Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi

Domande di introduzione

11 **Domanda 1** Dato $\theta \in [0; \cancel{+\infty}\ 2\pi)$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x,y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0,0)$, del punto corrispondente al vettore (x,y).
b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?
c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

Domanda 2 Dato $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ si consideri la matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{S}(x,y) = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & + & y\sin\theta \\ x\sin\theta & - & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

Si mostri che essa descrive la riflessione, del punto corrispondente al vettore (x,y), rispetto alla retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di $\dfrac{\theta}{2}$ radianti.

Domanda 3 a- Si mostri che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari che conservano le distanze (*isometrie*), cioè: per ogni $u, v \in \mathbf{R}^2$ si abbia $||f(u) - f(v)|| = ||u - v||$, sono tutte e sole quelle la cui matrice associata $M \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$.
b- Si mostri che che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari iniettive che mantengono gli angoli (*conformi*), cioè: $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ si ha $\cos\left(\widehat{u0_{\mathbf{R}^2}v}\right) = \cos\left(\widehat{f(u)0_{\mathbf{R}^2}f(v)}\right)$, ovvero: $\dfrac{\langle f(u)\cdot f(v)\rangle}{||f(u)||\,||f(v)||} = \dfrac{\langle u \cdot v\rangle}{||u||\,||v||}$,

sono esattamente quelle la cui matrice associata è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e di rango massimo.
Il campo dei numeri complessi $\mathbf{C}$ è : sia uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbf{C}$ stesso, sia uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{R}$, di isomorfismo $\mathbf{R}$-lineare canonico con $\mathbf{R}^2$ dato da

$$c(x,y) = x + iy:$$

c- quali sono le matrici $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ a cui è associata una trasformazione $\mathbf{R}$-lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (\phi(x,y), \psi(x,y)) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, per cui $c_o f_o c^{-1} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sia $\mathbf{C}$-lineare (ovvero la moltiplicazione per un dato numero complesso) ?

11 **Domanda 4** a- Si provi che le funzioni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ che sono isometrie e lasciano fisso $0_{\mathbf{R}^n}$, cioè $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, e $f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0_{\mathbf{R}^n}$,
sono tutte e sole quelle che conservano il prodotto scalare, cioè $\langle f(x)\cdot f(y)\rangle = \langle x \cdot y\rangle$, $x, y \in \mathbf{R}^n$.
Teorema: le isometrie di $\mathbf{R}^n$ in sé che lasciano fissa l'origine di $\mathbf{R}^n$ sono funzioni lineari:
b- si provi nel caso $n = 2$ il teorema, cioè:

le isometrie di $\mathbf{R}^2$ che lasciano fisso $(0,0)$ sono funzioni lineari.

Domanda 5 Le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tali che: 1) $f(tu) = tf(u)$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $u \in \mathbf{R}^2$, e

2) trasformano coppie di rette parallele distinte in coppie di rette parallele distinte

sono tutte e sole le trasformazioni lineari iniettive (si tenga presente la regola del parallelogramma).

NOTAZIONE

(Domanda 6 svolta l'11 novembre 20)

Dati $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, definita

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(\underline{X}) = \underline{b} \cdot \langle a \cdot X \rangle_{\mathbb{R}^n} = \underline{b}\,({}^t\underline{a}\,\underline{X}) =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1\, {}^t\underline{a} \\ \hline \vdots \\ \hline b_n\, {}^t\underline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\underline{b} a_1 \middle| \cdots \middle| \underline{b} a_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 a_1 & & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & b_i a_j & \vdots \\ b_n a_1 & & b_n a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La si denota con $b \otimes a$

Osservazione

Tutte e sole le matrici $n \times m$ di rango 1 sono del tipo $b \otimes a$

Esercizio

come sono fatte le matrici $n \times m$ di rango 1 ?

11 **Domanda 6** a- Dati $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ e $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ si mostri che la funzione $f(x_1, \ldots, x_m) = \langle x \cdot a \rangle b$, da $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$, è lineare.
b- Si scriva la matrice, evidenziando colonne e righe, associata ad $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, denotata da $b \otimes a$.

c- Provare che la proiezione ortogonale su di un iperpiano, dato da $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, è lineare.

d- Si scriva la matrice ad essa associata in termini dei coefficienti $(a_1, \ldots, a_n) =: a \neq 0_{\mathbf{R}^n}$.

e- Dato il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da $x + y + z + u = 0$ si mostri che la trasformazione di $\mathbf{R}^4$ in sé che che dà il simmetrico di (x, y, z, u) rispetto a tale sottospazio è lineare. Se ne scriva la matrice.

Domanda 7 (cfr. Berarducci Papini es. 4.3) Si consideri la trasformazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in sé che trasforma i vettori della base canonica rispettivamente in $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ e $(10, 14, 18)$.

a- Si mostri che $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$ sono indipendenti. Quali degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ son indipendenti da $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$?

b- Si calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine di tale trasformazione.

c- Si calcoli il trasformato di $(2, 2, 1)$.

Domanda 8 Si consideri la funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}[x]_3$, polinomi di grado minore eguale a 3, che su i vettori della base canonica vale nell'ordine rispettivamente $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x^2 + x$, $x - 2$.

a- Si determinino il nucleo e l'immagine di f.

b- Considerando su $\mathbf{R}[x]_3$ la base canonica $1,\ x,\ ,x^2, x^3$ si scriva la matrice associata ad f.

c- Si trovino tutte le soluzioni $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4$ dell'equazione $f(v) = x^2 + x + 1$.

Domanda 9 Per quali valori dei parametri $s, t \in \mathbf{R}$ la funzione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z, u, v) = (xs + y + z + u + vt,\ x + ys + z - tu + v,\ x + y + zst + u + v)$$

a- è surgettiva?

b- l'immagine ha dimensione esattamente 2?

c- Se ne determini il nucleo nei vari casi.

Domanda 10 Si scriva la matrice associata alle seguenti funzioni lineari nelle basi rispettivamente specificate:

a- $T_c : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $c \in \mathbf{R}$, $(T(p))(x) = p(x + c)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

b- $D : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $(Dp)(x) = p'(x)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

Domanda 10 bis Si consideri la trasformazione lineare, da $\mathbf{R}^2$ in sé, data dalla rotazione in senso antiorario intorno all'origine di una angolo di $\frac{\pi}{4}$. Se ne scriva la matrice associata nella base $((1, 1), (2, 1))$.

Domanda 11 Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x\ +\ 2z &= 0 \end{cases}$, $2x + y + 3z = 0$. Quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $L(\pi) = \{\mathbf{0}\}$ ed $L(r) = \mathbf{R}(1, 1, 1)$?

11 bis L : $\operatorname{Ker} L = r$ $\operatorname{Im} L = \pi$

Domanda 12 Si trovino tutte le applicazioni lineari da $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^3$ surgettive e con nucleo eguale a $\mathbf{R}(1, 1, 1, 1)$.

Domanda 13 Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi H e K di equazioni rispettivamente $x + y - z = 0$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

Domanda 7 (cfr. Berarducci Papini es. 4.3) Si consideri la trasformazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in sé che trasforma i vettori della base canonica rispettivamente in $(2,3,4)$, $(3,4,5)$ e $(10,14,18)$.

a- Si mostri che $f(1,0,0)$ ed $f(0,1,0)$ sono indipendenti. Quali degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ son indipendenti da $f(1,0,0)$ ed $f(0,1,0)$?

b- Si calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine di tale trasformazione.

c- Si calcoli il trasformato di $(2,2,1)$.

a) $f(100) = (234)$ $f(010) = (345)$

$f(001) = (10\ 14\ 18)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3I+2II} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & * \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

6 9 3 0 0

6 8 0 2 0

$$\begin{array}{lccccc} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3I-2II \to II & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2I-III \to III & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcc|c|cc} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ II-III & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cancel{-2} \; 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

b

$$f = \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{matrix}}_{\text{INDIPENDENTI}} \begin{matrix} 10 \\ 14 \\ 18 \end{matrix}$$

$\text{rango} f \geq 2$

NOTO

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} = \begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}.$$

$$2 \begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{matrix} = \begin{matrix} 10 \\ 14 \\ 18 \end{matrix} \qquad \text{rango} f = 2$$

$\dim \operatorname{Im} f = \text{rango} f = 2 \;\|\; \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 14 \\ 4 & 5 & 18 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f(2e_1 + 2e_2 + 1 \cdot e_3)$$

$$= 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3)$$

$$\begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{matrix} + \begin{matrix} 10 \\ 14 \\ 18 \end{matrix} = \begin{matrix} 20 \\ 28 \\ 22 \end{matrix}$$

Domanda 8 Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}[x]_3$, polinomi di grado minore eguale a 3, che su i vettori della base canonica vale nell'ordine rispettivamente x^2+1, x^2-1, x^2+x, $x-2$.

a- Si determinino il nucleo e l'immagine di f.

b- Considerando su $\mathbb{R}[x]_3$ la base canonica $1,\ x,\ ,x^2,x^3$ si scriva la matrice associata ad f.

c- Si trovino tutte le soluzioni $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4$ dell'equazione $f(v)=x^2+x+1$.

$$f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_3$$

$f(1000)=x^2+1$ $f(0100)=x^2-1$ $f(0010)=x^2+x$

$f(0001)=x-2$

$\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3$

a) METODO DIRETTO

$\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}[x]_2 \implies \text{rango} f \leq 3$

$$\underset{\mathbb{R}^4}{f(a\,b\,c\,d)} = f(ae_1+be_2+ce_3+de_4) =$$
$$= a\underbrace{f(e_1)}+b\underbrace{f(e_2)}+c\underbrace{f(e_3)}+d\underbrace{f(e_4)}$$

polinomi deg ≤ 2

? $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]_2$?

$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$

$\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}[x]_2 \quad \dim \operatorname{Im} f \leq 3$

$\dim \mathbb{R}[x]_2$

$U \subset V$

$\dim V =$

$= \dim U < \infty$

$\Downarrow$

$U = V$

$a + bx + cx^2$

$a \cdot 1 + bx + cx^2$

A) o trovo tre tra

$x^2+1,\ x^2-1,\ x^2+x,\ x-2$

che siano indipendenti

(per cui sarebbe

$\dim \operatorname{span}(f(e_1) \cdots f(e_4)) \geq 3$

B) oppure genero $1, x, x^2$

con $x^2+1,\ x^2-1,\ x^2+x,\ x-2$

ovvero $1, x, x^2 \in \operatorname{Im} f$)

A) $a(x^2-1) + b(x^2+x) + c(x-2) = 0_{\mathbb{R}[x]}$

$(a+b)x^2 + (b+c)x - a - 2c = 0_{\mathbb{R}[x]}$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+2c=0 \end{cases}$$

$a = -b = c$

$\to -3b = 0 \quad b = 0$

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}[X]_2$

$\mathrm{Ker}\, f$? $\quad \dim \mathrm{Ker}\, f = 1$

$$\dim \mathrm{Ker}\, f = \underset{4}{\dim \mathbb{R}^4} - \underset{3}{\dim \mathrm{Im}\, f}$$

METODO DIRETTO

$e_1 \to X^2+1 \quad e_2 \to x^2-1 \quad e_3 \to x^2+x \quad e_4 \to x-2$

$f(e_3) - f(e_1) = x^2+x-x^2-1 = x-1$

$$f(e_3) - f(e_1) - \left(\frac{f(e_1) - f(e_2)}{2}\right) =$$

$$= x-1 - \frac{\cancel{x^2}+1 - \cancel{x^2}+1}{2} = x-2 = f(e_4)$$

$$f\left(e_3 - e_1 - \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2} - e_4\right) = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, 1, -1\right) = 0_{D}$$

METODO DI COORDINATE

matrice associata ad f

dalla base canonica di $\mathbb{R}^4$

alla base $1, x, x^2, x^3$ di $\mathbb{R}[x]_3$

b)

$$\begin{array}{cccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left(M_f\right)^{\text{CANO}\,\mathbb{R}^4}_{1,x,x^2,x^3}$$

Ker f corrisponde alle soluz del sistema

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & u \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{I-II} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hookrightarrow 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$\longrightarrow z = -u$

$y = \frac{-z-2u}{2} = -\frac{u}{2}$

$x = -y-z = \frac{u}{2}+u = \frac{3}{2}u$

$v\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1\right)$

c)

$(*)\ f(v_1, v_2, v_3, v_4) = \underline{\underline{x^2+x+1}}$

$$\begin{cases} f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0_{\mathbb{R}[x]} \\ f(w_1, w_2, w_3, w_4) = x^2+x+1 \end{cases}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE

allora tutte le soluzioni v di $(*)$ sono

$$w + u = v$$

se v sol $(*)$ $f(v-w) = f(v) - f(w) = 0$

$v - w \in \operatorname{Ker} f$

$u = v - w$ $\qquad v - w + w = v$

Viceversa se $v \in \ker f$

$$f(\underline{v + w}) = f(v) + f(w) = 0_{\mathbb{R}[x]} + x^2 + x + 1 = x^2 + x + 1$$

Ci basta trovare una soluzione w

$$f(w) = x^2 + x + 1 \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ 0\ 0\right) = f\left(\frac{e_1 - e_2}{2}\right) = \frac{1}{2}f(e_1) - \frac{1}{2}f(e_2) = \frac{x^2+1}{2} - \frac{x^2-1}{2} = 1$$

$$w_1 f(e_1) + w_2 f(e_2) + w_3 f(e_3) + w_4 f(e_4) = x^2 + x + 1$$

$$f(e_3) = x^2 + x$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(2, -1, 0, 1)$

$$\begin{cases} x - y - 2u = 1 \\ z + u = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$z = 0$

$x - y = 3$

$u = 1$

$x + y = 1$

$$f\left(\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 1\ 0\right) = x^2 + x + 1$$

Domanda 11 Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+2z = 0 \end{cases}$ r

$\pi = (\text{span}(2,1,3))^{\perp}$

$2x+y+3z=0$. Quali sono le funzioni $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineari per cui $L(\pi)=\{0\}$ ed $L(r)=\mathbb{R}(1,1,1)$?

11.bis Determinare se esiste una $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$\operatorname{Ker} L = r$ $\quad \operatorname{Im} L = \pi$.

Calcolare nel caso L^2, L^3.

---

11 $\quad L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineari $L(\pi) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$,

$L(r) = \mathbb{R}(1,1,1)$

$\Downarrow$

$\pi \subseteq \operatorname{Ker} L$

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Ker} L \geq 2$

$r = \underset{v_1}{(-2,1,1)}\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Im} L \geq 1$

$\Rightarrow$ teo. dimensione

$3 \leq \dim \operatorname{Im} L + \dim \operatorname{Ker} L = 3$

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Im} L = 1$, $\dim \operatorname{Ker} L = 2$

$\operatorname{Im} L = \mathbb{R}(1,1,1) \quad \operatorname{Ker} L = \pi$

$r \subset \pi \quad \nexists\, L$ con tale proprietà

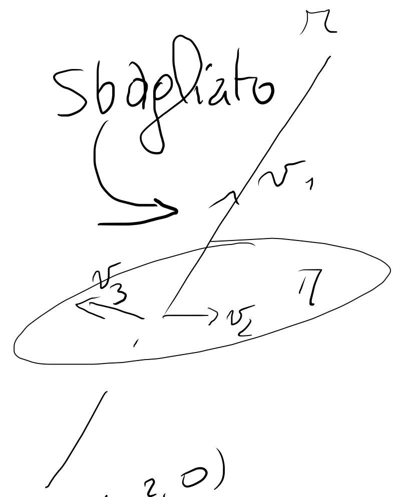
$r \subset \pi$

$-2, 1, 1$ è soluzione di

$2x+y+3z=0$

$-4+1+3=0$

Sbagliato



$v_2\ (1,-2,0)$ base di P

$v_3\ (0,-3,1)$

$L(-2,1,1) = \alpha(1,1,1)$

$\alpha \neq 0$

$L(1,-2,0) = 0$

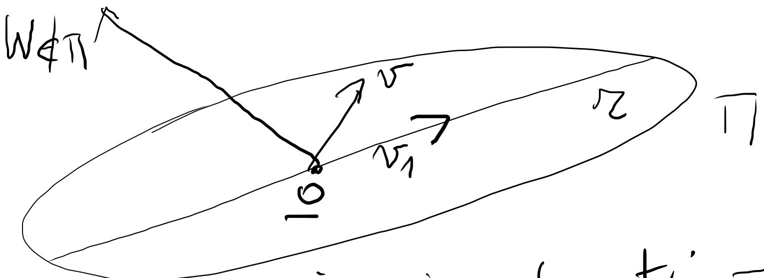
$L(0,-3,1) = 0$

bis Determinare

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$\operatorname{Im} L = \Pi$ * $\ker L = r$

$\Pi : 2x + y + 3z = 0$ $r = \mathbb{R}\underbrace{(-2,1,1)}_{v_1}$



v e v_1 indipendenti $\to$ base di Π

$w \notin \Pi$ v_1, v, w

sono una base di $\mathbb{R}^3$

$L(v_1) = \underline{0}$

$Lv = \mu v_1 + \lambda v$

$Lw = \alpha v_1 + \beta v$

per quali $\mu, \lambda, \alpha, \beta$ questo dato dà la funzione lineare richiesta

CASO PARTICOLARE

$L(v_1) = \underline{0}$

$L(v) = v_1$ *

$L(w) = v$

$F(v_1) = e_1$ $F(w) = e_3$

$F(v) = e_2$

F_B

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{v_1, v, w} & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}^3_{v_1, v, w} \\ \downarrow F_B & & \downarrow F_B \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$$L = F_B \, M \, F_B^{-1}$$

LA MATRICE ASSOCIATA A QUESTA L NELLA BASE $B(v_1, v, w)$ di $\mathbb{R}^3$ SIA COME DOMINIO CHE COME CODOMINIO

Prendiamo

$v_1 = (-2, 1, 1)$

$w = (0, 0, 1)$

$\mathcal{B} = (v_1, v, w)$

$v = v_2 = (1, -2, 0)$

$2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \neq 0$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{v_1, v, w} \arrow[r, "\cancel{L}\ M"] \arrow[d, "F^{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3_{v_1, v, w} \arrow[d, "F^{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{R}^3_{e_1 e_2 e_3} \arrow[r, "\cancel{M}\ L"'] & \mathbb{R}^3_{e_1 e_2 e_3}
\end{tikzcd}$$

$F^{\mathcal{B}}(v_1) = e_1$

$F^{\mathcal{B}}(v) = e_2$

$F^{\mathcal{B}}(w) = e_3$

$v_1 \longrightarrow 0$

$v \longrightarrow v_1$

$w \longrightarrow v$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}$$

coordinate in $\mathcal{B}$ — coordinate in $\mathcal{B}$

$$N^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha \\ \vdots \end{matrix}$$

coordinate in $\mathcal{B}$ — coord. base canoni

calcolare N^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$2II + I$

$2III + I$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$3III + II$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$3I + II$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$N M N^{-1}$$

$F_{\mathcal{B}}$ — $F_{\mathcal{B}}^{-1}$

$$\| \\ L$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^k = \left(N^{\cancel{-1}} M N^{-1}\right)^k =$$

$$= N^{\cancel{-1}} M N^{-1} \cdot N^{\cancel{-1}} M N^{-1} \cdot N^{\cancel{-1}} M N^{-1} \cdots$$

$$= N^{\cancel{-1}} M^k N^{-1}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = 0$$

$$L^2 = N^{\cancel{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N^{-1}$$

$$L^{3+k} = 0$$

$v_1 = (-2, 1, 1) \qquad v = (1, -2, 0)$

$w = (0\ 0\ 1)$

$v_1 \to \underline{0}$ $\qquad$ v indip. da v_1

span$(v, v_1) = \Pi$

$w \notin \Pi$

$L(v_1) = \underline{0}$

$L(v) = \mu v_1 + \lambda v$

$L(w) = \alpha v_1 + \beta v$

nel caso concreto si è scelto $\lambda = 0$, $\alpha = 0$, $\mu = 1$, $\beta = 1$

$$\mu v_1 + \lambda v = \overset{3 \times 2}{(v_1 | v)} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\alpha v_1 + \lambda v = (v_1 | v) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Desideriamo che $\mathrm{Im} L = \Pi$

$L|_{\mathrm{span}(v, w)}$ sia surjettiva su Π

$L(v)$ e $L(w)$ siano indipendenti

$\mu v_1 + \lambda v$ * (v, v_1 sono indip.)

$\alpha v_1 + \beta v$

voglio che sono indipendenti

$\iff (\mu, \lambda)$ e (α, β) sono indipendenti

cioè $\begin{pmatrix} \mu & \alpha \\ \lambda & \beta \end{pmatrix}$ ha rango 2

$$A(\mu v_1 + \lambda v) + B(\alpha v_1 + \beta v) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(A\mu + B\alpha) v_1 + (A\lambda + B\beta) v = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{cases} A\mu + B\alpha = 0 \\ A\lambda + B\beta = 0 \end{cases}$$

se rango $\begin{pmatrix} \mu & \alpha \\ \lambda & \beta \end{pmatrix} = 2$

$\implies A = B = 0$

$\text{span}(v_1\ v) = \Pi \qquad v_1\ v$ indip.

$w \notin \Pi$

$\mathcal{B} = (v_1\ v\ w)$

TUTTE LE APP. LINEARI L
PER CUI

$\ker L = \mathbb{R} v_1$

$\operatorname{Im} L = \Pi$

SONO:

$$L = F_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mu & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M} F_{\mathcal{B}}^{-1}$$

M associata ad L nella base $\mathcal{B}$ sul dominio e codominio

con

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mu & \alpha \\ \lambda & \beta \end{pmatrix} = 2$

$L^m = F M^m F^{-1}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\mu & \mu\beta \\ 0 & \lambda^2 & \lambda\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio

$$\boxed{L^m = \lambda^{m-2} L^2 \qquad m \geq 2}$$

a- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(H) = 0$ e $f(\mathbf{R}^3) = K$.

b- Dire se esiste $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$ dove f è una applicazione lineare verificante le ipotesi del punto precedente.

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$.

Domanda 14 Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Si consideri lo spazio H generato dai polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ e lo spazio K quello generato dai polinomi $1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4$.
a- Dopo aver identificato V con $\mathbf{R}^5$ tramite una base di V, scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H + K$.
b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

Domanda 15 Denotando con ${}^te_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, {}^te_n = (0, \dots, 1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e data M matrice $n \times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti righe per colonne seguenti: $\begin{pmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_{i-1} \\ {}^te_i + \mu\, {}^te_j \\ {}^te_{i+1} \\ \vdots \\ {}^te_n \end{pmatrix} M, \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ {}^te_j \\ \dots \\ j^o\ {}^te_i \\ \vdots \end{pmatrix} M?$

Domanda 16 Costruire se possibile, nei vari casi, un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e scrivere la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:
a- $\phi : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, per cui se $rank A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(Id_{n\times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_I^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, base codominio 2;
b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \to \mathbf{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \dots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \dots + x$, $1 \leq 2k-1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;
c- $\phi : U \to U$, $U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

Domanda 17 a1- (Forma canonica di Nord-Est) Sia $L : U \to V$ e lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$. Trovare le basi di U e V per cui la matrice associata ad L in tali basi sia $\begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
Chi è r?
a2- Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$, trovare le matrci invertibili $\Sigma \in \mathcal{M}(m, M)$, $S \in \mathcal{M}(n, n)$ per cui $\Sigma M S = \begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
a3- Due matrici M, $N \in m \times n$ hanno lo stesso rango se e solo se $N = \Sigma\, M\, S$ con Σ ed S invertibili.
b1- Sia $L : U \to V$ lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$, $r =: rango\, L < m, n$. Determinare due funzioni lineari $f : U \to U$, $g : V \to V$ di rango rispettivamente $n-r$ e d $m-r$ per cui $L_o f(u) = 0_V = g_o L(u)$ per ogni $u \in U$.
b-2 Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$ non invertibile, cioè di rango non massimo, mostrare che è un divisore destro e sinistro, rispetto al prodotto di matrici, della matrice nulla: vi sono due matrici non nulle $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $B \in \mathcal{M}(m, m)$ per cui $MA = 0_{\mathcal{M}(m,n)} = BM$.

Domanda 17 bis a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1}\, M\, S$) allora è *uguale* alla matrice identica.
b- Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

c-Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.
d- Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

Domanda 18 Sia $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n\times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ la matrice $\lambda Id_{n\times n} - A$ è invertibile.

Domanda 19 a- Dato uno spazio vettoriale U, mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.
b- Si rammenti che data $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y\rangle = \langle x \cdot {}^tAy\rangle$ per ogni x, $y \in \mathbf{R}^n$:
Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ sono quelle per cui $P^2 - P = O_{n\times n}$ e $P = {}^tP$.

Domanda 20 Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ data da $M_A(B) = AB = (AB^1|AB^2)$ ove B^1, B^2 son la prima e seconda colonna di B.
a- Si provi che M_A è lineare. b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A.

Domanda 21 Sia $D : \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ l'operatore lineare di derivazione sullo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale derivabili in ogni punto infinite volte. Con $D^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ si indichi quindi l'operatore di che associa alla funzione la funzione derivata k^a, se $k \neq 0$, 1, D stesso se $k = 1$, e l'identità I su $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ se $k = 0$
a- Dati r, $\omega \in \mathbf{R}$, non entrambi nulli, sia $T = T_{r,\omega}$ il sottospazio di $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ generato dalle funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$. Si mostri che D è bigettivo da T in sé.
b- Si determini la matrice associata a tale restrizione a T di D, considerando come base di T la coppia le funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$ (cfr. domanda 10 terzo foglio di esercizi).
c- Si considerino gli operatori lineari $D^2 + D + I$ e $D^2 + I$: si mostri che anch'essi operano su T, e si trovino le rispettive matrici associate alle loro restrizioni a T rispetto alla stessa base.
d- Si trovino le soluzioni del tipo $f(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$ delle equazioni $f'' + f' + f = \cos$, $f'' + f = \cos$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1. (simile all'es. 5.7 in M.Abate) Si considerino:
- l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(3, 2, 1, 0)$, $(-1, 2, -3, 0)$, $(2, 4, -2, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$,
- l'applicazione lineare $S_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, $a \in \mathbf{R}$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(6, 4, 2, 0)$, $(a, 0, 4, a)$, $(0, 1, 2, 3)$.

1. a- Si calcolino le dimensioni delle immagini di T ed S_a.
2. b- Per quali valori del parametro a si ha $ImT = ImS_a$?
3. c- Si calcoli la dimensione dell'intersezione delle immagini di T ed S_a.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi: esercizi formato esame

Esercizio 2. (cfr. M.Abate proposizione 5.11) Data una matrice $n \times m$ reale $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$ provare che:

1. per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si ha $\langle Mx \cdot y\rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot {}^tMy\rangle_{\mathbf{R}^m}$,
2. ponendo $codomM = dom^tM = \mathbf{R}^n$ e $domM = codom^tM = \mathbf{R}^m$
$$ImM \oplus Ker\,{}^tM = codomM,\ KerM \oplus Im\,{}^tM = domM.$$

Che dire del sottospazio, indicato con $(KerM)^{\perp}$, dato dai vettori ortogonali a tutti quelli di $KerM$?

Esercizio 2. Seconda versione (cfr. M.Abate proposizione 5.11)

1. - Dati due spazi vettoriali U e V su $\mathbf{K}$, mostrare che l'insieme delle funzioni $\mathbf{K}$-lineari da U a V è chiuso per le operazioni di somma puntuale $(\phi+\psi)(u) =: \phi(u) +_V \psi(u)$, $u \in U$, e prodotto per numero puntuale $(r\phi)(u) =: r \cdot_V \phi(u)$, $u \in U$, $r \in \mathbf{K}$.
   - Mostrare che l'insieme delle funzioni $\mathbf{K}$-lineari da U a V con tali operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, che si indica $\mathcal{L}(U, V)$.
2. Dimostrare che per ogni funzione lineare $\phi : \mathbf{R}^h \to \mathbf{R}$ esiste un unico $a_\phi \in \mathbf{R}^h$ per cui
$$\phi(x) = \langle x \cdot a\rangle_{\mathbf{R}^h}.$$
3. Indicando $\mathcal{L}(\mathbf{R}^h, \mathbf{R})$ con $(\mathbf{R}^h)'$, mostrare che la funzione $\mathcal{R} : (\mathbf{R}^h)' \to \mathbf{R}^h$ definita da $\mathcal{R}(\phi) = a_\phi$ è lineare e bigettiva.

   Data quindi un'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $domF = \mathbf{R}^m$, $codomF = \mathbf{R}^n$, si definisce l'applicazione lineare trasposta (relativamente ai prodotti scalari su dominio e codominio) la funzione ${}^tF$
$${}^tF : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \text{ tale che } \langle x \cdot {}^tFy\rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle Fx \cdot y\rangle_{\mathbf{R}^m} \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^n$$
4. Provare che ${}^tF$ è ben definita e lineare.
5. Provare che la funzione $\tau : \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $\tau(F) = {}^tF$ è lineare.
6. Provare che $ImF \oplus Ker\,{}^tF = codomF$, $KerF \oplus Im\,{}^tF = domF$

Esercizio 2. (cfr. M.Abate proposizione 5.11) Data una matrice $n \times m$ reale $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$ provare che:

1. per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si ha $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot {}^tMy \rangle_{\mathbf{R}^m}$,
2. ponendo $codom M = dom {}^tM = \mathbf{R}^n$ e $dom M = codom {}^tM = \mathbf{R}^m$

$$Im M \oplus Ker\, {}^tM = codom M,\ Ker M \oplus Im\, {}^tM = dom M.$$

Che dire del sottospazio, indicato con $(Ker M)^\perp$, dato dai vettori ortogonali a tutti quelli di $Ker M$?

NOTA $\langle Mx \cdot y \rangle_n = \langle x\, L y \rangle_m \Leftrightarrow L = {}^tM$

$Me_i^m \cdot e_j^n = M_{ij}$ ($j i$)

$e_i^m \cdot L e_j^n = L_{ij}$ (ji)

(1) $\underset{n \times m}{M} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad {}^tM : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\langle M \underset{\mathbb{R}^m}{\underline{x}} \cdot \underset{\mathbb{R}^n}{\underline{y}} \rangle_n$ ($Mx \in \mathbb{R}^n$) $\qquad \langle x \cdot {}^tMy \rangle_m$

$$\langle a \cdot b \rangle_{\mathbb{R}^k} = \overset{1\times k}{{}^ta} \cdot \overset{k \times 1}{b} \quad \text{righe x colonn} \quad *$$

$$= {}^t(M\underline{x}) \cdot \underline{y}$$

$$= \left(\overset{1\times m}{{}^t\underline{x}}\, \overset{m \times n}{{}^tM}\right) \cdot \overset{n\times 1}{y}$$

$$= {}^tx\,({}^tMy) \overset{*}{=} \langle x \cdot {}^tMy \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$${}^t(\underset{h\times l}{A} \cdot \underset{l\times k}{B}) = \underset{k\times l}{{}^tB} \cdot \underset{l\times h}{{}^tA}$$

$h \times k \qquad \to k \times h$

associatività prodotto

$$\langle Mx \cdot y \rangle_n = \sum_{i=1}^{n} (Mx)_i\, y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_i^j x_j y_i$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_i^j x_j y_i = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{m} M_i^j y_i = \sum^{m} x_j ({}^tMy)_j = \langle x \cdot {}^tMy \rangle_m$$

2 $M_{n\times m}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\quad {}^tM_{m\times n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$* \quad \operatorname{Im} M \oplus \operatorname{Ker} {}^tM = \mathbb{R}^n$$

$$** \quad \operatorname{Ker} M \oplus \operatorname{Im} {}^tM = \mathbb{R}^m$$

${}^{tt}M = M \qquad * \Longrightarrow **$

$*$ DIMOSTRIAMO PER PRIMA COSA

$$v \in \operatorname{Im} M \cap \operatorname{Ker} {}^tM = (0_{\mathbb{R}^n})$$

$v = Mu$ per qualche $u \in \mathbb{R}^m$ $\qquad {}^tMv = 0_{\mathbb{R}^m}$

$\forall w \in \mathbb{R}^m$

$\langle {}^tMv \cdot w \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0$

$\langle {}^tMv \cdot u \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0$

$v = \underline{0} \iff \langle v \cdot v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle v \cdot Mu \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$

seconda cosa

$\operatorname{Im} M + \operatorname{Ker} {}^tM = \mathbb{R}^n$

$\dim \operatorname{Im} M =$

$=$ rango di M $=$

$=$ rang di ${}^tM$ $=$

$=$ $\dim \operatorname{Im} {}^tM$ $=$

Teo dim

$= n - \dim \operatorname{Ker} {}^tM$

GRASSMAN

$$\underset{m\times n}{M}$$

$$U \subset \mathbb{R}^N$$

$$U^\perp = \{\underline{x} \,;\, \forall u \in U \ \langle u \cdot x\rangle = 0\}$$

$u_1 \dots u_K$ base di U

$U^\perp$ solo del sistema

$$\begin{cases} \langle x \cdot u_1\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x \cdot u_K\rangle = 0 \end{cases}$$

U sottosp $\mathbb{R}^N$

$U^\perp \xrightarrow{\dim} N - \dim U$

$$U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^N$$

$$\boxed{(\ker M)^\perp = \operatorname{Im} {}^tM}$$

$$\Downarrow \Leftrightarrow \left(\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m \ Mx = 0_{\mathbb{R}^n} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$(\underline{v} \cdot \underline{x})_{\mathbb{R}^m} = 0$$

$$\underline{M}x = 0$$

$$\langle {}^tMu \cdot x\rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle u \cdot Mx\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$

$$\operatorname{Im} {}^tM \subset (\operatorname{Ker} M)^\perp$$

$$= m - \dim \operatorname{Ker} M = \dim \operatorname{Im} M$$

$$\operatorname{Im} {}^tM = n - \dim \operatorname{Ker} {}^tM = \dim \operatorname{Im} M$$

dim dom. ${}^tM$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3. (E. Schlesinger Algebra Lineare e Geometria: capitolo 10 esercizio 101 pagina 231)
Date due matrici X $n \times k$ ed Y $k \times m$ si ricorda che $XY = (XY^1|\dots|XY^m)$.
Sia $B \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ una matrice 2×2 che non sia multiplo dell'identità $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$.

1. Provare che $C : \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$, $C(A) = AB - BA$ è lineare.
2. Se $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^2$ allora le matrici $e^i \otimes e^j$ (cfr. domanda 6b), $e^1 \otimes e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^1 \otimes e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^2 \otimes e^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^2 \otimes e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono, nell'ordine, una base dello spazio $\mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ delle matrici 2×2.
Si calcolino $Be^i \otimes e^j$ ed $e^i \otimes e^j B$.
3. Si scriva la matrice 4×4 che rappresenta C nella base $e^i \otimes e^j$.
4. Si calcoli il rango di C.
5. Se ne deduca che $AB = BA \iff A \in span\{I, B\}$