Lezione 4-5 Novembre 2020

Esempio di applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Fissiamo $a \in \mathbb{R}^n$. Allora $x \longmapsto \langle a, x \rangle$ è lineare

Se $T: V \to W$ è lineare definiamo

rango di T $rk(T) = \dim \operatorname{Im} T$.

Teorema della dimensione

$T: V \to W$ lineare $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T + rk T = \dim V$

<u>prova</u> Sia $n = \dim V$ e $k = \dim \operatorname{Ker} T$.

Prendiamo una base $(v_1, -, v_k)$ di $\operatorname{Ker} T$ e completiamola a base di V $(v_1, -, v_k, v_{k+1} \cdots v_n)$

Allora $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(T(v_{k+1}) \cdots T(v_n))$. Se dimostriamo che $T(v_{k+1}), -, T(v_n)$ sono indipendenti abbiamo finito.

Prendiamo una comb. lineare di loro e imponiamo che dia $0 \in W$

$$a_{k+1} T(v_{k+1}) + \cdots + a_n T(v_n) = 0 \in W$$

Poiché T è lineare, il primo membro è

$$T(a_{k+1} v_{k+1}) + \cdots + T(a_n v_n) = T(a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n)$$

Dunque $T(a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n) = 0$, cioè

$a_{k+1} v_{k+1} + a_{k+2} v_{k+2} + \cdots + a_n v_n \in \operatorname{Ker} T$, per cui

$a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$.

Ma allora $b_1 v_1 + \dots + b_k v_k - (a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n) = 0$ ②

questo è una combinazione lineare della base di V che dà 0. Gli elementi di una base sono indipendenti, dunque tutti i coefficienti sono 0. Ma $a_{k+1}, \dots, a_n$ erano i coefficienti della comb. lineare di $T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)$ che sono quindi indipendenti □

Corollario: se $A \in M(p,q)$, r è il massimo numero di righe indipendenti e c è il massimo numero di colonne indipendenti, allora $r = c$.

Dim: Pensiamo A come appl. lineare $A: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$

Allora $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{span}(A^1, \dots, A^q)$, quindi $c = \dim \mathrm{Im}\, A$. Le righe di A danno le equazioni di $\mathrm{Ker}\, T = \{X \in \mathbb{R}^q : AX = 0\}$. Ma facendo Gauss lo span delle righe non cambia: ovviamente per lo scambio di righe. Le operazioni di sostituire A_i con $A_i + aA_j$ restano nello span. Inoltre $A_i \in \mathrm{span}(A_1, A_j, A_i + aA_j \dots A_p)$ perché $A_i = A_i + aA_j - aA_j$. Dunque $\mathrm{span}(A_1 \dots A_p)$ ha per base le righe (che cominciano con un pivot) della scala. Quindi $\dim \mathrm{span}(A_1 - A_p) = r =$ numero dei pivots della scala. Dunque

$\dim \ker A = q - r$ e da $q - r + c = q$ si ottiene

$r = c$.

<u>Osservazione</u> $T : V \to W$ lineare.

- T è iniettiva $\Leftrightarrow \ker T = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{rk} T = \dim V$
- T è suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{rk} T = \dim W$
- Se $\dim V = \dim W$ T è iniettiva $\Leftrightarrow$ è suriettiva.
- Se $\dim V = \dim W = n$ e T ha rango n allora T è biunivoca, quindi ha un'inverso T^{-1} e T^{-1} è lineare.

E' un utile esercizio convincersi della verità di tutti i punti dell'osservazione.

<u>Prodotto righe per colonne</u>.

Se $\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^s$ dove $A \in M(p,q)$, $B \in M(s,p)$ l'applicazione composta $B \circ A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ è anch'essa lineare, quindi deve essere data da una matrice C. Calcoliamola. Sappiamo che le colonne di C $C^1, \dots, C^q$ sono le immagini in $\mathbb{R}^s$ dei vettori $e_1, \dots, e_q$ che formano la base canonica di $\mathbb{R}^q$.

Allora prendiamo $e_1, -, e_q$

$A(e_1) = A^1, -, A(e_q) = A^q$

$$C(e_1) = B(A(e_1)) = a_{11} B^1 + a_{21} B^2 + \dots + a_{p1} B^p = C^1$$

Scriviamo questa prima colonna.

$$a_{11} b_{11} + a_{21} b_{12} + \dots + a_{p1} b_{1p} = \langle B_1, A^1 \rangle$$

$$a_{11} b_{21} + a_{21} b_{22} + \dots + a_{p1} b_{2p} \quad \langle B_2, A^1 \rangle$$

$$\vdots$$

$$a_{11} b_{s1} + a_{21} b_{s2} + \dots + a_{p1} b_{sp} = \langle B_s, A^1 \rangle$$

Dunque $C^1 = \begin{pmatrix} \langle B_1, A^1 \rangle \\ \langle B_2, A^1 \rangle \\ \vdots \\ \langle B_s, A^1 \rangle \end{pmatrix}$

e analogamente $C^2 = B(A(e_2)) = \begin{pmatrix} \langle B_1, A^2 \rangle \\ \vdots \\ \langle B_s, A^2 \rangle \end{pmatrix}$

$$\vdots$$

$$C^q = B(A(e_q)) = \begin{pmatrix} \langle B_1, A^q \rangle \\ \vdots \\ \langle B_s, A^q \rangle \end{pmatrix}$$

in altri termini $c_{ij} = \langle B_i, A^j \rangle$

Abbiamo definito il prodotto righe per colonne

$A \cdot B$ si può fare se la riga di A è lunga quanto la colonna di B. Cioè se $A \in M(p,q)$ le righe di ~~la~~ A hanno lunghezza q, le colonne di B devono essere lunghe q, per cui B deve avere q righe, cioè $B \in M(q,1)$

Quindi $B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^q$, $A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ e

quindi $AB = C : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Per esempio si può sempre fare $A \cdot A^T$ e $A^T \cdot A$

A^TA

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p$$

$A \cdot A^T$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 & 27 \\ 5 & 6 & 34 & 61 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ non si può fare.

Osservazione $(AB)^T = B^TA^T$ ($A^T \cdot B^T$ non si può fare

Quindi AA^T e A^TA sono simmetriche.

Se prendiamo matrici quadrate in $M(n,n)$ si possono sempre moltiplicare e viene ancora un elemento di $M(n,n)$.

Dunque in $M(n,n)$ c'è un prodotto "righe per colonne" $AB = C$ $c_{ij} = \langle A_i, B^j \rangle$

Questo prodotto è associativo, ma non commutativo. E' distributivo rispetto alla somma

$$A(B+C) = AB + AC$$

Ha un elemento neutro $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$I_n A = A I_n = A.$

Diremo che $A \in M(n,n)$ è invertibile se esiste B tale che $AB = BA = I_n$.

- se B esiste è unico. Se esistesse $B' \neq B$ con la stessa proprietà allora

$$B'AB = (B'A) \cdot B = I_n B = B \neq \cancel{\ }$$
$$= B'(AB) = B' I_n = B'$$

- Se A è invertibile chiamiamo l'inversa A^{-1}
- Notate che $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, ~~AB~~

inoltre A, B invertibili $\Rightarrow AB$ invertibile

e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ PROVARE PER CREDERE

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ quindi $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A^{-1}A = I$ trasponiamo

  $A^T \cdot (A^{-1})^T = I^T = I$. Dunque $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- $B^{-1} \cdot (A^{-1}A)B = B^{-1} I B = B^{-1}B = I$

  quindi $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Teorema Sono fatti equivalenti per $A \in M(n,n,\mathbb{R})$

1) ~~A~~ è invertibile, 2) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è invertibile
3) A è iniettiva 4) A è surgettiva
5) $rk\, A = n$ 6) le colonne di A sono indip.
7) le righe di A sono indipendenti
8) $AX = 0$ ha solo la soluzione nulla
9) Per ogni $b \in \mathbb{R}^n$, $AX = b$ ha una e una sola soluzione
10) Ogni scala di A ha n pivots

Dim facile.

Corollario: Se le righe di $A \in M(p,q)$ sono indipendenti il sottospazio $\ker A$ di $\mathbb{R}^q$ ha dimensione $q-p$.

Se A è invertibile, come si calcola $B = A^{-1}$?

Dobbiamo risolvere $AB = I$, questo è equivalente a risolvere gli n sistemi

$$AB^1 = I^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AB^2 = I^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots AB^n = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi sistemi (ciascuno di n equazioni e n incognite) hanno tutti la stessa matrice dei coefficienti e differenti termini noti.

Possiamo fare un Gauss simultaneo

$$A \; I \longrightarrow S \; C$$

(A si è ridotta a scala S, I è diventata C). S ha n pivots se A è invertibile. Possiamo fare Gauss all'indietro partendo dall'ultima riga che è $0 - 0 \; p_n$. Otteniamo $D \; C'$ dove D è diagonale e sulla diagonale ci sono i pivots. Dividiamo ogni riga per il suo pivot. Otteniamo

$$I \; B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

le prime due righe sono indipendenti

$(2, -1, 4) = a(1\ 0\ 1) + b(-1, 1, 1)$

voglio dire
$$\begin{aligned} 2 &= a - b \\ -1 &= b \\ 4 &= a + b \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} b &= -1 \\ a &= 2+1 = 3 \\ a+b &= -2 \neq 4 \end{aligned}$$

non ci sono soluzione $R_3 \notin \text{span}(R_1, R_2)$

Allora

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora Gauss all'indietro

$R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_3$

$R_1 \to R_1 - \frac{1}{4} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/4 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dividiamo per i pivots

$$B = \begin{pmatrix} 5/4 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Proviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/4 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo spazio $\mathcal{L}(V,W)$

$\mathcal{L}(V,W)$ è l'insieme delle $T: V \to W$ lineari

- $\mathcal{L}(V,W)$ è uno spazio vettoriale con
  - $+$ definito da $(S+T)(v) = S(v) + T(v)$
  - $\cdot$ definito da $(\alpha T)(v) = \alpha \cdot T(v)$.

  $S+T$ e αT sono lineari.
- che dimensione ha $\mathcal{L}(V,W)$?

Per ispirarci prendiamo $V = \mathbb{R}^q$, $W = \mathbb{R}^p$

Allora $\mathcal{L}(V,W) = M(p,q,\mathbb{R})$

$\dim M(p,q,\mathbb{R}) = p \cdot q$. Una base di $M(p,q,\mathbb{R})$ è data dalle matrici E_{ij} $i = 1,\dots,p$, $j = 1,\dots,q$ che hanno 1 nel posto ij e 0 altrove. Osserviamo che $E_{ij} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ porta $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ posto j

in $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ posto i e tutti gli altri in 0

per cui $E_{ij}(\mathbb{R}^q) = \mathrm{span}(e_i)$

e se $A \in M(p,q,\mathbb{R})$ $\quad A = \sum_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} a_{ij} E_{ij}$

$$Av = \sum a_{ij} E_{ij}(v) = \sum a_{ij} E_{ij}(x_1 e_1 + \quad + x_q e_q)$$

$$= \sum a_{ij} E_{ij}(x_j e_j) = \sum_{i,j} a_{ij} x_j e_i$$

Ad esempio se $q=3$ e $p=2$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad v = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$$\cancel{A(v) = x A(e_1) + y A(e_2) + z A(e_3) =}$$

$$\cancel{= x A^1 + y A^2 + z A^3 = x(a_{11}E_{11}}$$

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} +$$
$$+ a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + a_{23}E_{23}$$

$$v = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$\cancel{A(v)} = a_{11}E_{11}(v) = a_{11} x e_1 \qquad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) e_1$

$a_{12}E_{12}(v) = a_{12} y e_1$

$a_{13}E_{13}(v) = a_{13} z e_1 \qquad + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) e_2$

$a_{21}E_{21}(v) = a_{21} x e_2 \qquad = Av$

$a_{22}E_{22}(v) = a_{22} y e_2$

$a_{23}E_{23}(v) = a_{23} z e_2$

Ispirati da questo conto, potremo fissare una base di V $v_1, \dots, v_n$ e una base di W $w_1, \dots, w_k$

Dopo di che per $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, k$. Possiamo definire $T_{ij} : V \to W$

$$T_{ij}(v_j) = w_i \quad T_{ij}(v_h) = 0 \text{ per } h \neq j$$

Queste sono $n \cdot k$ applicazioni lineari.

Si tratta di provare

1. che $\mathcal{L}(V, W)$ è generato da queste $n \cdot k$ applicazioni lineari
2. Che queste applicazioni T_{ij} sono indipendenti

Si può fare. Ma troveremo un'altra prova.

Ultima osservazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$ Possiamo scrivere

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y \quad (\text{righe per colonne})$$

Ma allora $\langle Ax, y \rangle = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle$

Quindi se A è simmetrico $A = A^T$,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

e se A è antisimmetrico $A = -A^T$,

$$\langle Ax, y \rangle = -\langle x, Ay \rangle$$