Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n,n,\mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n,\mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n,\mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di "V* è somma diretta *di A e di B": $V = A \oplus S$.*

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\left\{\begin{array}{rrrrrl} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{array}\right.$ e di quello a $\left\{\begin{array}{rrrrrl} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{array}\right.$ (cfr. Esercizio ~~2~~3).

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rrrrrl} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & = 0 \end{array}\right.$$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1,2,3,4,5)$.

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2,1,1)$ in tale base.

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base $1,\ z,\ z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1,\ z^2 + 1,\ z^3 - z^2,\ z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \ldots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \ldots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

$A \cup B = A + B \iff A \subset B$ o $B \subset A$

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

$\iff$

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale
$\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & =0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & =0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & =0 \\ x & -y & +z & -u & +v & =0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio ~~2~~ 3

D4 V s. vett. A e B sottospazi

$A \cup B = \{x : \text{o } x \in A \text{ o anche } x \in B\}$

$A \cup B \supset A$ $A \cup B \supset B$

se in più $A \subset B$, $B \subset B \Rightarrow A \cup B \subset B$

A e B sts

$\mathrm{span}(A \cup B) \stackrel{\downarrow}{=} A + B$ $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$A \cup B$ è già un sottospazio

$A \cup B$ è già $= A + B \iff$ $A \subset B$ o $B \subset A$

$\Leftarrow$ ovvia . $A \overset{?}{\subset} B \iff A \cup B = B$

$\Rightarrow$) $A \cup B = A \overset{+}{\vee} B$ $*$

PRINCIPIO GENERALE SUGLI INSIEMI

$$X = Y \iff \forall z\,(z \in X \iff z \in Y)$$

X e Y hanno gli stessi elem.

$$A \subset B$$
$$\Downarrow$$
$$A \cup B \subset B$$

cioè gli elementi di $A \cup B$ sono el. di B

in generale
$$B \subset A \cup B$$

gli elementi di B sono elementi di $A \cup B$

se $A \subset B$

B ha gli stessi elementi di $A \cup B$

cioè

$$A \cup B = B$$

$\Rightarrow$ A e B sttp di V

per cui $A \cup B = \text{span}(A \cup B) = A + B$

IPOTESI

vogliamo provare che

o $A \subset B$ o $B \subset A$

TESI

o $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ o $\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$

IPOTESI

$A \cup B \subset A + B$ essendo A e B sottospazi

$x \in A \cup B$ $\quad x \in A$ o $x \in B$

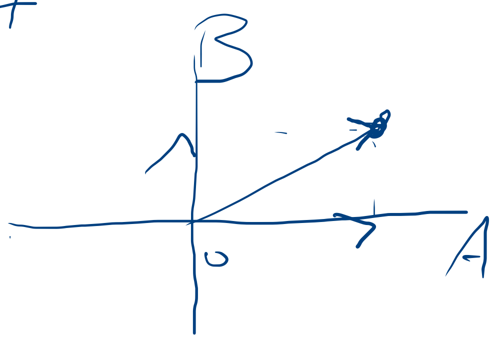
$x \in A \quad x = x + 0_V \quad 0_V \in B$

$x \in B \quad x = x + 0_V \quad 0_V \in A$

L'IPOTESI SI RIDUCE A

$A + B \subset A \cup B$

$a + b \in A \cup B$



Ragioniamo per assurdo

non(Tesi) e ipotesi arrivo

ad una contrad.

non($A\subset B$ o $B\subset A$) ~

$\underbrace{\text{non}(A\subset B)}$ e non($B\subset A$)

$\exists b\in B\setminus A$ e $\exists a\in A\setminus B$

$\exists b\in B$ e $b\notin A$ e $\exists a\in A$ e $a\notin B$

in particol.

$b\notin A$ e $a\notin B$

$a+b\in A+B \subset A\cup B$

quindi $a+b\in A\cup B$

$a+b\in A$ o $a+b\in B$

$\exists \alpha\in A$ $a+b=\alpha$ o $\exists \beta\in B$ $a+b=\beta$

$\exists \alpha\in A$ $b=\alpha-a$ o $\exists \beta\in B$ $a=\beta-b$

ipotesi A e B stsp

$b\in A$ o $a\in B$

$b\in A$ o $a\in B$

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a

1 $\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e di quello a 2 $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 3).

A = soluzi di 1 $\quad$ B = sol. di 2

- A e B sono sottosp.
  perchè le equazioni sono lineari
  (sol. di 1° grado = noto) e
  il termine noto è 0
- $A^\perp$ ortogonale di A =
  $= \{ v \in \mathbb{R}^5 ; \forall a \in A \, \langle a \cdot v \rangle_{\mathbb{R}^5} = 0_{\mathbb{R}} \}$

  $B^\perp$ idem

equazioni per $\text{span}(A^\perp \cup B^\perp)$

$= A^\perp + B^\perp$. per es 3.3 $= (A \cap B)^\perp$

$A^\perp B^\perp$ sono sottosp

Volendo evitare 3b3
si osserva l'inclusione locale

$$A^\perp + B^\perp \subseteq (A \cap B)^\perp$$

$$=$$

$$\dim (A \cap B)^\perp = 5 - \dim (A \cap B)$$

$\dim A \cap B$ è la dim delle sol.

Se ci fosse $=$ queste sarebbero le equazioni di $(A^\perp + B^\perp)^\perp$

$A \cap B$
$$\begin{cases} 3x + y - z - 2u - v = 0 \\ x - 2y + z - u + v = 0 \\ x + y + z + u + v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \end{cases}$$

$2 = \dim A^\perp = 5 - \overset{3}{\dim A}$

$2 = \dim B^\perp = 5 - \underset{3}{\dim B}$

$$\begin{cases} 3x + y - z - 2u - v = 0 \\ x - 2y + z - u + v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \end{cases}$$

$$\dim(A^{\perp}+B^{\perp}) \overset{?}{=} 4 \qquad \underline{\underline{\leq 4}}$$

$$\dim A^{\perp} = 2$$

$$\dim B^{\perp} = 2$$

$$A^{\perp}+B^{\perp} = \operatorname{span}(A^{\perp} \cup B^{\perp})$$

$$= \operatorname{span} \begin{array}{l} (3, 1, -1, -2, -1) \\ (1, -2, 1, -1, 1) \\ (1, 1, 1, 1, 1) \\ (1, -1, 1, -1, 1) \end{array}$$

Come faccio vedere che sono indipendenti

Basta che la matrice associata abbia ridotta a scala con 4 PIVOT

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & u & v \\ 3 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{GAUSS}]{} \begin{array}{ccccc} x & z & v & y & u \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

inoltre si deve

$$\dim(A^\perp + B^\perp) \le \dim(A\cap B)^\perp$$

$$\dim(A^\perp + B^\perp) = 4, \qquad \dim(A\cap B)^\perp \le 5$$

d'altronde se

$$\dim(A\cap B)^\perp = 5$$

$$\dim(A\cap B)^\perp = 5 - \dim A\cap B$$

varrebbe $\dim A\cap B = 0$

assurdo poiché $\dim A\cap B = 1$

$$\dim(A^\perp + B^\perp) = \dim(A\cap B)^\perp = 4$$

Quindi poiché

$$A^\perp + B^\perp \subseteq (A\cap B)^\perp$$

ma hanno
egual dimensione

$$A^\perp + B^\perp = (A\cap B)^\perp$$

per cui le equazioni
cercate sono solo un'equazione

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u + \varepsilon v = 0$$

con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ soluzioni non nulle

$$\begin{cases} 3x + y - z - 2u - v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \\ x + y + z + u + v = 0 \\ x - y + z - u + v = 0 \end{cases}$$

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, e_1+e_2, $e_1+e_2+e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2,1,1)$ in tale base.

$f_1 = e_1 \qquad f_2 = e_1 + e_2 \qquad f_3 = e_1 + e_2 + e_3$

$(1,0,0) \qquad (1,1,0) \qquad (1,1,1)$

a) numero di elementi di una base di uno sp. vett. non dipende dalla base

- basta mostrare che sono indipendenti

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

- oppure vediamo che generano

basta vedere che generano una base per esempio $e_1 \quad e_2 \quad e_3$

$f_1 = e_1 \qquad e_2 = f_2 - e_1 = f_2 - f_1$

$e_3 = f_3 - e_1 - e_2 = f_3 - \cancel{f_1} - f_2 + \cancel{f_1}$

base e $\qquad$ base f

$e_1 = f_1$ $\qquad (1\ 0\ 0) \rightsquigarrow (1\ 0\ 0)_f$

$e_2 = f_2 - f_1$ $\qquad (0,1,0) \rightsquigarrow (-1,1,0)_f$

$e_3 = f_3 - f_2$ $\qquad (0\ 0\ 1) \rightsquigarrow (0,-1,1)_f$

b)

$$(2,1,1) = 2e_1 + e_2 + e_3 =$$

$$= \underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{f_3} + \underbrace{e_1}_{f_1} =$$

$$= f_3 + f_1 \rightsquigarrow (1,0,1)_f$$

$$(2,1,1) = 2(1\ 0\ 0) + 1(0,1,0) + 1(0\ 0\ 1)$$

$$= 2e_1 + e_2 + e_3$$

$$= e_1 + e_1 + e_2 + e_3$$

$$= f_1 + f_3$$

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z-2$ che coordinate ha rispetto alla base $1, z, z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z-1, z^2+1, z^3-z^2, z^3-z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z-2$.

a) $x^n \qquad x - x^n$

$x^n + (x - x^n) = x$ che non ha grado esatt. n

Più semplicemente dato $n \in \mathbb{N}$ il polinomio nullo non ha grado

b) $\mathbb{C}[z] \qquad \mathbb{C}[z]_K$ polinomi di grado $\leq K$

$1, z, z^2, \dots, z^K, \dots$

una loro comb. lineare (coeff. in $\mathbb{C}$) è un polinomio e viceversa

(la funzione $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da un polinomio è nulla se e solo se il polinomio è nullo cioè i suoi coeff. son tutti nulli)

$\dim \mathbb{C}[z] = \infty$

- perché vi è un sistema di generatori infinito
- sono indipendenti per def. di polinomi

$z-2$ che coordinate ha
per la base $\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{z}, \underset{e_3}{z^2}, \underset{e_4}{z^3}$
dei polinomi di grado ≤ 3
$\mathbb{C}[z]_3$

$$z-2 = 1 \cdot e_2 - 2e_1$$

$$(-2, 1, 0, 0)$$

c) $z-1$, z^2+1, z^3-z^2, z^3-z
che sottospazio V di $\mathbb{C}[z]$
generano

SICURAMENTE $\dim V \leq 4$

$\mathbb{C}_n[z] \sim \mathbb{C}^{n+1}$

$1 \to (1, 0 \ldots 0)$
$z \to (0, 1, 0 \ldots 0)$
$\vdots$
$z^n \to (0 \ldots 0\ 1)$

in $\mathbb{C}^4$ $(-1, 1, 0, 0)$ $(1, 0, 1, 0)$ $(0, 0, -1, 1)$
$(0, -1, 0, 1)$ sono le coord dei nostri pol. nella base $1, z, z^2, z^3$ ...

$z-1 \qquad z^2+1 \qquad z^3-z^2 \qquad z^3-z$

$\;P_1 \qquad\quad P_2 \qquad\quad\; P_3 \qquad\quad P_4$

se generano $1, z, z^2, z^3$

generano $\mathbb{C}[z]_3$ e quindi

essendo 4 sono base (indipendenti)

$$P_1+P_4 = z^3-1 \qquad P_2+P_3-P_1-P_4 = 2$$

$$P_2+P_3 = z^3+1 \qquad \frac{P_2+P_3-P_1-P_4}{2} = 1$$

$$P_1+1 = z = \frac{1}{2}P_1 + \frac{P_3+P_2-P_4}{2}$$

$$P_4 - z = z^3$$

$$z^3 - P_3 = z^2$$

Coord. di $z-2 =$

$$= \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{1}{2}P_4 +$$

$$2\left(\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3 - \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_4\right)$$

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:
a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \ldots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \ldots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\left\{t^n e^{at} : \ n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{C}\right\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Notazione: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme, $v \in V$ e $k \in \mathbf{K}$:

$$\mathcal{A} + v = \{u \in V :\ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = \alpha + v\}, \quad r\mathcal{A} = \{u \in V :\ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = r\alpha\}.$$

Esercizio 1. (cfr. Domanda 1 del secondo foglio di esercizi)
Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ suoi sottospazi vettoriali. Si mostri

$$v \notin \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff (\mathcal{A} + v) \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di sottospazio generato. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto qualsiasi.
Il *sottospazio generato da* $\mathcal{A}$, indicato con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$, è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{A}$. (Si osservi che una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{A}$ in particolare è una somma finita di elementi di V).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto:

1. Si dimostri che in effetti $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ è un sottospazio vettoriale di V.
2. Provare che $\operatorname{span}(\mathcal{A}) = \bigcap\{W : \ W \text{ sottospazio di } V, W \supseteq \mathcal{A}\}$.
3. Provare che esiste il *piuù piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $\mathcal{A}$, nel senso seguente:

$$\text{se } W \text{ sottospazio di } V \text{ e } W \supseteq \mathcal{A} \text{ allora anche } W \supseteq U.$$

   e coincide con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di ortogonale in $\mathbf{R}^n$:
- prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ (cfr. primo foglio) : dati $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle u \cdot v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$;
- proprietà: $\langle u \cdot v\rangle = \langle v \cdot u\rangle$, $\langle u + rw \cdot v\rangle = \langle u \cdot v\rangle + r\langle w \cdot v\rangle$ se $r \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$;
- due vettori di $\mathbf{R}^n$ si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo;
- dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, si definisce l'ortogonale di $\mathcal{A}$ l'insieme dei vettori ortogonali agli elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \forall \alpha \in \mathcal{A}\ \langle v \cdot \alpha\rangle = 0\}.$$

infatti data $a_1 \dots a_k$

OK

$\dim A^\perp = n - \dim(\mathrm{span} A)$ base di $sp(A)$ è $A^\perp$ = soluz. del sist $\begin{cases} x \cdot a_1 = 0 \\ \vdots \\ x \cdot a_k = 0 \end{cases}$

Esercizio 3. ~~a-~~ Qulsiasi sia il sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^n$, il suo ortogonale $\mathcal{A}^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale.
b- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$, e si denotino i rispettivi ortogonali con $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ Si mostri:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$;
2. $\boxed{\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp}$;
3. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$.

OK
$\Longrightarrow$ $w \in B^\perp$ cioè $\forall b \in B$ $w \cdot b = 0$, se $a \in A$
$a \in B$ $w \cdot a = 0$ cioè $w \in A^\perp$
$\Longleftarrow$ oss. $\dim A^\perp = n - \dim \mathrm{span} A$
$\dim B^\perp \le \dim A^\perp$ cioè $n - \dim B \le n - \dim A$
$\dim A \le \dim B$

3 a $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n \quad A^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n ; \forall a \in A$
$\langle a \cdot v\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}}\}$ $\quad \langle 0_{\mathbb{R}^n} \cdot w\rangle\ 0 \quad 0_{\mathbb{R}^n} \in A^\perp$

$\langle (0\,0\,0\,0\,0) \cdot (w_1\, w_2\, w_3\, w_4\, w_5)\rangle = 0$

$v, w \in A^\perp \quad a \in A \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

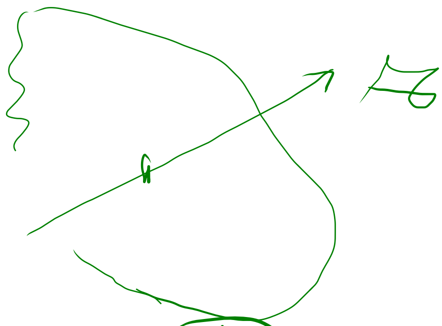
$\langle (\lambda v + \mu w) \cdot a\rangle = \lambda\langle v \cdot a\rangle + \mu\langle w \cdot a\rangle = 0_{\mathbb{R}}$

$\mathcal{B}^\perp \subset \mathcal{A}^\perp$ usando $\dim \mathcal{C}^\perp = n - \dim \mathcal{C}$

$\dim \mathcal{B} \geq \dim \mathcal{A}$

$\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$?

se $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{B}$



$b_1 \dots b_k$ base di $\mathcal{B}$ $\qquad h \leq k$

$a_1 \dots a_h$ base di $\mathcal{A}$

soluzioni del sistema

$$\begin{cases} b_1 \cdot v = 0 \\ \vdots \\ b_k \cdot v = 0 \end{cases}$$

sono sol. del sistema

$$\begin{cases} a_1 \cdot v = 0 \\ \vdots \\ a_h \cdot v = 0 \end{cases}$$

Facciamo prima $b.2$

G stop $\quad G = G^{\perp\perp}$.

$\dim G^{\perp} = n - \dim G$ quindi

$\dim G^{\perp\perp} = \dim G$

$G \subset G^{\perp\perp}$

$a \in G \quad \underline{\forall v} \in G^{\perp}$

$a \cdot v = 0 \implies a \in G^{\perp\perp}$

$G \subseteq G^{\perp\perp}$ ma hanno lo stesso dimensione

quindi sono uguali

Torniamo a b1 $\Leftarrow$

$$\mathcal{B}^{\perp} \subset \mathcal{A}^{\perp} \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$

sappiamo già

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}^{\perp} \subset \mathcal{A}^{\perp}$$

applicandolo

con $\mathcal{B}^{\perp}$ al posto di $\mathcal{A}$

e con $\mathcal{A}^{\perp}$ al posto di $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^{\perp} \subset \mathcal{A}^{\perp} \Longrightarrow \mathcal{A}^{\perp\perp} \subset \mathcal{B}^{\perp\perp}$$

usiamo b2

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\perp\perp} & \subset & \mathcal{B}^{\perp\perp} \\ \| & & \| \\ \mathcal{A} & \subset & \mathcal{B} \end{array}$$

6.3 $\quad \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ $\subset \mathcal{A}$

$$*\ (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$$

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$$

per esercizio

$$*\ \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp \subset (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp$$

$v \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}$ $\qquad v+w$

pe prendo $c \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$

$w \cdot b = 0 \quad \forall b \in \mathcal{B}$ $\qquad \langle (v+w)\cdot c\rangle =$

$$= \underbrace{\langle v\cdot c\rangle}_{0} + \underbrace{\langle w \cdot c\rangle}_{0} = 0$$

$$(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^\perp \overset{?}{\subset} \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$$

$\Updownarrow$ 1

$$(\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^\perp \subset (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})^{\perp\perp} \underset{2}{=} \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$$

$\mathcal{A}^\perp \subset \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$ per 1 vale $(\mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp)^\perp \subset \mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}$

$\mathcal{B}^\perp$ $\qquad\qquad \subset \mathcal{B}$ 2