Se $a_1, \dots, a_n$ son numeri complessi distinti

$$\mathbb{C}[z] = \Big((z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_n)\cdot\mathbb{C}[z]\Big) \oplus \mathbb{C}[z]_{n-1}$$

$\dim \mathbb{C}[z]_{n-1} = n < \infty$

$$V_{a_1 \dots a_n} \oplus \mathbb{C}[z]_{n-1}$$

Poiché

$$\mathbb{C}[z] = \underbrace{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}(1, z^2, \dots, z^{2n}, \dots)}_{\text{di dimensione infinita}} \oplus \underbrace{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}(z, z^3, \dots z^{2n+1}, \dots)}_{\text{di dimensione infinita}}$$

si ha che $\operatorname{span}(z, z^3, \dots, z^{2n+1}, \dots)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}[z]$ di dimensione infinita

e $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ distinti

$$\operatorname{span}(z, z^3, z^5 \dots) \neq V_{a_1 \dots a_n}$$

Questa conclusione necessita di una giustificazione data da

Proposizione U sottosp. vett. di V

se $V = U \oplus A$ (*)

$V = U + A$

$U \cap A = (0_V)$

$V = U \oplus B$ (**)

allora $\dim A = \dim B$

DIM. Se $\dim A = \dim B = \infty$ ok

. Altrimenti si suppone $\dim A = n < \infty$

e $\dim B \geq \dim A = n$.

Se fosse $\dim B \underset{\neq}{>} \dim A = n$

vi sarebbero $b_1, \dots, b_{n+1} \in B$

INDIPENDENTI.

Per (*) ogni $b_k = u_k + a_k$ $u_k \in U$, $a_k \in A$

Poiché $\dim A = n$ $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$

sono linearmente dipendenti

Vi sono quindi $n+1$ numeri
$\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti nulli
$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1} = 0_V$$
Quindi
$$B \ni \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1} =$$
$$= \lambda_1 (u_1 + a_1) + \dots + \lambda_{n+1}(u_{n+1} + a_{n+1}) =$$
$$= \lambda_1 u_1 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \lambda_{n+1} a_{n+1} =$$
$$= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1} =$$
$$= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1} + 0_V =$$
$$= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1} \in U$$
ma $U \cap B = (0_V)$ quindi
$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1} = 0_V$$
ma $b_1 \dots b_{n+1}$ sono <u>indipendenti</u>, quindi
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 Dato $\theta \in [0;+\infty)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x,y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0,0)$, del punto corrispondente al vettore (x,y).
b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?
c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

Domanda 2 Dato $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ si consideri la matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{S}(x,y) = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & + & y\sin\theta \\ x\sin\theta & - & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

Si mostri che essa descrive la riflessione, del punto corrispondente al vettore (x,y), rispetto alla retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di $\dfrac{\theta}{2}$ radianti.

Domanda 3 a- Si mostri che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari che conservano le distanze (*isometrie*), cioè: per ogni $u, v \in \mathbf{R}^2$ si abbia $||f(u) - f(v)|| = ||u - v||$, sono tutte e sole quelle la cui matrice associata $M \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$.
b- Si mostri che che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari iniettive che mantengono gli angoli (*conformi*), cioè: $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ si ha $\cos\left(\widehat{u0_{\mathbf{R}^2}v}\right) = \cos\left(\widehat{f(u)0_{\mathbf{R}^2}f(v)}\right)$, ovvero: $\dfrac{\langle f(u) \cdot f(v)\rangle}{||f(u)||\,||f(v)||} = \dfrac{\langle u \cdot v\rangle}{||u||\,||v||}$,

sono esattamente quelle la cui matrice associata è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e di rango massimo.
Il campo dei numeri complessi $\mathbf{C}$ è : sia uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbf{C}$ stesso, sia uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{R}$, di isomorfismo $\mathbf{R}$-lineare canonico con $\mathbf{R}^2$ dato da

$$c(x,y) = x + iy:$$

c- quali sono le matrici $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ a cui è associata una trasformazione $\mathbf{R}$-lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (\phi(x,y), \psi(x,y)) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, per cui $c_o f_o c^{-1} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sia $\mathbf{C}$-lineare (ovvero la moltiplicazione per un dato numero complesso) ?

Domanda 4 a- Si provi che le funzioni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ che sono isometrie e lasciano fisso $0_{\mathbf{R}^n}$, cioè $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, e $f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0_{\mathbf{R}^n}$,
sono tutte e sole quelle che conservano il prodotto scalare, cioè $\langle f(x) \cdot f(y)\rangle = \langle x \cdot y\rangle$, $x, y \in \mathbf{R}^n$.
Teorema: le isometrie di $\mathbf{R}^n$ in sé che lasciano fissa l'origine di $\mathbf{R}^n$ sono funzioni lineari:
b- si provi nel caso $n = 2$ il teorema, cioè:

le isometrie di $\mathbf{R}^2$ che lasciano fisso $(0,0)$ sono funzioni lineari.

Domanda 5 Le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tali che: 1) $f(tu) = tf(u)$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $u \in \mathbf{R}^2$, e

2) trasformano coppie di rette parallele distinte in coppie di rette parallele distinte

sono tutte e sole le trasformazioni lineari iniettive (si tenga presente la regola del parallelogramma).

Domanda 1 Dato $\theta \in [0;+\infty)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 2×2 e la trasformazione

$\vartheta \in [0, 2\pi)$

lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x,y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$. $= x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

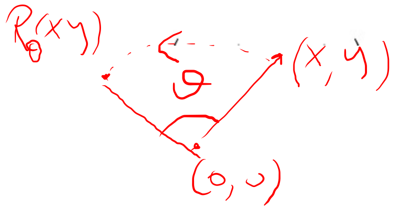
2×2 $\quad 2\times 1 \quad 2\times 1$

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0,0)$, del punto corrispondente al vettore (x,y).

b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$? CHI È L'INVERSA DI R_θ

c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

a) Convincersi



?

$\cos\theta = c_\theta \quad \sin\theta = s_\theta$

$(x,y) \qquad (x c_\theta - y s_\theta,\ x s_\theta + y c_\theta)$

$(0,1) \qquad (1,1) \qquad$ No NON SONO SULLA STESSA CIRC. CENT. $(0,0)$

$\mathrm{dist}((0,1),(0,0)) = \sqrt{1^2+0^2} = 1 \qquad \mathrm{dist}((1,1),(0,0)) = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^n}(\underline{x},\underline{y}) = |\underline{x}-\underline{y}|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle \underline{x}-\underline{y} ; \underline{x}-\underline{y} \rangle} =$

$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$

$$(\mathrm{dist}((xc-ys,\ xs+yc),(0,0)))^2 =$$

$$= \langle (xc-ys,\ xs+yc) ; (xc-ys,\ xs+yc) \rangle$$

$$= (xc-ys)^2 + (xs+yc)^2 =$$

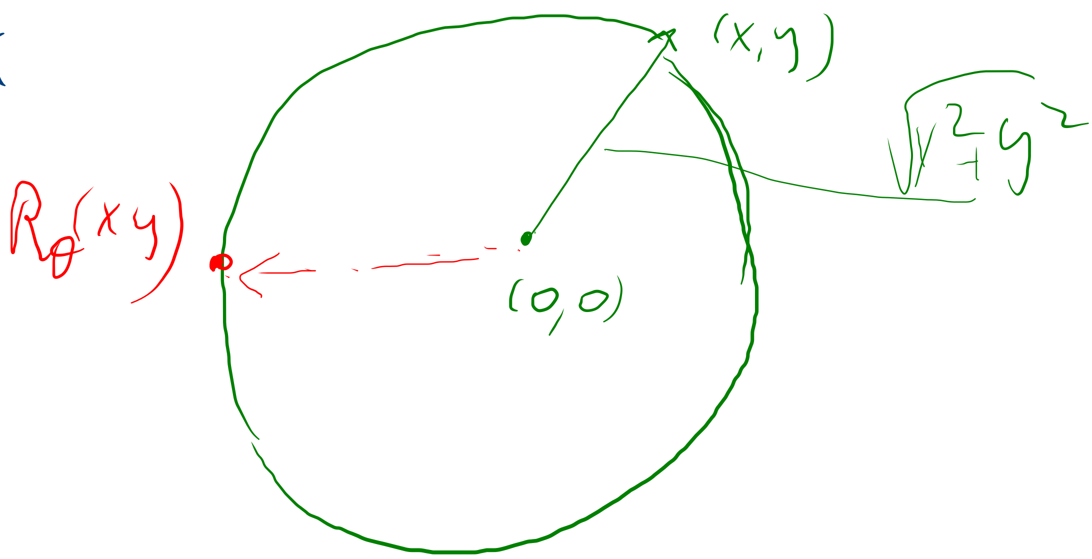
$$= x^2c^2 + y^2s^2 - \cancel{2xycs} + x^2s^2 + y^2c^2 + \cancel{2xycs} =$$

$$= x^2((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2) + y^2((\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2)$$

$$= x^2 + y^2 = \langle (x,y)\cdot(x,y) \rangle =$$

$$= (\mathrm{dist}((x,y);(0,0)))^2$$

$$0 \le \theta < 2\pi$$



cosa ci dà, usando le coordinate informazioni su (x y)(0,0)(a,b)?

$$\langle (a,b)\cdot(x,y)\rangle = \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\varphi$$

$$\| \quad ax+by$$

$$\cos\varphi = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}$$

Dobbiamo verificare che

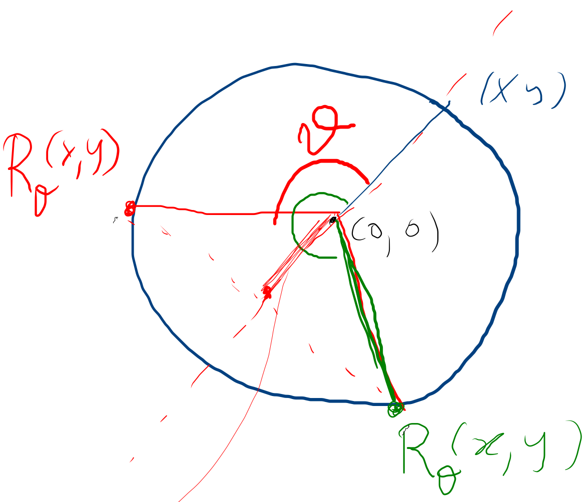
$$\frac{\langle (x,y) \cdot R_\theta(x,y)\rangle}{\underbrace{|(x,y)|^2_{\mathbb{R}^2} \cdot |R_\theta(x,y)|^2_{\mathbb{R}^2}}_{=}} =$$

non dipende da (x,y) ... anzi è proprio $\cos\theta$

$$= \frac{\langle (x,y) \cdot (x c_\theta - y s_\theta , x s_\theta + y c_\theta)\rangle}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2 c_\theta \cancel{- x y s_\theta} \cancel{+ y x s_\theta} + y^2 c_\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x^2+y^2}} c_\theta \cancel{(x^2+y^2)} = \cos\theta$$



$0 \leq \vartheta \leq \pi$

$\pi \leq \vartheta < 2\pi$

$\sqrt{x^2+y^2}\cos\vartheta$

ma allora
PRODOTTO
RIGHE PER
COLONNE

$$^T R_\vartheta \cdot R_\vartheta = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

c) chi è l'inversa di $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = R_\vartheta$

$0 < \vartheta < 2\pi$

$\vartheta \neq \frac{\pi}{2} K$

$\vartheta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

III) Nel caso $(R_\vartheta)^{-1} = {}^T R_\vartheta$

le colonne sono di stessa lunghezza e ORTOGONALI

I METODO) calcolo l'inversa algebricamente per esempio con Gauss

$(R_\vartheta)^{-1} = R_{-\vartheta}$

II METODO) $\begin{pmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) \\ \sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) \end{pmatrix}$

L'INVERSA DI UNA ROTAZ. ANTIORARIA DI ϑ È LA ROTAZIONE ORARIA DI ϑ

$$\begin{array}{ccccc} I & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 1 & 0 \\ II & \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 1 \end{array}$$

$\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \neq 0$

$\vartheta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

$0 \leq \vartheta < 2\pi$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}$$

$\frac{II}{I} - \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \cdot I \longrightarrow II$

$$\begin{array}{cccc} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\vartheta} & -\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 1 \\ \sin\vartheta & -\frac{\sin^2}{\cos} & \frac{\sin}{\cos} & 0 \\ \hline 0 & \cos + \frac{\sin^2}{\cos\vartheta} & -\frac{\sin}{\cos} & 1 \end{array}$$

$\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos\vartheta}$

$\frac{1}{\cos\vartheta}$

$A_{n \times n}$ invertibile cioè di rango n

$AX = Id$

$(AX)^i = AX^i = e_i$

$x_1^i A^1 + \dots + x_n^i A^n$

$I + II \sin\vartheta\cos\vartheta \longrightarrow I$

$$\begin{array}{cccc} \cos\vartheta & 0 & 1 - \sin^2 & \sin\cos \\ 0 & \frac{1}{\cos\vartheta} & -\frac{\sin}{\cos} & 1 \\ 1 & 0 & \cancel{\frac{\cos^2\vartheta}{\cos\vartheta}} & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & -\sin & \cos\vartheta \end{array}$$

$AX =$

$= A(X^1 | \dots | X^n)$

$= (AX^1 | \dots | AX^n)$

$AX =$

$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} A_1 X \\ A_2 X \\ \vdots \\ A_n X \end{pmatrix}$

Osservazione

A $n \times n$ invertibile
cioè di rango massimo n
cioè le colonne sono indipend.

$$(AX)^1 = \begin{pmatrix} A_1 \cdot X^1 \\ A_2 X^1 \\ \vdots \\ A_n \cdot X^1 \end{pmatrix}$$

Voglio trovare X sua inversa

$AX = Id_{n \times n}$ cioè per colonne $AX = A(X^1 | \cdots | X^n) = (AX^1 | \cdots | AX^n)$

$$(AX)^i = e_i \qquad AX^i = e_i$$

$$(AX)^i = AX^i$$

$$A \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = e_i$$

$$x_1^i A^1 + x_2^i A^2 + \cdots + x_n^i A^n$$

cioè

le coord. dell'iesima colonna dell'inverso rispetto alla base canonica sono

le coordinate di e_i rispetto alla base $A^1, \ldots, A^n$

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 X \\ \hline A_2 X \\ \vdots \\ \hline A_n X \end{pmatrix}$$

Esercizio per casa

dati $a, b : a^2+b^2 \neq 0$

dimostrare che la matrice è di rango 3

TROVARE L'INVERSA

DI

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E DI

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}$$

DARE INTERPRETAZIONI GEOMETRICHE.

Domanda 4 a- Si provi che le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che sono isometrie e lasciano fisso $0_{\mathbb{R}^n}$,

conservano le distanze

cioè $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, e $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$,

sono tutte e sole quelle che conservano il prodotto scalare, cioè $\langle f(x) \cdot f(y)\rangle = \langle x \cdot y\rangle$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema: le isometrie di $\mathbb{R}^n$ in sé che lasciano fissa l'origine di $\mathbb{R}^n$ sono funzioni lineari:

b- si provi nel caso $n = 2$ il teorema, cioè:

le isometrie di $\mathbb{R}^2$ che lasciano fisso $(0, 0)$ sono funzioni lineari.

$$\langle AA\rangle - \langle BA\rangle - \langle BA\rangle + \langle BB\rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle AA\rangle + \langle -BA\rangle + \langle A, -B\rangle + \langle -B \cdot -B\rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle A-B \cdot A\rangle + \langle A-B \cdot -B\rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle A-B \cdot A-B\rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle A \cdot A\rangle + \langle BB\rangle - 2\langle A \cdot B\rangle$$

$f(0) = 0$

a) $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$

si usa l'ipotesi

$\langle x \cdot x\rangle = \langle f(x) \cdot f(x)\rangle$ $y = 0$, $f(y) = 0$

$\langle y\,y\rangle = f(y) \cdot f(y)$ $x = 0$, $f(x) = 0$

$$|f(x) - f(y)|^2 = \langle f(x) - f(y) \cdot f(x) - f(y)\rangle$$
$$= \cancel{\langle f(x) \cdot f(x)\rangle} + \cancel{\langle f(y) \cdot f(y)\rangle} - 2\langle f(x) \cdot f(y)\rangle$$
$$\parallel$$
$$|x - y|^2 = \langle x - y \cdot x - y\rangle$$
$$= \cancel{\langle x \cdot x\rangle} + \cancel{\langle y\,y\rangle} - 2\langle x \cdot y\rangle$$
$$\Downarrow$$
$$\langle f(x) \cdot f(y)\rangle = \langle x \cdot y\rangle$$

Viceversa se $\langle f(x) \cdot f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

Voglio provare $|f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2$

$$|f(x) - f(y)|^2 = \langle f(x) \cdot f(x)\rangle + \langle f(y) \cdot f(y)\rangle - 2\langle f(x) \cdot f(y)\rangle$$
$$= \langle x \cdot x\rangle + \langle y\,y\rangle - 2\langle x \cdot y\rangle$$
$$= |x - y|^2$$

b) se $\mathrm{dist}(f(x), f(y)) = \mathrm{dist}(x, y)$

$$f(\underline{0}) = \underline{0}$$

$$\Downarrow$$

f è lineare

Vediamo l'additività:

voglio provare che

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ cioè

$f(x+y) - f(x) - f(y) = \underline{0}$ cioè

$\langle f(x+y) - f(x) - f(y) \cdot f(x+y) - f(x) - f(y) \rangle$

$= 0_{\mathbb{R}}$

$\hookrightarrow \langle f(x+y) \cdot f(x+y) \rangle + \langle f(x) \cdot f(x) \rangle + \langle f(y) \cdot f(y) \rangle$

$- 2\langle f(x+y) \cdot f(x) \rangle - 2\langle f(x+y) \cdot f(y) \rangle + 2\langle f(x) f(y) \rangle$

$= \cancel{\langle x+y \cdot x+y \rangle} + \cancel{\langle x \cdot x \rangle} + \cancel{\langle y \cdot y \rangle}$

$\cancel{\langle x \cdot x \rangle} + \cancel{\langle y \cdot y \rangle} + 2\langle x \cdot y \rangle + \cancel{\langle x \cdot x \rangle} + \cancel{\langle y \cdot y \rangle}$

$- 2\langle x+y \cdot x \rangle - 2\langle x+y \cdot y \rangle + 2\langle x \cdot y \rangle =$

$\cancel{-2\langle x \cdot x \rangle} - 2\langle y \cdot x \rangle - 2\langle x \cdot y \rangle \cancel{- 2\langle y \cdot y \rangle} + 2\langle x \cdot y \rangle$

$= 0$

Lo stesso per provare

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Domanda 6 a- Dati $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ e $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ si mostri che la funzione $f(x_1, \ldots, x_m) = \langle x \cdot a \rangle b$, da $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$, è lineare.
b- Si scriva la matrice, evidenziando colonne e righe, associata ad $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, denotata da $b \otimes a$.

c- Provare che la proiezione ortogonale su di un iperpiano, dato da $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$, è lineare.

d- Si scriva la matrice ad essa associata in termini dei coefficienti $(a_1, \ldots, a_n) =: a \neq 0_{\mathbf{R}^n}$.

e- Dato il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da $x + y + z + u = 0$ si mostri che la trasformazione di $\mathbf{R}^4$ in sé che che dà il simmetrico di (x, y, z, u) rispetto a tale sottospazio è lineare. Se ne scriva la matrice.

Domanda 7 (cfr. Berarducci Papini es. 4.3) Si consideri la trasformazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in sé che trasforma i vettori della base canonica rispettivamente in $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ e $(10, 14, 18)$.

a- Si mostri che $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$ sono indipendenti. Quali degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ son indipendenti da $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$?

b- Si calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine di tale trasformazione.

c- Si calcoli il trasformato di $(2, 2, 1)$.

Domanda 8 Si consideri la funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}[x]_3$, polinomi di grado minore eguale a 3, che su i vettori della base canonica vale nell'ordine rispettivamente $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x^2 + x$, $x - 2$.

a- Si determinino il nucleo e l'immagine di f.

b- Considerando su $\mathbf{R}[x]_3$ la base canonica $1,\ x,\ , x^2, x^3$ si scriva la matrice associata ad f.

c- Si trovino tutte le soluzioni $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4$ dell'equazione $f(v) = x^2 + x + 1$.

Domanda 9 Per quali valori dei parametri s, $t \in \mathbf{R}$ la funzione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z, u, v) = (xs + y + z + u + vt,\ x + ys + z - tu + v,\ x + y + zst + u + v)$$

a- è surgettiva?

b- l'immagine ha dimensione esattamente 2?

c- Se ne determini il nucleo nei vari casi.

Domanda 10 Si scriva la matrice associata alle seguenti funzioni lineari nelle basi rispettivamente specificate:

a- $T_c : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $c \in \mathbf{R}$, $(T(p))(x) = p(x + c)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

b- $D : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $(Dp)(x) = p'(x)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

Domanda 10 bis Si consideri la trasformazione lineare, da $\mathbf{R}^2$ in sé, data dalla rotazione in senso antiorario intorno all'origine di una angolo di $\frac{\pi}{4}$. Se ne scriva la matrice associata nella base $((1, 1), (2, 1))$.

Domanda 11 Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x\ +\ 2z &= 0 \end{cases}$, $2x + y + 3z = 0$. Quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $L(\pi) = \{\mathbf{0}\}$ ed $L(r) = \mathbf{R}(1, 1, 1)$?

Domanda 12 Si trovino tutte le applicazioni lineari da $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^3$ surgettive e con nucleo eguale a $\mathbf{R}(1, 1, 1, 1)$.

Domanda 13 Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi H e K di equazioni rispettivamente $x + y - z = 0$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

Domanda 6 a- Dati $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ e $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ si mostri che la funzione $f(x_1, \dots, x_m) = \langle x \cdot a \rangle b$, da $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$, è lineare.
b- Si scriva la matrice, evidenziando colonne e righe, associata ad $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, denotata da $b \otimes a$.

c- Provare che la proiezione ortogonale su di un iperpiano, dato da $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, è lineare.

d- Si scriva la matrice ad essa associata in termini dei coefficienti $(a_1, \dots, a_n) =: a \neq 0_{\mathbf{R}^n}$.

e- Dato il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da $x + y + z + u = 0$ si mostri che la trasformazione di $\mathbf{R}^4$ in sé che che dà il simmetrico di (x, y, z, u) rispetto a tale sottospazio è lineare. Se ne scriva la matrice.

a) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad f(x_1 \dots x_m) =$

$$\boxed{= \langle \underline{x} \cdot a \rangle_{\mathbb{R}^m} \cdot b}$$

PRIMO METODO PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCAL.

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m \quad \underbrace{\langle (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) \cdot a \rangle_m}_{f(\alpha x + \beta y)} b =$

$= \left(\alpha \langle x \cdot a \rangle_m + \beta \langle y \cdot a \rangle_m \right) b = \alpha \langle x \cdot a \rangle_m b + \beta \langle y \cdot a \rangle_m b$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

b) SECONDO METODO RICONOSCERE L'AZIONE DI UNA MATRICE

$$\underset{m \times m}{M} X = \langle X \cdot a \rangle_m b = \Big(\underset{1 \times m}{a} \underset{m \times 1}{X} \Big) \cdot \underset{m \times 1}{b}$$

TROVARE M_n

$x_1 M^1 + \dots + x_n M^n = \underset{n\times n}{M} X = \langle a \cdot x \rangle_{\mathbb{R}^n} b$

$\underline{a} = (1 \; \dots \; 1)$

$$= \left[(a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$M = (b | \dots | b)$

$$\begin{matrix} b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & b_2 & & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$$= (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

$M = (a_1 b | \dots | a_n b)$

$$= x_1 a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + x_2 a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \dots + x_n a_n \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a \\ \hline \vdots \\ \hline b_n a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & & a_n b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & \dots & a_n b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

DOMANDA

Che rango ha M?

dim span colonne è 0 o $\underline{1}$

$M_i^j = b_i \cdot a_j$

$M = b \otimes a$

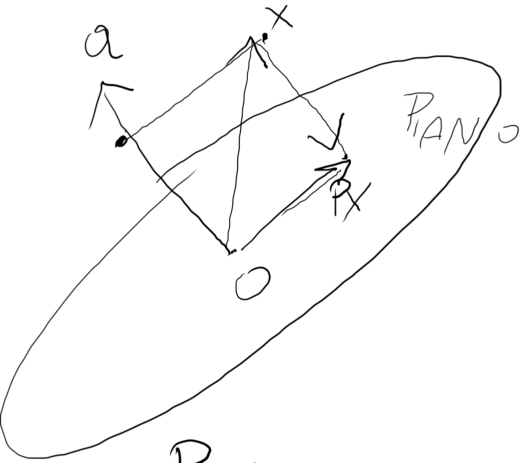
c, d) TROVARE LA MATRICE ASSOCIATA ALLA PROIEZIONE ORTOGONALE SUL PIANO $n-1$ DIMENSIONALE DATO DALL'EQUAZIONE

$\langle a \cdot X \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0_{\mathbb{R}}$

(ove $(a_1 \dots a_n) = a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$)

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$



Proiezione ortogonale di $\underline{X}$ su $\mathbb{R} \cdot \underline{a}$

$$\parallel$$

$$\left\langle X \cdot \frac{a}{|a|} \right\rangle \frac{a}{|a|}$$

$$PX = X - \left\langle X \cdot \frac{a}{|a|} \right\rangle \frac{a}{|a|} = \left[Id - \frac{(a_i a_j)}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \right] X$$

proiez. ortog. sul piano

proi. ort. sulla retta ortogonale al piano

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{a_i^2}{a_1^2 + \dots + a_n^2} & i = j \\ -\dfrac{a_i a_j}{a_1^2 + \dots + a_n^2} & i \neq j \end{cases}$$

$$Id - \frac{a \otimes a}{|a|^2}$$

a- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(H) = 0$ e $f(\mathbf{R}^3) = K$.

b- Dire se esiste $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$ dove f è una applicazione lineare verificante le ipotesi del punto precedente.

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$.

Domanda 14 Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Si consideri lo spazio H generato dai polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ e lo spazio K quello generato dai polinomi $1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4$.
a- Dopo aver identificato V con $\mathbf{R}^5$ tramite una base di V, scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H + K$.
b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

Domanda 15 Denotando con ${}^te_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, {}^te_n = (0, \ldots, 1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e data M matrice $n \times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti righe per colonne seguenti: $\begin{pmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_{i-1} \\ {}^te_i + \mu\, {}^te_j \\ {}^te_{i+1} \\ \vdots \\ {}^te_n \end{pmatrix} M$, $\qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ {}^te_j \\ \ldots \\ j^o\ {}^te_i \\ \vdots \end{pmatrix} M$?

Domanda 16 Costruire se possibile, nei vari casi, un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e scrivere la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:
a- $\phi : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, per cui se $rank A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(Id_{n\times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_I^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, base codominio 2;
b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \to \mathbf{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k-1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;
c- $\phi : U \to U$, $U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

Domanda 17 a1- (Forma canonica di Nord-Est) Sia $L : U \to V$ e lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$. Trovare le basi di U e V per cui la matrice associata ad L in tali basi sia $\begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
Chi è r?
a2- Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$, trovare le matrci invertibili $\Sigma \in \mathcal{M}(m, M)$, $S \in \mathcal{M}(n, n)$ per cui $\Sigma\, M S = \begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
a3- Due matrici M, $N \in m \times n$ hanno lo stesso rango se e solo se $N = \Sigma\, M\, S$ con Σ ed S invertibili.
b1- Sia $L : U \to V$ lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$, $r =: rango\, L < m, n$. Determinare due funzioni lineari $f : U \to U$, $g : V \to V$ di rango rispettivamente $n-r$ e d $m-r$ per cui $L{\circ}f(u) = 0_V = g{\circ}L(u)$ per ogni $u \in U$.
b-2 Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$ non invertibile, cioè di rango non massimo, mostrare che è un divisore destro e sinistro, rispetto al prodotto di matrici, della matrice nulla: vi sono due matrici non nulle $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $B \in \mathcal{M}(m, m)$ per cui $MA = 0_{\mathcal{M}(m,n)} = BM$.

Domanda 17 bis a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1}\, M\, S$) allora è *uguale* alla matrice identica.
b- Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

c-Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.
d- Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

Domanda 18 Sia $A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n\times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ la matrice $\lambda Id_{n\times n} - A$ è invertibile.

Domanda 19 a- Dato uno spazio vettoriale U, mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.
b- Si rammenti che data $A \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y\rangle = \langle x \cdot {}^tAy\rangle$ per ogni x, $y \in \mathbf{R}^n$:
Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ sono quelle per cui
$P^2 - P = O_{n\times n}$ e $P = {}^tP$.

Domanda 20 Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ data da $M_A(B) = AB = (AB^1|AB^2)$ ove B^1, B^2 son la prima e seconda colonna di B.
a- Si provi che M_A è lineare. b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A.

Domanda 21 Sia $D : \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ l'operatore lineare di derivazione sullo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale derivabili in ogni punto infinite volte. Con $D^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ si indichi quindi l'operatore di che associa alla funzione la funzione derivata k^a, se $k \neq 0$, 1, D stesso se $k = 1$, e l'identità I su $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ se $k = 0$
a- Dati r, $\omega \in \mathbf{R}$, non entrambi nulli, sia $T = T_{r,\omega}$ il sottospazio di $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ generato dalle funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$. Si mostri che D è bigettivo da T in sé.
b- Si determini la matrice associata a tale restrizione a T di D, considerando come base di T la coppia le funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$ (cfr. domanda 10 terzo foglio di esercizi).
c- Si considerino gli operatori lineari $D^2 + D + I$ e $D^2 + I$: si mostri che anch'essi operano su T, e si trovino le rispettive matrici associate alle loro restrizioni a T rispetto alla stessa base.
d- Si trovino le soluzioni del tipo $f(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$ delle equazioni $f'' + f' + f = \cos$, $f'' + f = \cos$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi: esercizi formato esame

Esercizio 1. (simile all'es. 5.7 in M.Abate) Si considerino:
- l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(3, 2, 1, 0)$, $(-1, 2, -3, 0)$, $(2, 4, -2, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$,
- l'applicazione lineare $S_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, $a \in \mathbf{R}$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(6, 4, 2, 0)$, $(a, 0, 4, a)$, $(0, 1, 2, 3)$.

1. a- Si calcolino le dimensioni delle immagini di T ed S_a.
2. b- Per quali valori del parametro a si ha $ImT = ImS_a$?
3. c- Si calcoli la dimensione dell'intersezione delle immagini di T ed S_a.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 2. (cfr. M.Abate proposizione 5.11) Data una matrice $n \times m$ reale $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$ provare che:

1. per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si ha $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot {}^tMy \rangle_{\mathbf{R}^m}$,
2. ponendo $codomM = dom^tM = \mathbf{R}^n$ e $domM = codom^tM = \mathbf{R}^m$
$$ImM \oplus Ker\,{}^tM = codomM,\; KerM \oplus Im\,{}^tM = domM.$$

Che dire del sottospazio, indicato con $(KerM)^\perp$, dato dai vettori ortogonali a tutti quelli di $KerM$?

Esercizio 2. Seconda versione (cfr. M.Abate proposizione 5.11)

1. - Dati due spazi vettoriali U e V su $\mathbf{K}$, mostrare che l'insieme delle funzioni $\mathbf{K}$-lineari da U a V è chiuso per le operazioni di somma puntuale $(\phi + \psi)(u) =: \phi(u) +_V \psi(u)$, $u \in U$, e prodotto per numero puntuale $(r\phi)(u) =: r \cdot_V \phi(u)$, $u \in U$, $r \in \mathbf{K}$.
   - Mostrare che l'insieme delle funzioni $\mathbf{K}$-lineari da U a V con tali operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, che si indica $\mathcal{L}(U, V)$.
2. Dimostrare che per ogni funzione lineare $\phi : \mathbf{R}^h \to \mathbf{R}$ esiste un unico $a_\phi \in \mathbf{R}^h$ per cui
$$\phi(x) = \langle x \cdot a \rangle_{\mathbf{R}^h}.$$
3. Indicando $\mathcal{L}(\mathbf{R}^h, \mathbf{R})$ con $(\mathbf{R}^h)'$, mostrare che la funzione $\mathcal{R} : (\mathbf{R}^h)' \to \mathbf{R}^h$ definita da $\mathcal{R}(\phi) = a_\phi$ è lineare e bigettiva.

   Data quindi un'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $domF = \mathbf{R}^m$, $codomF = \mathbf{R}^n$, si definisce l'applicazione lineare trasposta (relativamente ai prodotti scalari su dominio e codominio) la funzione ${}^tF$
$${}^tF : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \text{ tale che } \langle x \cdot {}^tFy \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle Fx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^m} \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}^m,\, y \in \mathbf{R}^n$$
4. Provare che ${}^tF$ è ben definita e lineare.
5. Provare che la funzione $\tau : \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $\tau(F) = {}^tF$ è lineare.
6. Provare che $ImF \oplus Ker\,{}^tF = codomF$, $KerF \oplus Im\,{}^tF = domF$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3. (E. Schlesinger Algebra Lineare e Geometria: capitolo 10 esercizio 101 pagina 231)
Date due matrici X $n \times k$ ed Y $k \times m$ si ricorda che $XY = (XY^1 | \dots | XY^m)$.
Sia $B \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ una matrice 2×2 che non sia multiplo dell'identità $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$.

1. Provare che $C : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$, $C(A) = AB - BA$ è lineare.
2. Se $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^2$ allora le matrici $e^i \otimes e^j$ (cfr. domanda 6b), $e^1 \otimes e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^1 \otimes e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^2 \otimes e^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^2 \otimes e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono, nell'ordine, una base dello spazio $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ delle matrici 2×2.
   Si calcolino $Be^i \otimes e^j$ ed $e^i \otimes e^j B$.
3. Si scriva la matrice 4×4 che rappresenta C nella base $e^i \otimes e^j$.
4. Si calcoli il rango di C.
5. Se ne deduca che $AB = BA \iff A \in span\{I, B\}$