

Lezione 8 19.11.2020

(4)

Concludiamo una forma canonica per le matrici $A \in M(p, q)$ di rango r . Essa è data dalla seguente proposizione

Proposizione Sia $T: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di rango r , cioè dire $\text{Im} T = r$.

Allora esiste una base B di V e una base C di W tali che la matrice associata a T è

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

more sia $n = \dim V$, $s = \dim W$.

Allora $\text{ker} T$ ha dimensione $n - r$. Prendiamo da una base (v_1, \dots, v_{n-r}) di $\text{ker} T$ e completiamo a una base B di V , $B = (v_1 \dots v_n)$

Dal teorema della dimensione sappiamo che una base di $\text{Im} T$ è data dagli r vettori

$$w_1 = T(v_{n-r+1}), \dots, w_r = T(v_{n-r+r}) = T(v_n)$$

Completiamo a base di W

$$C = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_s)$$

Ora per costruzione la matrice associata a queste basi è proprio quella

Proposizione Tutte le matrici associate a T ⁽²⁾

rispetto a basi opportune hanno rango r e sono equivalenti a $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ma se $A \in M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ è una matrice di rango r , scelta una base qualunque \mathcal{B} di V e \mathcal{C} di W , possiamo definire $T: V \rightarrow W$ in modo che $\varphi_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(T) = A$. Infatti

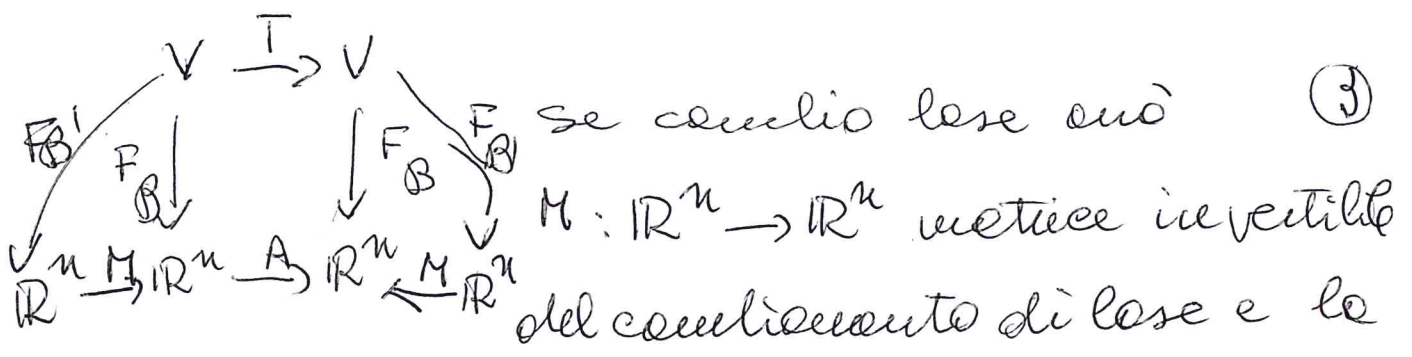
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \varphi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

$$T = \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ \varphi_{\mathcal{B}}. \text{ Dunque } A \text{ è equivalente a}$$

$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ per la proposizione.

Corollario Le classi di equivalenza in $M(s, n)$ sono caratterizzate dal rango. Ogni classe di equivalenza contiene una forma canonica $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se $V = W$ non ha senso considerare basi diverse, ne basta una \mathcal{B} . Allora



nuova matrice B associata a T sarà

$$B = M^{-1} A M$$

ovvero questa è una relazione di equivalenza
 su $M(n, n)$ e si chiama **SIMILITUDINE**.

Ma trovare un invariante (cioè un'etichetta)
 per le classi di similitudine è molto più
 complicato.

Un'ultima osservazione: $T: V \rightarrow W$

$$\dim \text{Im } T \leq \dim V.$$

Infatti se $B = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di V

$\text{Im } T = \text{span} (T(v_1), \dots, T(v_n))$ ma non
 è detto che $T(v_1), \dots, T(v_n)$ siano indipendenti.