Lezione 8 19.11.2020 

Cerchiamo una forma canonica per le matrici $A \in M(p,q)$ di rango $r$. Essa è data dalla seguente proposizione

Proposizione Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare di rango $r$, cioè $\dim \operatorname{Im} T = r$. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $V$ e una base $\mathcal{C}$ di $W$ tali che la matrice associata a $T$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>prova</u> sia $n = \dim V$, $s = \dim W$.

Allora $\ker T$ ha dimensione $n-r$. Partiamo da una base $(v_1, -, v_{n-r})$ di $\ker T$ e completiamo a una base $\mathcal{B}$ di $V$, $\mathcal{B} = (v_1 \dots v_n)$

Dal teorema della dimensione sappiamo che una base di $\operatorname{Im} T$ è data dagli $r$ vettori

$$w_1 = T(v_{n-r+1}), -, w_r = T(v_{n-r+r}) = T(v_n)$$

Completiamo a base di $W$

$$\mathcal{C} = (w_1, -, w_r, w_{r+1}, \dots, w_s)$$

Ora per costruzione la matrice associata a queste basi è proprio quella.

<u>Osservazione</u> Tutte le matrici associate a $T$ rispetto a basi opportune hanno rango $r$ e sono equivalenti a $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ma se $A \in M(s, n)$ è una matrice di rango $r$, scelta una base qualunque $\mathcal{B}$ di $V$ e $\mathcal{C}$ di $W$, possiamo definire $T : V \to W$ in modo che $\varphi_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(T) = A$. Infatti

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "T"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^s \end{tikzcd}$$

$T = F_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ F_{\mathcal{B}}$. Dunque $A$ è equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ per la proposizione.

Corollario Le classi di equivalenza in $M(s, n)$ sono caratterizzate dal rango. Ogni classe di equivalenza contiene una forma canonica $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se $V = W$ non ha senso considerare basi diverse, ne basta una $\mathcal{B}$. Allora

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "T"] \arrow[dl, bend right, "F_{B'}"'] \arrow[d, "F_B"] & V \arrow[d, "F_B"] \arrow[dr, bend left, "F_{B'}"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "M"']
\end{tikzcd}$$

se cambio base ora $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matrice invertibile del cambiamento di base e la nuova matrice $B$ associata a $T$ sarà

$$B = M^{-1} A M$$

anche questa è una relazione di equivalenza su $M(n,n)$ e si chiama SIMILITUDINE.

Ma trovare un invariante (cioè un'etichetta) per le classi di similitudine è molto più complicato.

Un'ultima osservazione: $T : V \to W$

$\dim \operatorname{Im} T \leq \dim V$.

Infatti se $\mathcal{B} = (v_1 - v_n)$ è una base di $V$

$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(T(v_1), \dots, T(v_n))$ ma non è detto che $T(v_1) - T(v_n)$ siano indipendenti.