Lezione 25-26.11.2020

Determinanti.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $d(A) = ad - bc$

Allora $d(A) = 0 \iff$ le righe di A sono dipendenti.

prova $\Rightarrow$ $ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc$. Se uno dei membri è 0 anche l'altro lo è quindi ci sono 4 possibilità

$a = 0, b = 0$ una riga nulla
$a = 0, c = 0$ una colonna nulla
$d = 0, b = 0$ " " "
$d = 0, c = 0$ una riga nulla

in ogni caso le righe sono dipendenti.

Supponiamo ora $ad \neq 0 \neq bc$. Allora vale la proporzione $a : c = b : d$ che ci dice che le righe sono proporzionali.

$\Leftarrow$ se le righe sono dipendenti, diciamo

$$(c, d) = \lambda (a, b) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$$

$$d(A) = \lambda ab - \lambda ab = 0.$$

Dunque d ~~(A)~~ $: M(2,2) \to \mathbb{R}$ verifica

$$d(A) \neq 0 \iff A \text{ è invertibile.}$$

Cerchiamo qualcosa di analogo per $A \in M(n, n)$

Elenchiamo le proprietà desiderabili e le ②
loro conseguenze. Poi cerchiamo $d: M(n,n) \to \mathbb{R}$
e vediamo che $\exists$ ed è unica tale d e che
verifica $d(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile.

Proprietà desiderabili.

Pensiamo d come funzione delle n righe $A_1, \dots, A_n$ di A. (quindi d è una funzione di n variabili e le variabili sono le righe di A.

A) se A ha 2 righe uguali $d(A) = 0$

(B, C) d è lineare nelle righe di A ovvero

- $A_i = A_i' + A_i''$ A' con la riga A_i', A'' con la riga A_i''

$\Rightarrow d(A) = d(A') + d(A'')$

- $A_i = \lambda A_i'$, A' con la riga A_i'

$d(A) = \lambda\, d(A')$

D) $d(I_n) = 1$.

Da queste 4 (o 3) proprietà si deduce:

$$d(B) = d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$d(B) = 0 = d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$ d cambia segno.

4) S si ottiene da A con operazioni di tipo 2 ($A_j \to A_j + \lambda A_i$) e 3 (scambio di righe). Le prime non cambiano d, ognuna delle seconde cambia segno. Per cui $d(A) = (-1)^c d(S)$

5) Se le righe di A sono dipendenti, S ha una riga nulla $\Rightarrow d(S) = 0 \Rightarrow d(A) = 0$.

ATTENZIONE dobbiamo ottenere S solo con scambi di riga e cose del tipo $A_j + \lambda A_i$. Se moltiplichiamo una riga o la dividiamo per una costante $\neq 0$ otteniamo d per quella costante.

Proposizione Se $d : M(n,n) \to \mathbb{R}$ verifica A, B, C, D allora si ha.

1) Se A ha una riga nulla $d(A)=0$

2) Se sostituisco A_j con $A_j + \lambda A_i$ d non cambia

3) Se si scambiano 2 righe d cambia segno.

4) Se S è una scala di A $d(A) = (-1)^{\ell} d(S)$ dove ℓ è il numero di scambi di riga

5) Se le righe di A sono dipendenti $d(A)=0$.

Dim. 1) se $A_i = (0 - 0)$ possiamo scrivere $A_i = 0 A_i$ dunque $d(A) = 0 \cdot d(A) = 0$.

2) per linearità $d(A) = d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix} =$

$$= d\begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_n \end{pmatrix} + \lambda d \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_i \\ A_n \end{pmatrix} = d(A) + 0.$$

3) Scambiamo A_i e A_j. Consideriamo

$B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$. Allora B ha 2 righe uguali quindi $d(B)=0$. Ma $d(B)$ è somma di 4 addendi

Queste proprietà ci permettono di calcolare d per matrici diagonali

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad d(A) = a_{11}\, d \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22}\, d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a_{33} & & \\ 0 & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

d per matrici triangolari superiori

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Scriviamo $A_i = (0 - 0\ a_{ii}\ 0 - 0) + (0 - 0\ a_{i\,i+1}\ a_{in})$
e calcoliamo

$$d(A) = d \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= d \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ perché

ha zero

colonna nulla, quindi le colonne sono dipendenti, quindi le righe sono dipendenti.
Andiamo avanti con A_2

$$d(A) = d\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ & \vdots & & & \\ & 0 & & & \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{2n} \\ & 0 & a_{33} & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

ancora una colonna nulla, il secondo è 0
Andando avanti per le altre righe otteniamo

$$d(A) = d\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Quindi poiché S è triangolare superiore, se S è una scala di A, sembra che possiamo calcolare $d(A)$ per ogni $A \in M(n,n)$. Ma non è così. Se A è invertibile ogni scala di A ha n pivots $p_1 \cdots p_n$. Quindi $p_1 - p_n$ è $\pm d(A)$ a seconda degli scambi. Ma se S' è un'altra scala di A con pivots $p_1' \cdots p_n'$ chi ci dice che $|p_1 \cdots p_n| = |p_1' \cdots p_n'|$? Questo ragionamento ci dice solo: se d esiste è unico.

~~Vediamo che esiste.~~

Notazione: se $A \in M(n,n)$ A_{ij} è la matrice $n-1 \times n-1$ che si ottiene da A cancellando la riga i e la colonna j.

Notate anche che $d: M(2,2) \to \mathbb{R}$ $d(A) = ad - bc$ verifica A) B) C) D). Allora possiamo definire

$$d(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} d(A_{j1}) = \text{sviluppo di}$$

Laplace per la prima colonna.

Prop: la formula definisce $d: M(n,n) \to \mathbb{R}$ per induzione su n ~~per~~. Dobbiamo provare che verifica A, B, C, D.

Proviamo ~~de~~ D) $A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 - 0 \\ 0 & \boxed{I_{n-1}} \\ 0 & \end{pmatrix}$

$$d(\cancel{A}\, I_n) = (-1)^{1+1} 1\, d(I_{n-1}) = 1$$

Ora proviamo che d è lineare sulle righe

$A_i = A_i' + A_i''$ $A' = A$ con la riga A_i'

$A'' = A$ " " " A_i''

$$d(A) = \sum_{j \neq i} (-1)^{j+1} a_{j1} d(A_{j1}) + (-1)^{i+1} a_{i1} d(A_{i1}) =$$

Se $j \neq i$ A_{j1} ha la riga i che è somma di 2 righe, quindi $d(A_{j1}) = d(A'_{j1}) + d(A''_{j1})$

Il termine i-mo è

$$(-1)^{i+1}(a'_{i1}+a''_{i1})\,d(A_{i1})$$

Quindi
$$d(A) = \sum_{j\neq i}(-1)^{j+1}a_{j1}\left(d(A'_{j1}) + d(A''_{j1})\right) +$$
$$+ (-1)^{i+1}(a'_{i1}+a''_{i1})\,d(A_{i1})$$
$$= \sum_{j\neq i}(-1)^{j+1}a_{j1}\det(A'_{j1}) + (-1)^{i+1}a'_{i1}\,d(A_{i1})$$
$$+ \sum_{j\neq i}(-1)^{j+1}a_{j1}\det(A''_{j1}) + (-1)^{i+1}a''_{i1}\,d(A_{i1}) =$$
$$= d(A') + d(A'')$$

Se ora $A_i = \lambda A'_i$ e A' è la matrice con A'_i si ha
$$d(A) = \sum_{j\neq i}(-1)^{j+1}a_{j1}\lambda\, d(A'_{j1}) + (-1)^{i+1}\lambda a'_{i1}\,d(A_{i1})$$
$$= \lambda\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}\,d(A'_{j1}) + \cancel{a}(-1)^{i+1}a'_{i1}\,d(A_{i1})\right] =$$
$$= \lambda\, d(A')$$

Resta la proprietà A) Se A ha 2 righe uguali $A_i = A_k$.

Allora $d(A) = \sum_{j \neq i,k} (-1)^{j+1} a_{j1} d(A_{j1}) + (-1)^{i+1} a_{i1} d(A_{i1}) +$
$+ (-1)^{k+1} a_{k1} d(A_{k1})$

ora A_{j1} con $j \neq i, k$ ha 2 righe uguali $\Rightarrow d(A_{j1}) = 0$

Dunque $d(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} d(A_{i1}) + (-1)^{k+1} a_{k1} d(A_{k1})$

ora $a_{i1} = a_{k1}$ e A_{i1} e A_{k1} hanno le stesse righe in un ordine diverso. Bisogna capire quanti scambi di riga dobbiamo fare per portare la riga k di A_{i1} nella riga i di A_{k1}

Supponiamo $i < k$

Allora $A_{k1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ A_{k-1} \\ A_{k+1} \\ \\ A_n \end{pmatrix}$ $A_{i1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_{i-1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ A_i \\ A_{k+2} \\ A_n \end{pmatrix}$

dobbiamo scavalcare $k - 1 - i + \cancel{1}$ righe $= k - i - 1$

quindi $d(A_{i1}) = (-1)^{k-i-1} d(A_{k1})$

Allora

$$d(A) = (-1)^{i+1} a_{k1} (-1)^{k-i-1} d(A_{k1}) + (-1)^{k+1} a_{k1} d(A_{k1}) =$$

$$= a_{k1} d(A_{k1}) \left[(-1)^{\cancel{i}+\cancel{1}+k-\cancel{i}-\cancel{1}} + (-1)^{k+1} \right] = 0$$

Abbiamo provato che $\exists\, d$ che verifica A B C D

La chiamiamo DETERMINANTE e la indicheremo $\det A$. La funzione det esiste ed è unica come abbiamo visto.

<u>Osservazione</u> con la stessa fatica possiamo provare che si può fare la formula di Laplace per qualunque colonna

$$d(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji}\, d(A_{ji})$$

cioè che questa definizione ci dà d che verifica A B C D. Per unicità le due formule definiscono la stessa funzione $\det A$.

Ora vogliamo provare che $\det A$ si può calcolare con una formula per righe

Proposizione $A \in M(n,n)$ e sia i un numero $1 \leq i \leq n$. Allora

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

(sviluppo di Laplace per la riga i)

prova: scriviamo

$$A_i = a_{11}(1, 0 \text{ — } 0) + a_{12}(0\,1\,0 \text{ — } 0) + \cdots + a_{in}(0 \text{ — } 0\,1) =$$

$$= a_{11} e_1^T + a_{12} e_2^T + \cdots + a_{in} e_n^T$$

(abbiamo scritto la n-upla $(a_{i1}, -, a_{in})$ come combinaz. lineare della base canonica di $\mathbb{R}^n$ scritta per riga).

Corrispondentemente per linearità sulla riga i, se chiamiamo B_j la matrice ottenuta da A sostituendo A_i con e_j^T, si ha

$\det A = a_{11} \det B_1 + \dots + a_{1n} \det B_n$

Ora B_k ha la riga i data da $(0 - 0\ 1\ 0 - 0)$
posto k

Se ora sottraiamo alle righe A_j di A ~~diverse da~~ ~~A_i~~ con $j \neq i$ il multiplo $a_{jk}(0 - 0\ 1\ 0 — 0)$
posto k

otteniamo con operazioni di Gauss, senza scambi di riga una matrice C_k tale che $(C_k)_{ik} = A_{ik}$ ma C_k ha la riga k con tutti 0 e 1 al posto $i\,k$

$$C_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1k-1} & 0 & a_{1k+1} & a_{1n} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1k-1} & 0 & a_{i-1k+1} & a_{i-1n} \\ 0 & \text{——} \ 0 & 1 & 0 & \text{——} \ 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,k-1} & 0 & a_{i+1k+1} & a_{i+1n} \\ & & | & & \\ a_{n,1} & a_{nk1} & 0 & a_{nk+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

quindi $\det B_k = \det C_k$ e quindi

$\det A = a_{i1} \det C_1 + a_{i2} \det C_2 + \qquad + a_{in} \det C_n$

Ora calcoliamo $\det C_1, —, \det C_n$

Calcoliamo $\det C_j$ rispetto alla colonna j che ha tutti 0 tranne al posto ij dove ha 1

quindi $\det C_j = (-1)^{i+j} \det (C_j)_{ij} = (-1)^{i+j} \det (A_{ij})$

Morale: $\det A = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} +$

$+ \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in} =$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \square.$$

Corollario $\det A^T = \det A$

Prova per induzione su n.

se $n=2$ è chiaro.

Supponiamo sia vero per $n-1$ e proviamo per n

$$\det A^T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a^T_{i1} \det (A^T_{i1})$$

Ma $a^T_{i1} = a_{1i}$, ~~$\det (A^T_{i1}) = \det A_{1i}$~~ $A^T_{i1} = A_{1i}$

quindi $\det A^T = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det A_{1i} = \det A$.

Esempio

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \det A$$

sviluppo per 3^a colonna

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

per prima riga $\quad \det A = 27 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

prima riga

$$\det A = 27 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -27.$$

Teorema di Binet $\quad A, B \in M(n,n)$

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

prova se $\text{rk}\, B < n$ $\det B = 0$. Ma $\text{rk}\, AB \leq \text{rk}\, B < n$

$\Rightarrow \det AB = 0$ O.K.

supponiamo $\det B \neq 0$ e poniamo $f(A) = \dfrac{\det AB}{\det B}$

se proviamo f verifica A) B) C) D) $f(A) = \det A$

D) Se $A = I$ $\quad f(A) = \dfrac{\det B}{\det B} = 1$ ✓

C) f è lineare nelle righe di A.

Ma la riga i-ma di AB è $A_i B$

dunque $\det AB$ è lineare su $A_i B \Rightarrow$
f è lineare su A_i ✓

A) se A ha due righe uguali A_i e A_j
allora $A_i B = A_j B$ e quindi AB ha
2 righe uguali e $f(A) = \dfrac{0}{\det B} = 0$. ✓

Corollario Se A è invertibile $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

prova $AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$ ✓