$

$s = u + v \qquad u \in U \qquad v \in V$

$s = \tilde{u} + \tilde{v} \qquad \tilde{u} \in U \qquad \tilde{v} \in V$

$U \quad u + v = \tilde{u} + \tilde{v}$

$\Downarrow \quad u - \tilde{u} = \tilde{v} - v \in V$

V sottosp

quindi

$$U \ni u - \tilde{u} = \tilde{v} - v \in V$$

$$u - \tilde{u} \in U \cap V$$
$$\tilde{v} - v \in U \cap V$$

MA $\quad U \cap V = (0_W)$

QUINDI

$$u - \tilde{u} = 0_W$$
$$\tilde{v} - v = 0_W$$

$$u = \tilde{u}$$
$$\tilde{v} = v$$

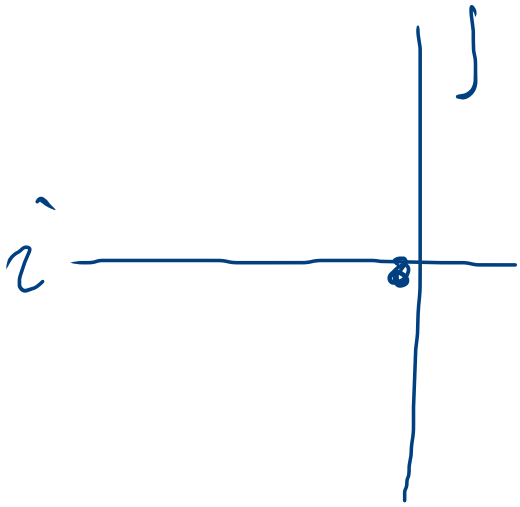
Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $M(n,n,\mathbb{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $S(n,\mathbb{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $A(n,\mathbb{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.

c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di* "V è somma diretta *di* A *e di* B": $V = A \oplus S$.

$$\mathcal{M}(n,n,\mathbb{K}) = \mathcal{M}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2\ 2)$$



$3 \quad m_{11} \qquad 2 \quad m_{12}$

$1 \quad m_{21} \qquad 4 \quad m_{22}$

NOTAZIONI

$$M = (m_{ij})_{\substack{i \le p \\ j \le q}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1q} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pq} \end{pmatrix}$$

$$M \in \mathcal{M}(p,q)$$

M con M_i^j intendo m_{ij} cioè la componente di i^a riga e j^a colonna

M_i intendo tutta la i^a riga

M^j " " la j^a colonna

è comodo per denotare sottomatrici

$$M^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_h} \in \mathcal{M}(h,k) \qquad M \quad p \times q$$

$$0 \le k \le q$$
$$0 \le h \le p$$

intendo la sottomatrice delle righe $i_1, \dots, i_h$ e delle colonne $j_1 \dots j_k$

$$M = \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad M^2_{13} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{\cancel{j_1 \dots j_k}}_{\cancel{i_1} \dots \cancel{i_h}} \qquad M^{\cancel{2}}_{1\cancel{3}} = (1 \;\; 1)$$

Matrice trasposta DEF

$M \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$

si definisce trasposta di M la matrice

$$T_i^j \underset{def}{=} M_j^i$$

SCAMBIO RIGHE CON COLONNE

$T \in \mathcal{M}(q, p)$

Si indica

$${}^tM \quad {}^TM \quad M^t \quad M^T$$

$$({}^tM)_i^j = M_j^i$$

PROPOSIZ.
M, N $p \times q$
$${}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$$

$${}^t\,{}^tM = M$$

%

Proposizione

1) $M \in \mathcal{M}(p,q) \Longrightarrow {}^t({}^tM) = M$

2) $M, N \in \mathcal{M}(p,q) \Longrightarrow {}^t(M +_{\mathcal{M}(p,q)} N) = {}^tM +_{\mathcal{M}(q,p)} {}^tN$

DIM 1) $\left[{}^t({}^tM)\right]^j_i = ({}^tM)^i_j = M^j_i$.

2) $$\left[{}^t(M +_{\mathcal{M}(p,q)} N)\right]^j_i = (M +_{\mathcal{M}(p,q)} N)^i_j =$$

$$= M^i_j + N^i_j = ({}^tM)^j_i + ({}^tN)^j_i =$$

$$= ({}^tM +_{\mathcal{M}(q,p)} {}^tN)^j_i$$

#

Matrici simmetriche DEF

$M \in \mathcal{M}(n,n)$

si dice simmetrica

se

$m_{ij} = m_{ji}$

$M^j_i = M^i_j$

cioè

$$M = {}^tM$$

sono "pari" rispetto alla diagonale dall'alto a sinistra in basso a destra

MATRICI ANTISIMMETRICHE. DEF

$M \in \mathcal{M}(n, n)$

si dice antisimmetrica

$$m_{ij} = -m_{ji}$$

$$M_i^j = -M_j^i$$

$$M = -{}^tM$$

Sono "dispari" rispetto alla stessa diagonale

m_{12} m_{14} m_{23} m_{21} m_{41}

M 4×4

Simm.

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 2 & 1/3 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1/3 & 6 & 0 & \pi \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 2 & 1/3 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1/3 & 6 & 0 & \pi \end{matrix}$$

arbitrari

$$M_i^j = -M_j^i$$

ANT.

se $i=j$ cioè nella diag c'è solo il numero 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Eserc. D2a

$\mathcal{S}$ le matrici $n \times n$ simmetriche

$\mathcal{A}$ le matr. $n \times n$ antisim

SONO SOTTOSPAZI di $\mathcal{M}(n,n)$

$$M, N \in \mathcal{S} \Rightarrow M+N \in \mathcal{S}$$

$$^t(M +_m N) = M +_m N$$

$$(M+N)^j_i = M^j_i + N^j_i$$

$$[^t(M+N)]^j_i = (M+N)^i_j = M^i_j + N^i_j \overset{\text{IPOTE}}{=}$$

$$= M^j_i + N^j_i = (M+N)^j_i$$

$\underline{M = {}^tM} \Longrightarrow {}^t(rM) =$

$= r\,{}^tM =$

$= rM$

$0_M \in S$

$M = -{}^tM \qquad N = -{}^tN$

IN GENERALE

$\boxed{\begin{gathered} {}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN \\ \left([{}^t(M+N)]_{ij} = (M+N)_{ji} = M_{ji} + N_{ji} = \right. \\ \left. = ({}^tM)_{ij} + ({}^tN)_{ij} = ({}^tM + {}^tN)_{ij} \right) \end{gathered}}$

$M+N \overset{\text{IPO}}{=} -{}^tM - {}^tN = -({}^tM + {}^tN)$

$= -\,{}^t(M+N)$

D2 b

$\mathrm{Span}_{M(n,n)}(\mathcal{A} \cup \mathcal{S}) = ?$

$\parallel$

$\mathcal{A} + \mathcal{S}$

M qualsiasi in $M(n,n)$

$\mathcal{S}(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ $\quad \mathcal{A}(M) = \dfrac{M - {}^tM}{2}$

${}^t({}^tM) = M$

${}^t\left(\dfrac{M + {}^tM}{2}\right) = \dfrac{{}^tM + M}{2}$

${}^t\left(\dfrac{M - {}^tM}{2}\right) = \dfrac{{}^tM - M}{2} = - \dfrac{M - {}^tM}{2}$

$$\frac{\cancel{{}^tM} + M}{2} + \frac{M - \cancel{{}^tM}}{2} = $$

$$= M$$

$$\forall M \in \mathcal{M}(n, n)$$

$$\exists S : S = {}^tS$$

$$\exists A \quad A = -{}^tA$$

$$M = S + A$$

$$S \cap \mathcal{A} = 0_m$$

$$M_i^j = M_i^j = -M_j^i$$

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.

b- Che dimensione hanno?

c- Che sottospazio genera $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$?

$\mathcal{M}(4,4)$

$\{M \in \mathcal{M}(4,4) : M_1^1 = M_2^2\} = \mathcal{A}$

$\{M \in \mathcal{M}(4,4) : M_3^3 = M_4^4\} = \mathcal{B}$

$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ * & a & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} * & & * & \\ & * & & \\ & & b & \\ & * & & b \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$

a) Sono sottosp. $(A+N)^i_j =_{def} A^i_j + N^i_j$

b) $\dim \mathcal{M}(4,4)$

$\begin{matrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ A & B & C & D \\ u & v & y & x \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b + \dots$

Base "canonica" di $M(4,4)$

$$a\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^{e^1}+b\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^{e^2}+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^{e^3},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\&&0&\end{pmatrix}^{e^4}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\&\dots&&\end{pmatrix}^{e^5}\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^{e^6}-\quad\times\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{e^{16}}$$

Sono $e^1_{\mathbb{R}^{16}} \dots \dots e^{16}_{\mathbb{R}^{16}}$ "RIPIEGATI PER RIGHE"

Base di A

$SPAN(e^2 e^3 e^4\ e^5 e^7 \dots e^{16}) =$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ * & & * \end{bmatrix} = M : M^1_1 = M^2_2 = 0 \right\}$$

$16 - 2$ matrici indipendenti $= 14$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = e_1 + e_6$$

quindi una base di A

è data

da

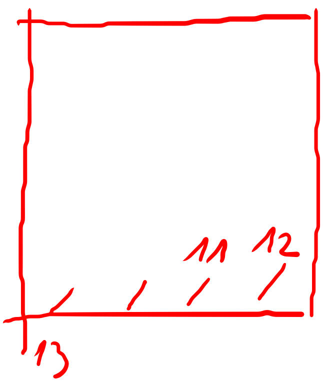
$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, \dots\dots e_{16}\}$

$\cup \{e_1 + e_6\}$

Base di B

$\{e_1, e_2, \dots\dots\dots e_{10}, e_{12}, \dots\dots e_{15}\}$

$\cup \{e_{11} + e_{16}\}$



$\dim = 15$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Notazione: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme, $v \in V$ e $k \in \mathbf{K}$:
$$\mathcal{A} + v = \{u \in V : \ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = \alpha + v\}, \quad r\mathcal{A} = \{u \in V : \ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = r\alpha\}.$$

Esercizio 1. (cfr. Domanda 1 del secondo foglio di esercizi)
Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ suoi sottospazi vettoriali. Si mostri

$$v \notin \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff (\mathcal{A} + v) \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di sottospazio generato. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto qualsiasi.
Il *sottospazio generato da* $\mathcal{A}$, indicato con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$, è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{A}$. (Si osservi che una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{A}$ in particolare è una somma finita di elementi di V).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto:

1. Si dimostri che in effetti $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ è un sottospazio vettoriale di V.
2. Provare che $\operatorname{span}(\mathcal{A}) = \bigcap\{W : W \text{ sottospazio di } V, W \supseteq \mathcal{A}\}$.
3. Provare che esiste il *piuù piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $\mathcal{A}$, nel senso seguente:

$$\text{se } W \text{ sottospazio di } V \text{ e } W \supseteq \mathcal{A} \text{ allora anche } W \supseteq U.$$

   e coincide con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di ortogonale in $\mathbf{R}^n$:
- prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ (cfr. primo foglio) : dati $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle u \cdot v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$;
- proprietà: $\langle u \cdot v \rangle = \langle v \cdot u \rangle$, $\langle u + rw \cdot v \rangle = \langle u \cdot v \rangle + r \langle w \cdot v \rangle$ se $r \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$;
- due vettori di $\mathbf{R}^n$ si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo;
- dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, si definisce l'ortogonale di $\mathcal{A}$ l'insieme dei vettori ortogonali agli elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \forall \alpha \in \mathcal{A} \ \langle v \cdot \alpha \rangle = 0\}.$$

Esercizio 3. a- Qulsiasi sia il sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^n$, il suo ortogonale $\mathcal{A}^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale.
b- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$, e si denotino i rispettivi ortogonali con $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ Si mostri:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$;
2. $\mathcal{A} = \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$;
3. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp \ = \ \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp \ = \ \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$.