Nome: **Matricola:**

ALGEBRA LINEARE

Primo compito a casa

Esercizio 1

Sia P il piano di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases}$

- Determinare una applicazione lineare, cioè una matrice $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Ker} A = P$ e $\operatorname{Im} A = P$.
- Dimostrare che $A^2 = AA = 0_{4\times 4}$.

Esercizio 2.

Si considerino in $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazioni $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_3 & = & 0 \end{cases}$, e il piano P di equazione $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$.

Determinare una matrice A a tre righe e tre colonne tale che $\operatorname{Ker} A = r$ e $\operatorname{Im} A = P$. Calcolare A^2 e A^3.

Esercizio 3.

Sia $\theta \in \mathbb{R}$ un numero che non sia multiplo intero di $\frac{\pi}{2}$ di modo che $\sin\theta$ e $\cos\theta$ siano entrambi diversi da 0. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calcolare A^{-1}.

Esercizio 4.

Siano A, B matrici tali che il prodotto AB sia definito (cioè le righe di A abbiano lo stesso numero di elementi che le colonne di B). Dimostrare che il rango di AB è minore o uguale sia del rango di A che del rango di B.

Esercizio 5.

Siano $x \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}^3$. Sia A una matrice a tre righe e 2 colonne e calcolare $< Ax, y >=< x, ? >$, verificando ad ogni passaggio che le operazioni sono lecite. Possiamo calcolare $< x, y >$?

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ triangolare superiore con gli elementi sulla diagonale tutti nulli. Dimostrare che $A^n = 0$. Fare eventualmente prima il caso $n = 3$.

Esercizio 6.

Sia A una matrice con p righe e q colonne. Provare che AA^T e $A^T A$ sono simmetriche ed hanno entrambe rango minore o uguale al rango di A. Se il rango di A è il minimo tra p e q, dimostrare che una delle due è invertibile e, se $p \neq q$, l'altra non è invertibile.

Esercizio 7.

Sia A una matrice $n \times n$ di rango r dove $0 < r < n$. Dimostrare che esistono matrici $n \times n$ B, C tali che $AB = 0_{n \times n}$ e $CA = 0_{n \times n}$.