Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Terzo foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 a- Mostrare che l'insieme $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ dato dalle funzioni reali di variabile reale pari $\mathcal{P}$ o dispari $\mathcal{D}$, non è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.
b- Qual'è il sottospazio generato da $\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$?

Domanda 2 a- Mostrare che i sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) =: V$ delle matrici reali $n \times n$, $\mathcal{S}(n, \mathbf{R}) =: S$ delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}(n, \mathbf{R}) =: A$ delle matrici antisimmetriche sono suoi sottaspazi vettoriali. b- Calcolare la dimensione di S e di A.
c-Mostrare che ogni per ogni $v \in V$ vi sono *unici* $a \in A$ e $b \in B$ per cui $v = a + b$:

è la *definizione di "*V è somma diretta *di* A *e di* B*":* $V = A \oplus S$.

Domanda 3 a- Si mostri che l'insieme $\mathcal{A}$ delle matrici 4×4 con i primi due elementi della diagonale uguali e l'insieme $\mathcal{B}$ delle matrici 4×4 con gli ultimi due elementi della diagonale uguali sono sottospazi vettoriali delle matrici 4×4.
b- Che dimensione hanno? c- Che sottospazio genera $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$?

Domanda 4 Dato uno spazio vettoriale V mostrare che l'unione $A \cup B$ di due suoi sottospazi A e B è a sua volta uno sottospazio se e solo se A e B sono uno sottospazio dell'altro. E per $A \cap B$?

Domanda 5 Si scrivano le equazioni del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dall'unione dell'ortogonale a $\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ e di quello a $\begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases}$ (cfr. Esercizio 2).

Domanda 6 Si considerino i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^5$ rispettivamente definiti da
$$\begin{cases} 3x & +y & -z & -2u & -v & = 0 \\ x & -2y & +z & -u & +v & = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ x & -y & +z & -u & +v & = 0 \\ x & +2y & +2z & +u & +v & = 0 \end{cases}$$
a- Si mostri che $\mathbf{R}^5 = A \oplus B$. b- Si calcoli la proiezione su $\mathcal{A}$ parallela a $\mathcal{B}$ del vettore $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Domanda 7 a- Denotati i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ con e_1, e_2, e_3 mostrare che e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ sono una base. b- Scrivere le coordinate di $(2, 1, 1)$ in tale base.

Domanda 8 a- Sia $n \in \mathbf{N}$, si mostri che i polinomi di grado (esattamente) n non sono un sottospazio vettoriale dei polinomi.
b- Il polinomio $z - 2$ che coordinate ha rispetto alla base $1,\ z,\ z^2, z^3$ dello spazio vettoriale $\mathbf{C}[z]_3$ dei polinomi di grado al più 3?
c- Quale sottospazio vettoriale generano i polinomi $z - 1,\ z^2 + 1,\ z^3 - z^2,\ z^3 - z$? Sono una base di $\mathbf{C}[z]_3$? Nel caso scrivere le relative coordinate di $z - 2$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \dots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbf{C}[z]$ per cui $\mathbf{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \dots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbf{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$.

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

Domanda 9 a- Dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici sono un sottospazio vettoriale $V_{a_1 \dots a_n}$ di $\mathbf{C}[z]$ di dimensione infinita.
b- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno esattamente come loro radici non sono un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.
c- Mostrare con un esempio che dati i numeri, diversi tra loro, $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, l'insieme dei polinomi che li hanno tra le loro radici semplici insieme al polinomio nullo non formano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}[z]$.

$\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{R}[x] / x^2 = -1 \quad \mathbb{R}[i] / i^2 = -1 \quad i^2 = -1$

$\underset{\underset{\mathrm{Re}\, z}{\shortparallel}}{a} + i b = z \qquad b = \mathrm{Im}\, z \qquad \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$

$\mathbb{C}[z] = \{ \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n : n \in \mathbb{N}, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \} \simeq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^n$

$z = x + iy \qquad \alpha_j = a_j + i b_j \qquad 0_{\mathbb{C}[z]}$

$p + q = \alpha_0 + \beta_0 + (\alpha_1 + \beta_1) z + \dots$

$\alpha_j z^j \quad \beta_j z^j \qquad p = \alpha_0 + \dots + \alpha_n z^n \quad q = \dots \beta_m z^m$

$\alpha p = \alpha \alpha_0 + \alpha \alpha_1 z \dots$

$$pq = \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{j+h=k} \alpha_j \beta_h \Big) z^k$$

Teo $p, q \in \mathbb{C}[z]$

$\deg p \geq \deg q$

1) $\exists\ d$ ed $r \in \mathbb{C}[z]$

2) $p = d\,q + r$

3) $\deg r \lneq \deg q$ $\ast$

4) d ed r sono gli unici che verificano

1 2 3

Ruffini $P(a) = 0$

$\deg r = 0$

$$P(z) = \overset{\deg = 1}{(z-a)}\, d(z) + \boxed{r(z)}$$

$$0 = P(a) = \cancel{(a-a)\, d(a)} + r$$

$$V_{a_1, \dots, a_n} = \{ p \in \mathbb{C}[z] : p(a_1) = \dots = p(a_n) = 0_{\mathbb{C}} \}$$

$a_h \neq a_k \quad h \neq k$

è un sottosp. vett. (su $\mathbb{C}$)

$0_{\mathbb{C}[z]} \in V_{a_1 \dots a_n}$

$p(a_h) = 0_{\mathbb{C}} \quad \forall h$

$q(a_h) = 0_{\mathbb{C}}$

$(p +_{\mathbb{C}[z]} q)(a_h) =$

$= p(a_h) +_{\mathbb{C}} q(a_h) = 0_{\mathbb{C}} +_{\mathbb{C}} 0_{\mathbb{C}}$

$(\alpha \cdot_{\mathbb{C}[z]} p)(a_h) = \alpha \cdot_{\mathbb{C}} p(a_h) = 0_{\mathbb{C}}$

$p(a_1) = 0 \iff p(z) = (z - a_1) q(z)$

$V_{a_1 \dots a_n} = \{$ Polinomi divisibili per $(z - a_1) \cdots (z - a_n) \}$

$= \{ p(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n) q(z) : q \in \mathbb{C}[z] \}$

$\{1, z, z^2, z^3, \ldots, z^m, \ldots\}$

sono per def indipendenti

Qual'è quindi una famiglia infinita di elementi di $V_{a_1 \ldots a_n}$ linearm. indip.?

$(z-a_1)\cdots(z-a_n) = \Pi(z)$

$P \in V_{a_1 \ldots a_n}$

$P = (z-a_1)\cdots(z-a_n)\, q$

$P = (z-a_1)\cdots(z-a_n)(\beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_m z^m)$

$= \beta_0 \Pi + \beta_1 \Pi \cdot z + \cdots + \beta_m \Pi z^m$

è una comb lineare su $\mathbb{C}$

$\Pi, \Pi \cdot z, \ldots, \Pi z^m, \ldots$

SONO UN INSIEME DI GENERATORI DI $V_{a_1 \ldots a_n}$

Proviamo che

$\Pi, \Pi \cdot z, \Pi z^2, \dots \Pi z^m \dots$

$$\left(\Pi = (z-a_1)\cdots(z-a_n)\right)$$

$$\underset{\mathbb{C}[z]}{0} = \beta_0 \Pi + \dots + \beta_m \Pi z^m =$$

$$= \Pi\left(\beta_0 + \dots \beta_m z^m\right)$$

$$= (z-a_1)\cdots(z-a_n)\left(\beta_0 + \dots \beta_m z^m\right)$$

$$b \neq a_1, \dots a_n$$

$$0_{\mathbb{C}} = \underset{\neq 0}{(b-a_1)}\cdots\underset{\neq 0}{(b-a_n)}\left(\beta_0 + \dots \beta_m b^m\right)$$

$\forall b \neq a_n$

$$0_{\mathbb{C}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 b + \dots \beta_m b^m}$$

$$\underline{\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_m z^m} = 0_{\mathbb{C}[z]}$$

$$q(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_m z^m$$

$$\forall b \neq a_1 \dots a_n$$

$$q(b) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$q(z) = (z-b)\, q_b(z)$$

$$\deg q = N$$

$b_1 \neq \dots \neq b_{N+1}$ ognuno diverso da $a_1 \dots a_m$

$$q(b_k) = 0 \quad \forall k$$

$$q(z) = \underbrace{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_{N+1})}_{\deg \geq N+1} \tilde{q}(z)$$

$\deg = N$

b) $a_h \neq a_k \quad h \neq k$

$\{ p \in \mathbb{C}[z] :$ che hanno esattamente queste radici $\} = A$

NON È UN SOTTOSPAZIO VETT. DI $\mathbb{C}[z]$.

$$0_{\mathbb{C}[z]} \notin A$$

$z \ , \ z^2 \qquad z - z^2$

$a_1 = 0$

$n = 1$

c) Eserc. $\quad a_h \neq a_k \quad h \neq k$

$\{ p : p(a_h) = 0 \ \forall h$ ma $p(z) \neq (z - a_h)^2 q(z) \ \forall q \} \cup \{ 0_{\mathbb{C}[z]} \}$ NON È STSP. VETT.

Domanda 10 Trovare W sottospazio di $\mathbb{C}[z]$ per cui $\mathbb{C}[z] = W \oplus V_{a_1 \dots a_n}$. Quindi un sottospazio vettoriale di dimensione infinita di $\mathbb{C}[z]$ che non sia del tipo $V_{a_1 \dots a_k}$.

$a_h \neq a_k \quad h \neq k$ trovare

W sottospazio di $\mathbb{C}[z]$

I) $W \cap V_{a_1 \dots a_n} = (0_{\mathbb{C}[z]})$

II) e $W + V_{a_1 \dots a_n} = \mathbb{C}[z]$

?

$V_{a_1 \dots a_n} = (z - a_1) \cdots (z - a_n) \cdot \mathbb{C}[z]$

$\overset{\cup}{P} = \underline{(z - a_1) \dots (z - a_n)}\, \overset{\cup}{q(z)}$

$Q \in \mathbb{C}[z] \qquad Q = \underset{\underset{V_{a_1 \dots a_n}}{\cap}}{P} + \underset{\underset{W}{\cap}}{S}\ ?$

$Q = (z - a_1) \cdots (z - a_n) d + b$

Se divido

Q generico per

$(z-a_1)\cdots(z-a_n)$

$$Q = (z-a_1)\cdots(z-a_n)\,d + r$$

d e r sono unici

con $\deg r < n$

$V_{a_1 \cdots a_n}$

è un sttsp vett.

$$W = \{ r : \deg r < n \}$$

poiché $p \in V_{a_1 \cdots a_n} \Rightarrow \deg P \geq n$ o $P = 0_{\mathbb{C}[z]}$

si ha $W \cap V_{a_1 \cdots a_n} = (0_{\mathbb{C}})$

$$\{ p \in \mathbb{C}[z] : \deg p \leq n \} = \mathbb{C}[z]_n \sim \mathbb{C}^{n+1}$$

$$\beta_0 \quad \beta_1 z \quad \ldots \quad \beta_n z^n$$

Si visto quindi

$$a_h \neq a_k \qquad h \neq k$$

$$\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z]_{n-1} \oplus V_{a_1 \ldots a_n}$$

$$D = \{ p \in \mathbb{C}[z] : \text{che hanno solo coefficienti non nulli per i monomi di grado dispari} \} =$$

$$= \mathrm{Span}\{ z, z^3, z^5, \ldots, z^{2n+1}, \ldots \}$$

Perché D non è del tipo $V_{a_1 \dots a_n}$?

$$P = \operatorname{span}\{1, z^2, \dots, z^{2n}, \dots\}$$

$$\mathbb{C}[z] = D \oplus P$$

$$D \cap P = (0_{\mathbb{C}[z]})$$

$$\mathbb{C}[z] = D + P$$

$$\dim D = \dim P = \infty$$

quindi P non è del tipo $V_{a_1 \dots a_n}$

Domanda 11 a- Trovare due funzioni $f(t)$, $g(t)$, $t \in \mathbf{R}$, reali di variabile reale che generino su $\mathbf{C}$ lo stesso sottospazio dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ generato da $e^{(1+i)t}$, $e^{(1-i)t}$.

b- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$, provare che $e^{rt}\sin(\omega t)$ e $e^{rt}\cos(\omega t)$ sono lineramente indipendenti come vettori dello spazio complesso delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:
a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \dots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t)$, $q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.
d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \dots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

Domanda 13 Si mostri che l'insieme di funzioni $\{t^n e^{at} : \ n \in \mathbf{N}, \ a \in \mathbf{C}\}$ è un sistema di funzioni linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

11.a

$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ $\qquad W = \{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \}$

TROVARE $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$W = V + iV$

$\varphi(t) = f(t) + i g(t)$

$\operatorname{SPAN}_{\mathbb{C}}(f, g) =$

$= \operatorname{SPAN}_{\mathbb{C}} \{ e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t} \}$

$\boxed{e^{a+ib} =: e^a(\cos b + i \sin b)}$

$= \operatorname{SPAN}_{\mathbb{C}} \{ e^t \cos t + i e^t \sin t, e^t \cos t - i e^t \sin t \} =$

$= \operatorname{SPAN}_{\mathbb{C}} \{ e^t \cos t, e^t \sin t \}$

$\omega \neq 0_{\mathbb{R}} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad r \in \mathbb{R}$

allora

$f(t) = e^{rt} \sin(\omega t)$ $\in V = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(t) = e^{rt} \cos(\omega t)$

$\forall t \quad 0_V(t) = 0_{\mathbb{R}}$

sono linearmente indipendenti?

se $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \gamma_1 \cdot_V f +_V \gamma_2 \cdot_V g = 0_V$

cosa vuol dire

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma_1 \cdot_{\mathbb{R}} f(t) +_{\mathbb{R}} \gamma_2 \cdot_{\mathbb{R}} g(t) = 0_{\mathbb{R}}$

2 incognite γ_1 e γ_2,
ed infinite equazioni
una per ogni t

$\gamma_1 e^{rt} \sin \omega t + \gamma_2 e^{rt} \cos \omega t = 0 \quad \forall t$

$\cancel{\gamma_1 \overset{0}{\sin 0}} + \gamma_2 \overset{1}{\cancel{\cos 0}} = 0 \quad \Rightarrow \gamma_2 = 0$ $\quad t = 0$

$\gamma_1 e^{r\frac{\pi}{2\omega}} = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0$ $\quad t = \frac{\pi}{2\omega}$

NON SI È USATO $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

QUINDI se $\omega \neq 0$

$e^{rt} \sin \omega t$ e $e^{rt} \cos \omega t$

SONO LIN. INDIP.

SU $\mathbb{C}$ cioè $W = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Domanda 12 Tenendo presente la notazione $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x + iy \in \mathbf{C}$:

a- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $e^{a_1 t}, \dots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

c- Si provi che dati due numeri diversi $a \neq b \in \mathbf{C}$ e due polinomi $p(t), q(t)$ non nulli a coefficienti complessi, le due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p(t)e^{at}$ ed $q(t)e^{bt}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

d- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbf{C}$, e polinomi $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{C}[t]$, $n \in \mathbf{N}$, e le n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ date da $p_1(t)e^{a_1 t}, \dots p_n(t)e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$.

<u>12a</u> $a \neq b \in \mathbb{C}$ $\quad e^{at}$ ed e^{bt} $t \in \mathbb{R}$

sono lin. indip. su $\mathbb{C}$ (in $\underline{\mathbb{R} \to \mathbb{C}}$)

$$e^{at} = e^{(\mathrm{Re}\, a)t}\left(\cos\left[(\mathrm{Im}\, a)t\right] + i \sin\left[(\mathrm{Im}\, a)t\right]\right)$$

$e^z = \exp(z)$. Cosa si vuole

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}: \underbrace{\alpha \cdot \exp[a \cdot]}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}} + \underbrace{\beta \exp[b \cdot]}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}} = \underbrace{0}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}$$

$\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \beta = 0$$

$$\underline{\forall t \in \mathbb{R}} \quad \underbrace{\alpha}_{\mathbb{C}} \exp[a \cdot t] +_{\mathbb{C}} \underbrace{\beta}_{\mathbb{C}} \exp[bt] = 0$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \alpha e^{at} + \beta e^{bt} = 0$$

$$\underline{\forall t \in \mathbb{R}} \quad \alpha e^{at} + \beta e^{bt} = 0$$

$e^t \neq 0$ molt. per e^{-at} $\longrightarrow (b \neq a)$

$$\underline{\forall t \in \mathbb{R}} \quad \alpha + \beta e^{\overset{c \neq 0}{(b-a)}t} = 0$$

2 "incognite" α e β

infinite equazioni una per ogni t

$t = 0$ la condizione è $\underline{\alpha + \beta = 0}$

NON POSSIAMO $t = \dfrac{1}{b-a}$! poichè t deve stare in $\mathbb{R}$

$$e^{ct} = e^{\mathrm{Re}\, c\, t} \cos(\mathrm{Im}\, c\, t) + i e^{\mathrm{Re}\, c\, t} \sin(\mathrm{Im}\, c \cdot t)$$

- $\underline{\mathrm{Im}\, c = 0}$, cioè $t \in \mathbb{R}$ $\quad t = \dfrac{1}{\mathrm{Re}\, c} = \dfrac{1}{c}$ la cond. diventa

$$\underline{\alpha + \beta e = 0}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta e = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

.. $\operatorname{Im} c \neq 0$

$$e^{ct} = e^{\operatorname{Re} c\, t} \cos(\operatorname{Im} c\, t) + i e^{(\operatorname{Re} c) t} \sin(\operatorname{Im} c\, t)$$

$$t = \frac{2\pi}{\operatorname{Im} c}$$

$$e^{ct} = e^{\frac{\operatorname{Re} c}{\operatorname{Im} c} 2\pi}$$ la condiz diventa

$$\alpha + \beta e^{\frac{\operatorname{Re} c}{\operatorname{Im} c} 2\pi} = 0$$

$$\frac{\operatorname{Re} c}{\operatorname{Im} c} 2\pi \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta e^{\operatorname{Re}/\operatorname{Im}\, 2\pi} = 0 \end{cases}$$

$\ldots \operatorname{Re} c = 0 \quad (\operatorname{Im} c \neq 0$

$$0 = \alpha + \beta\left(\cos(\operatorname{Im} c\, t) + i \sin(\operatorname{Im} c\, t)\right)$$

$$t = \frac{\pi}{\operatorname{Im} c}$$

$$0 = \alpha - \beta$$

$$\Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$0 = \alpha + \beta$$

b- Si provi che dati numeri diversi $a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, le n funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ date da $e^{a_1 t}, \dots e^{a_n t}$ sono linearmente indipendenti come vettori dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad a_h \neq a_k \quad h \neq k$

COSA SI VUOLE: se $\beta_1 \dots \beta_n \in \mathbb{C}$

$$\underbrace{\beta_1 \cdot \exp[a_1 \cdot]}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}} + \dots + \underbrace{\beta_n \exp[a_n \cdot]}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}} = \underbrace{0}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta_1 = \dots = \beta_n = 0_{\mathbb{C}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \beta_1 e^{a_1 t} + \dots + \beta_n e^{a_n t} = 0_{\mathbb{C}}$$

induzione su n

$n=1 \quad \beta_1 e^{a_1 t} = 0 \quad \forall t$

$e^{a_1 t} \neq 0 \qquad \beta_1 = 0$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}) = a e^{at}$$

dividiamo per $e^{a_1 t}$

$$\beta_1 + \beta_2 e^{(a_2-a_1)t} + \dots + \beta_n e^{(a_n-a_1)t} = 0 \quad \forall t$$

$$\beta_1 + \beta_2 e^{c_2 t} + \dots + \beta_n e^{c_n t} = 0 \quad \forall t$$

$$\beta_2 c_2 e^{c_2 t} + \dots + \beta_n c_n e^{c_n t} = 0 \quad \forall t$$

per ipot $c_k = a_k - a_1 \neq 0$

$n-1 \implies \beta_2 = \beta_3 = \dots \beta_n = 0$

QUINDI RIUSO LA COND. INIZIALE $\beta_1 = 0$ $\divideontimes$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi: esercizi formato esame

Notazione: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme, $v \in V$ e $k \in \mathbf{K}$:

$$\mathcal{A} + v = \{u \in V : \ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = \alpha + v\}, \quad r\mathcal{A} = \{u \in V : \ \exists \alpha \in \mathcal{A}\, u = r\alpha\}.$$

Esercizio 1. (cfr. Domanda 1 del secondo foglio di esercizi)
Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ suoi sottospazi vettoriali. Si mostri

$$v \notin \mathcal{A} + \mathcal{B} \iff (\mathcal{A} + v) \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di sottospazio generato. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto qualsiasi.
Il *sottospazio generato da* $\mathcal{A}$, indicato con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$, è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{A}$. (Si osservi che una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{A}$ in particolare è una somma finita di elementi di V).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale ed $\mathcal{A}$ un suo sottoinsieme non vuoto:

1. Si dimostri che in effetti $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ è un sottospazio vettoriale di V.
2. Provare che $\operatorname{span}(\mathcal{A}) = \bigcap\{W :\ W \text{ sottospazio di } V, W \supseteq \mathcal{A}\}$.
3. Provare che esiste il *piuù piccolo* sottospazio vettoriale di V che contiene $\mathcal{A}$, nel senso seguente:

$$\text{se } W \text{ sottospazio di } V \text{ e } W \supseteq \mathcal{A} \text{ allora anche } W \supseteq U.$$

   e coincide con $\operatorname{span}(\mathcal{A})$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Terzo foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Ricordiamo la definizione di ortogonale in $\mathbf{R}^n$:
- prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ (cfr. primo foglio) : dati $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle u \cdot v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$;
- proprietà: $\langle u \cdot v \rangle = \langle v \cdot u \rangle$, $\langle u + rw \cdot v \rangle = \langle u \cdot v \rangle + r \langle w \cdot v \rangle$ se $r \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$;
- due vettori di $\mathbf{R}^n$ si dicono ortogonali se hanno prodotto scalare nullo;
- dato $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^n$, si definisce l'ortogonale di $\mathcal{A}$ l'insieme dei vettori ortogonali agli elementi di $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^\perp = \{v \in \mathbf{R}^n : \forall \alpha \in \mathcal{A} \ \langle v \cdot \alpha \rangle = 0\}.$$

Esercizio 3. a- Qulsiasi sia il sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^n$, il suo ortogonale $\mathcal{A}^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale.
b- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$, e si denotino i rispettivi ortogonali con $\mathcal{A}^\perp$, $\mathcal{B}^\perp$ Si mostri:

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$;
2. $\mathcal{A} = \left(\mathcal{A}^\perp\right)^\perp$;
3. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp + \mathcal{B}^\perp$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp$.