$\dim A = \dim B$

$\Uparrow$

$11 \times$ $U \oplus A = U \oplus B$

11

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi
Domande di introduzione

Domanda 1 Dato $\theta \in [0; \overset{2\pi}{\cancel{+\infty}})$ si consideri la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{R}(x,y) = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & - & y\sin\theta \\ x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

a- Si mostri che essa descrive la rotazione, in senso antiorario di un angolo di θ radianti, intorno a $(0,0)$, del punto corrispondente al vettore (x,y).
b- Che interpretazione geometrica dare nel caso in cui $\theta < 0$?
c- Si scriva la funzione da $\mathbf{R}^2$ in sé che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2}{3}\pi$ radianti in senso orario attorno all'origine.

Domanda 2 Dato $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ si consideri la matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ e la trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in sé ad essa associata $\mathcal{S}(x,y) = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & + & y\sin\theta \\ x\sin\theta & - & y\cos\theta \end{pmatrix}$.

Si mostri che essa descrive la riflessione, del punto corrispondente al vettore (x,y), rispetto alla retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di $\dfrac{\theta}{2}$ radianti.

Domanda 3 a- Si mostri che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari che conservano le distanze (*isometrie*), cioè: per ogni $u,\, v \in \mathbf{R}^2$ si abbia $||f(u) - f(v)|| = ||u - v||$, sono tutte e sole quelle la cui matrice associata $M \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$.
b- Si mostri che che le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineari iniettive che mantengono gli angoli (*conformi*), cioè: $\forall u,\, v \in \mathbf{R}^2$ si ha $\cos\left(\widehat{u0_{\mathbf{R}^2}v}\right) = \cos\left(\widehat{f(u)0_{\mathbf{R}^2}f(v)}\right)$, ovvero: $\dfrac{\langle f(u) \cdot f(v)\rangle}{||f(u)||\,||f(v)||} = \dfrac{\langle u \cdot v\rangle}{||u||\,||v||}$,

sono esattamente quelle la cui matrice associata è del tipo $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e di rango massimo.
Il campo dei numeri complessi $\mathbf{C}$ è : sia uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbf{C}$ stesso, sia uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbf{R}$, di isomorfismo $\mathbf{R}$-lineare canonico con $\mathbf{R}^2$ dato da

$$c(x,y) = x + iy:$$

c- quali sono le matrici $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ a cui è associata una trasformazione $\mathbf{R}$-lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (\phi(x,y), \psi(x,y)) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, per cui $c_\circ f_\circ c^{-1} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sia $\mathbf{C}$-lineare (ovvero la moltiplicazione per un dato numero complesso) ?

$11 \times$ **Domanda 4** a- Si provi che le funzioni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ che sono isometrie e lasciano fisso $0_{\mathbf{R}^n}$, cioè $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$, $x,\, y \in \mathbf{R}^n$, e $f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0_{\mathbf{R}^n}$,
sono tutte e sole quelle che conservano il prodotto scalare, cioè $\langle f(x) \cdot f(y)\rangle = \langle x \cdot y\rangle$, $x,\, y \in \mathbf{R}^n$.
Teorema: le isometrie di $\mathbf{R}^n$ in sé che lasciano fissa l'origine di $\mathbf{R}^n$ sono funzioni lineari:
b- si provi nel caso $n = 2$ il teorema, cioè:

le isometrie di $\mathbf{R}^2$ che lasciano fisso $(0,0)$ sono funzioni lineari.

Domanda 5 Le funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tali che: 1) $f(tu) = tf(u)$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $u \in \mathbf{R}^2$, e

2) trasformano coppie di rette parallele distinte in coppie di rette parallele distinte

sono tutte e sole le trasformazioni lineari iniettive (si tenga presente la regola del parallelogramma).

11 **Domanda 6** a- Dati $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ e $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ si mostri che la funzione $f(x_1, \dots, x_m) = \langle x \cdot a \rangle b$, da $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$, è lineare.
b- Si scriva la matrice, evidenziando colonne e righe, associata ad $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, denotata da $b \otimes a$.

c- Provare che la proiezione ortogonale su di un iperpiano, dato da $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, è lineare.

d- Si scriva la matrice ad essa associata in termini dei coefficienti $(a_1, \dots, a_n) =: a \neq 0_{\mathbf{R}^n}$.

e- Dato il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito da $x + y + z + u = 0$ si mostri che la trasformazione di $\mathbf{R}^4$ in sé che che dà il simmetrico di (x, y, z, u) rispetto a tale sottospazio è lineare. Se ne scriva la matrice.

$f(x) =$
$= \langle a \cdot x \rangle b$
$a \in \mathbb{R}^m$ $b \in \mathbb{R}^n$
x

$f = b \otimes a$

$a_i b$ colonne

$a b_j$ righe

18 NOV **Domanda 7** (cfr. Berarducci Papini es. 4.3) Si consideri la trasformazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in sé che trasforma i vettori della base canonica rispettivamente in $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ e $(10, 14, 18)$.

a- Si mostri che $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$ sono indipendenti. Quali degli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ son indipendenti da $f(1, 0, 0)$ ed $f(0, 1, 0)$?

b- Si calcolino le dimensioni del nucleo e dell'immagine di tale trasformazione.

c- Si calcoli il trasformato di $(2, 2, 1)$.

18 **Domanda 8** Si consideri la funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}[x]_3$, polinomi di grado minore eguale a 3, che su i vettori della base canonica vale nell'ordine rispettivamente $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x^2 + x$, $x - 2$.

a- Si determinino il nucleo e l'immagine di f.

b- Considerando su $\mathbf{R}[x]_3$ la base canonica $1,\ x,\ ,x^2, x^3$ si scriva la matrice associata ad f.

c- Si trovino tutte le soluzioni $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{R}^4$ dell'equazione $f(v) = x^2 + x + 1$.

Domanda 9 Per quali valori dei parametri $s, t \in \mathbf{R}$ la funzione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z, u, v) = (xs + y + z + u + vt,\ x + ys + z - tu + v,\ x + y + zst + u + v)$$

a- è surgettiva?

b- l'immagine ha dimensione esattamente 2?

c- Se ne determini il nucleo nei vari casi.

Domanda 10 Si scriva la matrice associata alle seguenti funzioni lineari nelle basi rispettivamente specificate:

a- $T_c : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $c \in \mathbf{R}$, $(T(p))(x) = p(x + c)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

b- $D : \mathbf{R}[x]_5 \to \mathbf{R}[x]_5$, $(Dp)(x) = p'(x)$, ove la base di $\mathbf{R}[x]_5$ è quella usuale $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$;

Domanda 10 bis Si consideri la trasformazione lineare, da $\mathbf{R}^2$ in sé, data dalla rotazione in senso antiorario intorno all'origine di una angolo di $\frac{\pi}{4}$. Se ne scriva la matrice associata nella base $((1, 1), (2, 1))$.

18 **Domanda 11** Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x\ +\ 2z &= 0 \end{cases}$, $2x + y + 3z = 0$. Quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $L(\pi) = \{\mathbf{0}\}$ ed $L(r) = \mathbf{R}(1, 1, 1)$?

11 bis L : $\operatorname{Ker} L = r$ $\operatorname{Im} L = \pi$

Domanda 12 Si trovino tutte le applicazioni lineari da $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^3$ surgettive e con nucleo eguale a $\mathbf{R}(1, 1, 1, 1)$.

25 NOV **Domanda 13** Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i sottospazi H e K di equazioni rispettivamente $x + y - z = 0$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

DOMANDA 13

H stsp $\mathbb{R}^3$

K " $\mathbb{R}^3$

$$x+y-z=0$$ PIANO ORTOG $\mathbb{R}(1,1,-1)$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$ RETTA $\mathbb{R}(1,1,-1)$

$$K = H^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \forall w \in H \ \langle v, w\rangle = 0\}$$

$$H = K^{\perp}$$

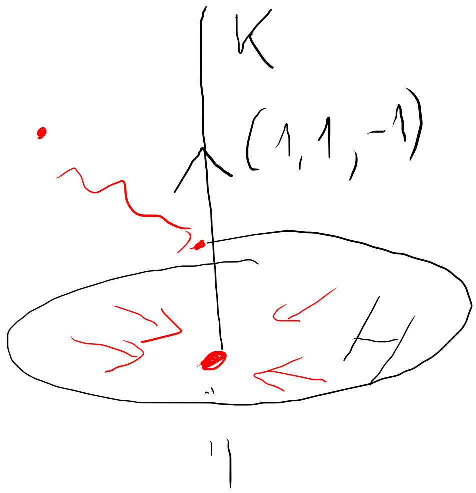
$$\mathbb{R}^3 = H \oplus K \qquad H \cap K = (0)$$

$$\dim K = 3 - \dim H$$

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare

$$f(H) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$$

$$f(\mathbb{R}^3) = K$$



per esempio f la proiezione ortogonale sulla retta K

Tutte le f con tale proprietà saranno $f(x_1, x_2, x_3) = v \cdot \varphi(x_1, x_2, x_3)$

con $v \in K$ $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineare questo perché

$$K = \mathbb{R}(1,1,-1)$$

$$f(\underline{x}) = \lambda(1,1,-1)$$

λ dipende da $\underline{x} = (x_1\ x_2\ x_3)$
in modo lineare

quindi definisce

$\lambda = \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare

matrice 1×3 : $(a_1\ a_2\ a_3)$

$$f(\underline{x}) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= (1\ 1\ -1) \otimes (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

queste sono tutte le $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
lineari per cui $f(\mathbb{R}^3) = K$

ci vuole anche
la condizione
$f(H) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$H \subseteq \operatorname{Ker} f$

$f(x) = \varphi(x)(1,1,-1) \quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \varphi$

$\shortparallel$

$0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$

$H \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$

$\forall h \in H \quad \varphi(h) = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 = 0$

cioè $(a_1, a_2, a_3) \in H^{\perp} = K$

$(a_1\ e_2\ e_3) = a(1,1,-1)$

TUTTE SOLE LE f sono multipli
della proiezione ortogonale su K

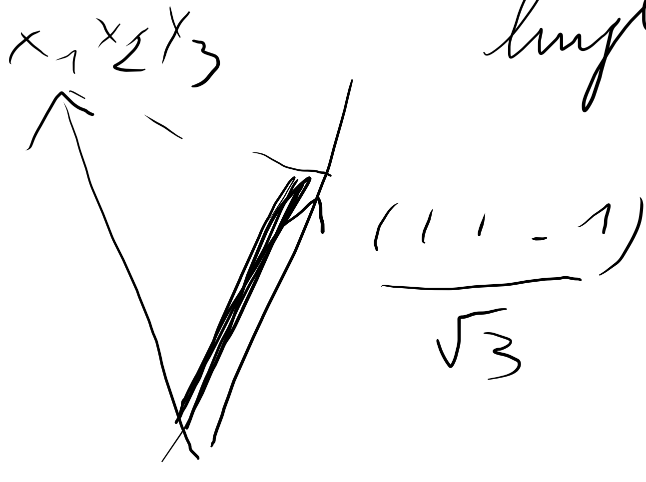
$$f = a \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} \otimes \frac{(1\ \ 1 - 1)}{\sqrt{3}}$$

$\frac{(1\ \ 1\ -1)}{\sqrt{3}}$ è la base di lunghezza 1 di K

$$f(X) = a \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} \left\langle (x_1\ x_2\ x_3)\ \frac{1\ 1\ -1}{\sqrt{3}} \right\rangle$$

lungh = 1

$a \neq 0$



b $\quad K = \mathbb{R}(1\ 1\ -1)$

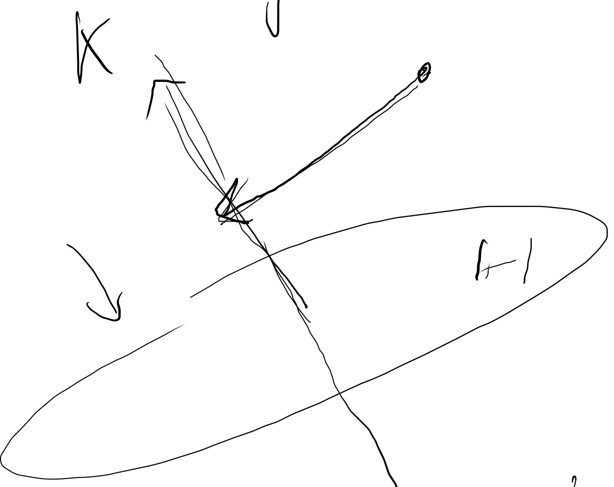
$H = K^{\perp} = \{(x\,y\,z) : x+y-z=0\}$

esiste g lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

per cui

$g \circ f = 0$

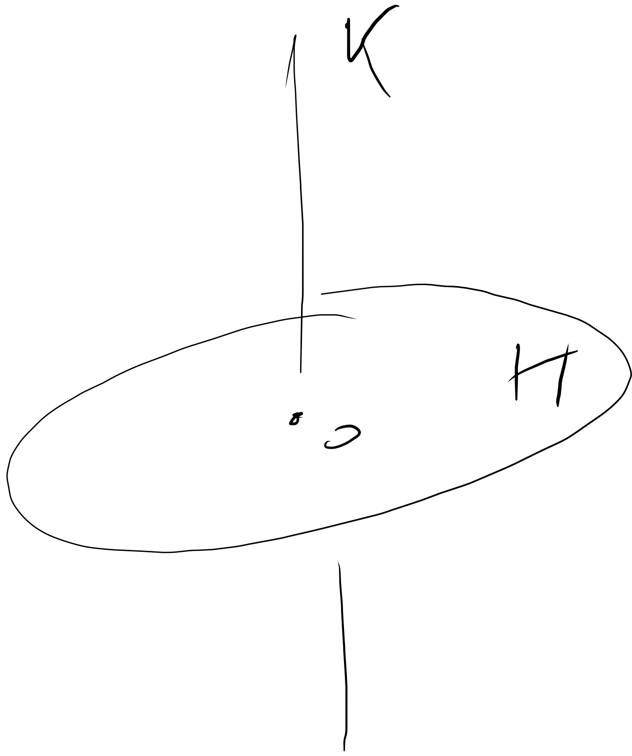
$f(x) = b\langle x \cdot (1\,1\,-1)\rangle(1\,1\,-1)$



proiez. ort. su H

g

c scrivere se esiste
almeno una
g lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$g(K) \subset H$

$g(H) \subset K$

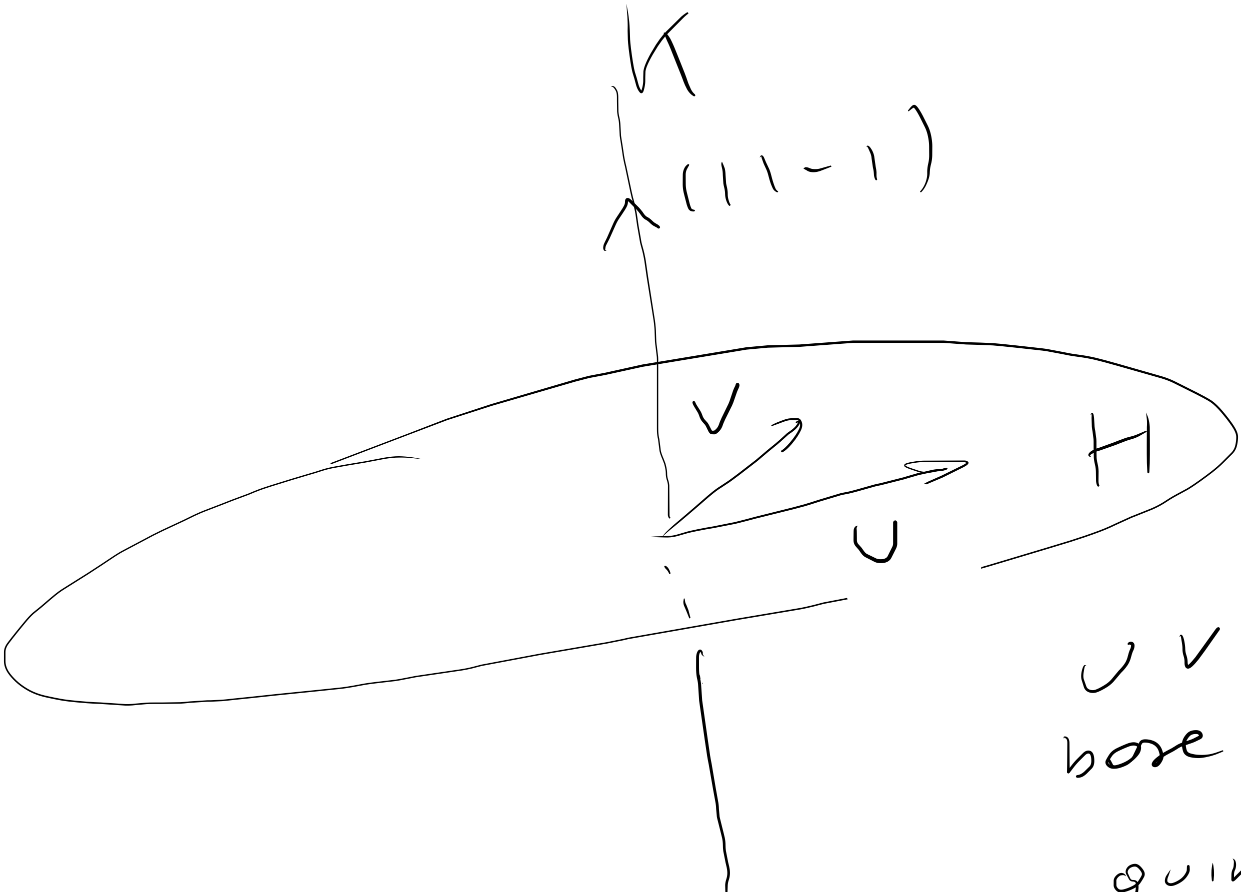
$K = \mathbb{R}(1\ 1\ -1)$

$H = K^\perp \quad x + y - z = 0$

esempio $g(\underline{x}) = (0\ 0\ 0)$

H e K sottospazi

$(0\ 0\ 0) \in H \cap K$



$U\ V$ base di H

quindi

$U, V, (1\,1\,-1)$

$\mathcal{B}$ base di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} g(U) = \lambda(1\ 1\ -1) \\ g(V) = \mu(1\ 1\ -1) \\ g(1\ 1\ -1) \in H \end{cases}$$

in tale base la matrice associata a g

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \gamma \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(K) \subset K^{\perp}$$

$$g(K^{\perp}) \subset K$$

$$K = \mathbb{R}(1\ 1\ -1)$$

$$u = (1, 0, 1) \in H$$

$$\langle (1\ 0\ 1) \cdot (1\ 1\ -1) \rangle = 0$$

$$v = (0\ 1\ 1) \in H$$

$$w = (1, 1, -1) \qquad \mathcal{B}(u, v, w)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \gamma \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}$$

date le coo. nella base B mi dà quelle nella base canonica

date le coordinate nella base canonica mi dà quelle nella base B o calcolo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

e faccio il prodotto delle tre matrici

$g(u) = (\lambda, \lambda, -\lambda)$

$g(v) = (\mu\ \mu\ -\mu)$

$g(w) = (\delta, \mu, \delta+\mu)$

$g(u) = \lambda w$

$g(v) = \mu w$

$g(w) = \delta u + \gamma v$

O esprimo

$e_1(1\,0\,0) \quad e_2(0\,1\,0) \quad e_3(0\,0\,1)$

nella base $B(u\ v\ w)$

1 0 1

$$g(x) = g(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)$$

$$= x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + x_3 g(e_3)$$

$$= x_1 g(\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w) + \dots$$

$$= x_1 \alpha_1 \underline{g(u)} + x_1 \beta_1 \underline{g(v)} + x_1 \gamma_1 \underline{g(w)} + \dots$$

Per esempio
cambiando u e v
base di H

$w\ (1, 1, -1)$

$$g(e_1) = (1\ 1\ -1)$$

$$g(e_2) = (0\ 0\ 0)$$

$$g(e_3) = (1\ 1\ -1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= (1\ -1\ 0) \\ v &= (1\ 0\ 1) \end{aligned}}$$

$$g(u) = \underbrace{g(e_2)}_{0} - g(e_1) = -w$$

$$g(v) = g(e_1) + g(e_3) = 2w$$

$$g(w) = g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) = 0$$

a- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(H) = 0$ e $f(\mathbf{R}^3) = K$.

b- Dire se esiste $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$ dove f è una applicazione lineare verificante le ipotesi del punto precedente.

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$.

25 **Domanda 14** Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Si consideri lo spazio H generato dai polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ e lo spazio K quello generato dai polinomi $1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4$.
a- Dopo aver identificato V con $\mathbf{R}^5$ tramite una base di V, scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H + K$.
b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

25 **Domanda 15** Denotando con ${}^te_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, {}^te_n = (0, \ldots, 1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e data M matrice $n \times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti righe per colonne seguenti:
$$\begin{pmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_{i-1} \\ {}^te_i + \mu\, {}^te_j \\ {}^te_{i+1} \\ \vdots \\ {}^te_n \end{pmatrix} M, \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ {}^te_j \\ \ldots \\ j^o\ {}^te_i \\ \vdots \end{pmatrix} M?$$

25 **Domanda 16** Costruire se possibile, nei vari casi, un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e scrivere la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:
a- $\phi : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, per cui se $rank A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(Id_{n\times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_I^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, base codominio 2;
b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \to \mathbf{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$, e $\phi(x) = 0$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k - 1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;
c- $\phi : U \to U$, $U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

Domanda 17 a1- (Forma canonica di Nord-Est) Sia $L : U \to V$ e lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$.
Trovare le basi di U e V per cui la matrice associata ad L in tali basi sia $\begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
Chi è r?
a2- Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$, trovare le matrci invertibili $\Sigma \in \mathcal{M}(m, M)$, $S \in \mathcal{M}(n, n)$ per cui $\Sigma\, M S = \begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} & Id_{r\times r} \\ O_{(m-r)\times(n-r)} & O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}$.
a3- Due matrici M, $N \in m \times n$ hanno lo stesso rango se e solo se $N = \Sigma\, M\, S$ con Σ ed S invertibili.
b1- Sia $L : U \to V$ lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$, $r =: rango\, L < m, n$. Determinare due funzioni lineari $f : U \to U$, $g : V \to V$ di rango rispettivamente $n - r$ e d $m - r$ per cui $L_o f(u) = 0_V = g_o L(u)$ per ogni $u \in U$.
b-2 Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$ non invertibile, cioè di rango non massimo, mostrare che è un divisore destro e sinistro, rispetto al prodotto di matrici, della matrice nulla: vi sono due matrici non nulle $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $B \in \mathcal{M}(m, m)$ per cui $MA = 0_{\mathcal{M}(m,n)} = BM$.

25 **Domanda 17 bis** a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1} M\, S$) allora è *uguale* alla matrice identica.
b- Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

Domanda 14 Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Si consideri lo spazio K generato dai polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ e lo spazio H quello generato dai polinomi $1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4$.

a- Dopo aver identificato V con $\mathbf{R}^5$ tramite una base di V, scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H+K$.

b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

$$V = \mathbb{R}_4[x]$$

$$K = \underline{\text{span}}\{\underset{P_1}{1}, \underset{P_2}{1+x}, \underset{P_3}{1+x+x^2}\} =$$

$$= \{a + b + bx + c + cx + cx^2\}$$

$$= \{a + b + c + (b+c)x + cx^2\}$$

$$= \mathbb{R}_2[x]$$

$$P_2 - P_1 = x$$

$$P_1 = 1$$

$$P_3 - P_2 = x^2$$

$$H = \text{Span}\{\underset{P_1}{1+x+x^2}, \underset{q_1}{1+x+x^3}, \underset{q_2}{1+x^4}\}$$

$$= \{a + b + c + (a+b)x + ax^2 + bx^3 + cx^4 : a\, b\, c \in \mathbb{R}\}$$

a) $K = \mathbb{R}_2[x]$

$H = \text{span}(1+x+x^2,\ 1+x+x^3,\ 1+x^4)$

- $H \cap K \supseteq \mathbb{R}(1+x+x^2)$

$p \in H$ ie $p(x) = a+b+c+(a+b)x$
$+ ax^2 + bx^3 + cx^4$

$p \in H \cap K \Rightarrow p \in K \quad \deg p = 2$

quindi $b = c = 0$

$p(x) = a + ax + ax^2$
$= a(1+x+x^2)$

$H \cap K = \mathbb{R}(1+x+x^2)$

- $H + K = \text{span}(\underbrace{1, x, x^2}_{\text{base di } K}, 1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x^4)$
$= \text{span}(1, x, x^2, x^3, x^4) = V$

$$K = \mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{\mathcal{F}_{\mathcal{B}}} \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{matrix} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix} \}$$

$$H = \operatorname{span}\ 1 + x + x^2,\ 1 + x + x^3,\ 1 + x^4$$

$$a + b + c + (a + b)x + a x^2 + b x^3 + c x^4$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}_{\mathcal{B}}} (a + b + c,\ a + b,\ a,\ b,\ c)$$

$$x_1 = x_3 + x_4 + x_5$$
$$x_2 = x_3 + x_4$$

$$H \cap K = \mathbb{R} \cdot (1 + x + x^2)$$

$$H + K = \mathbb{R}_4[x]$$

$$0 = 0$$

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \mathcal{B}$$

$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$

$$\mathbb{R}(1\ 1\ 1\ 0\ 0)$$

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbb{R}^5$$

$$\underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5$$

$$= (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$$

Domanda 15 Denotando con ${}^te_1 = (1,0,\dots,0),\dots,{}^te_n = (0,\dots,1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e data M matrice $n\times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti righe per colonne seguenti:

$$I_{ij\mu} = \begin{pmatrix} {}^te_1 \\ \vdots \\ {}^te_{i-1} \\ {}^te_i + \mu\, {}^te_j \\ {}^te_{i+1} \\ \vdots \\ {}^te_n \end{pmatrix} M, \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ {}^te_j \\ \dots \\ j^o\ {}^te_i \\ \vdots \end{pmatrix} M?$$

$$M e_i = M^i \qquad (m\times k \; k\times 1), \quad M e_i \in \mathbb{R}^k,\ M^i: m\times 1,\ i^a \text{ colonna}$$

$$AB = (AB^1 | \cdots | AB^k) = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ i^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \mu & \end{pmatrix} \quad (j^a \text{ colonna}) \qquad m\times m$$

TALE MATRICE HA TUTTE LE RIGHE COME L'IDENTITÀ TRANNE LA i^a CHE È DEL TIPO

$$i^a \quad (0 \;\; \underset{j^o}{\mu} \;\; \underset{i^o}{1} \; \dots \; 0)$$

$$I_{ij\mu} M = \begin{pmatrix} {}^te_1 M \\ \vdots \\ ({}^te_i + \mu\, {}^te_j) M \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i + \mu M_j \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{1\times m}{(1\,0\,0\,0 \dots)} \underset{m\times k}{M} = \underset{1\times k}{M_1}$$

$${}^te_i M = M_i \quad ({}^te_i \in \mathbb{R}^k), \quad M_i: i^a \text{ riga}$$

NOTAZIONE

M è una matrice $n \times k$

$\boxed{\begin{array}{ll} M_i & \text{indico l'} i^a \text{ riga} \\ M^i & \text{l'} i^a \text{ colonna} \end{array}}$

M_i^j ovvero M_{ij} m_{ij}

$l \leq k$, $m \leq n$

$M^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_m}$

sotto matric di righe $j_1^a \dots j_m^a$ e le colonne $i_1^a \dots i_l^a$

Domanda 16 Costruire se possibile, nei vari casi, un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e scrivere la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:

a- $\phi : \mathcal{M}(n,n,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, per cui se $rank A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(Id_{n\times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_I^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, base codominio 2;

b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \to \mathbf{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui $\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$, e $\phi(x) = 0$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k-1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;

c- $\phi : U \to U$, $U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

a) $\phi\ \mathcal{M}(n,n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui rango $A < n$ $\phi(A) = 0$ $\phi(I_n) = 1$

base $\mathcal{M}$

$e_i \otimes e_j = E_{ij}$

$$\begin{array}{cc} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i^a \\ \uparrow & \\ j^a & \end{array}$$

base $\mathbb{R}$

2

se $n = 1$

$(\lambda) = \lambda(1)$

rang$(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$

$\phi(\lambda) = \lambda$

$\phi(I_{1,1}) = \phi(1) = 1$

M associata a ϕ $= ?$

$\left(\frac{1}{2}\right)$

$1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$

se $n > 1$

rango $E_{ij} < n$

$\phi(E_{ij}) = 0$

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_i^j E_{ij}$$

$$\phi(M) = \sum \sum M_i^j \cdot 0 = 0$$

b- $\phi : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbb{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$, e $\phi(x) = 0$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k-1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;

$$\phi : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{n-1}$$

$0 \leq 2k \leq n$

$$\begin{cases} \phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k} \\ \phi(x) = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + \cdots + x \end{cases}$$

$1 \leq 2k-1 \leq n$

$2k+1 \leq n$

Se n è pari $\nexists$ $\quad n = 2m$, x^{2m} ha grado m

$$\exists ?\ \tilde{\phi} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$\tilde{\phi}(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + 1) = x^{2k}, \quad \tilde{\phi}(x) = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

$$\tilde{\phi}(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + \cdots + x$$

$$\tilde{\phi}(x^{2k}) \ ?$$

$1, x^2, x^4, x^6 \ldots$

$$\tilde{\phi}(1) = 1 \qquad \tilde{\phi}(x^2) = \tilde{\phi}(x^2 + 1 - 1) =$$

$$= \tilde{\phi}(x^2+1) - \tilde{\phi}(1) = x^2 - 1$$

La domanda

$$\left(1+x+\dots+x^{2k},\ k\in\mathbb{N};\ x^{2h+1},\ h\in\mathbb{N} \right)$$

sono una base di $\mathbb{R}[x]$?

$$1 = 1$$

$$x^2 = x^2+1 - 1$$

$$x^{2k} = x^{2k}+x^{2(k-1)}+\dots+1-(x^{2(k-1)}+\dots+1)$$

$$\text{Span}\langle 1+x\dots+x^{2k}\ k\in\mathbb{N}\rangle =$$

$$= \text{span}\langle x^{2k}\ k\in\mathbb{N}\rangle$$

Se invece $n = 2m+1$

è dispari

ricorrentemente il massimo grado pari è $2m = n-1$

Se per $x^{2k+1} \in \mathbb{R}[x]_n$

quindi $k \leq m$

$$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + \cdots + x$$

$$k \leq m \qquad 2k-1 \leq 2m-1 < \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{2m+1}$$

Nel caso

$$\phi : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{n-1}$$

c-Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

d- Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

Domanda 18 Sia $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n\times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ la matrice $\lambda Id_{n\times n} - A$ è invertibile.

Domanda 19 a- Dato uno spazio vettoriale U, mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.
b- Si rammenti che data $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y\rangle = \langle x \cdot {}^tAy\rangle$ per ogni x, $y \in \mathbf{R}^n$:
Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ sono quelle per cui
$P^2 - P = O_{n\times n}$ e $P = {}^tP$.

PRIMA DI 19

$A \in M(n \times n)$

$a \neq b$ se

$(A - aI_n)(A - bI_n) = O_n$

allora

$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A - aI) \oplus \mathrm{Ker}(A - bI)$

$\mathrm{Ker}(A - aI) = \mathrm{Im}(A - bI)$

Domanda 20 Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ data da $M_A(B) = AB = (AB^1|AB^2)$ ove B^1, B^2 son la prima e seconda colonna di B.
a- Si provi che M_A è lineare. b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A.

Domanda 21 Sia $D : \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ l'operatore lineare di derivazione sullo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale derivabili in ogni punto infinite volte. Con $D^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ si indichi quindi l'operatore di che associa alla funzione la funzione derivata k^a, se $k \neq 0$, 1, D stesso se $k = 1$, e l'identità I su $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ se $k = 0$
a- Dati r, $\omega \in \mathbf{R}$, non entrambi nulli, sia $T = T_{r,\omega}$ il sottospazio di $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ generato dalle funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$. Si mostri che D è bigettivo da T in sé.
b- Si determini la matrice associata a tale restrizione a T di D, considerando come base di T la coppia le funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$ (cfr. domanda 10 terzo foglio di esercizi).
c- Si considerino gli operatori lineari $D^2 + D + I$ e $D^2 + I$: si mostri che anch'essi operano su T, e si trovino le rispettive matrici associate alle loro restrizioni a T rispetto alla stessa base.
d- Si trovino le soluzioni del tipo $f(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$ delle equazioni $f'' + f' + f = \cos$, $f'' + f = \cos$.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 1. (simile all'es. 5.7 in M.Abate) Si considerino:
- l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(3, 2, 1, 0)$, $(-1, 2, -3, 0)$, $(2, 4, -2, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$,
- l'applicazione lineare $S_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, $a \in \mathbf{R}$ che trasforma i vettori della base canonica nell'ordine rispettivamente in $(6, 4, 2, 0)$, $(a, 0, 4, a)$, $(0, 1, 2, 3)$.

1. a- Si calcolino le dimensioni delle immagini di T ed S_a.
2. b- Per quali valori del parametro a si ha $ImT = ImS_a$?
3. c- Si calcoli la dimensione dell'intersezione delle immagini di T ed S_a.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

18 NOV

Esercizio 2. (cfr. M.Abate proposizione 5.11) Data una matrice $n \times m$ reale $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$ provare che:

1. per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si ha $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot {}^tMy \rangle_{\mathbf{R}^m}$,
2. ponendo $codomM = dom^tM = \mathbf{R}^n$ e $domM = codom^tM = \mathbf{R}^m$
$$ImM \oplus Ker\,{}^tM = codomM, \; KerM \oplus Im\,{}^tM = domM.$$

Che dire del sottospazio, indicato con $(KerM)^{\perp}$, dato dai vettori ortogonali a tutti quelli di $KerM$?

~~**Esercizio 2.** Seconda versione (cfr. M.Abate proposizione 5.11)~~

1. - Dati due spazi vettoriali U e V su $\mathbf{K}$, mostrare che l'insieme delle funzioni $\mathbf{K}$-lineari da U a V è chiuso per le operazioni di somma puntuale $(\phi + \psi)(u) =: \phi(u) +_V \psi(u)$, $u \in U$, e prodotto per numero puntuale $(r\phi)(u) =: r \cdot_V \phi(u)$, $u \in U$, $r \in \mathbf{K}$.
   - Mostrare che l'insieme delle funzioni $\mathbf{K}$-lineari da U a V con tali operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, che si indica $\mathcal{L}(U, V)$.
2. Dimostrare che per ogni funzione lineare $\phi : \mathbf{R}^h \to \mathbf{R}$ esiste un unico $a_\phi \in \mathbf{R}^h$ per cui
$$\phi(x) = \langle x \cdot a \rangle_{\mathbf{R}^h}.$$
3. Indicando $\mathcal{L}(\mathbf{R}^h, \mathbf{R})$ con $(\mathbf{R}^h)'$, mostrare che la funzione $\mathcal{R} : (\mathbf{R}^h)' \to \mathbf{R}^h$ definita da $\mathcal{R}(\phi) = a_\phi$ è lineare e bigettiva.

   Data quindi un'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $domF = \mathbf{R}^m$, $codomF = \mathbf{R}^n$, si definisce l'applicazione lineare trasposta (relativamente ai prodotti scalari su dominio e codominio) la funzione ${}^tF$
$${}^tF : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \text{ tale che } \langle x \cdot {}^tFy \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle Fx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^m} \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^n$$
4. Provare che ${}^tF$ è ben definita e lineare.
5. Provare che la funzione $\tau : \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $\tau(F) = {}^tF$ è lineare.
6. ~~Provare che $ImF \oplus Ker\,{}^tF = codomF$, $KerF \oplus Im\,{}^tF = domF$~~

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli

Quarto foglio di esercizi:
esercizi formato esame

Esercizio 3. (E. Schlesinger Algebra Lineare e Geometria: capitolo 10 esercizio 101 pagina 231)
Date due matrici X $n \times k$ ed Y $k \times m$ si ricorda che $XY = (XY^1|\dots|XY^m)$.
Sia $B \in \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ una matrice 2×2 che non sia multiplo dell'identità $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$.

1. Provare che $C : \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$, $C(A) = AB - BA$ è lineare.
2. Se $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^2$ allora le matrici $e^i \otimes e^j$ (cfr. domanda 6b), $e^1 \otimes e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overset{e^2 \otimes e^1}{\cancel{e^1 \otimes e^2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overset{e^1 \otimes e^2}{\cancel{e^2 \otimes e^1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^2 \otimes e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono, nell'ordine, una base dello spazio $\mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ delle matrici 2×2.
   Si calcolino $Be^i \otimes e^j$ ed $e^i \otimes e^j B$.
3. Si scriva la matrice 4×4 che rappresenta C nella base $e^i \otimes e^j$.
4. Si calcoli il rango di C.
5. Se ne deduca che $AB = BA \iff A \in span\{I, B\}$