b- $\phi : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbb{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$, e $\phi(x) = 0$,
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k-1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;

$\phi : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{n-1}$

$0 \leq 2k \leq n$

$$\begin{cases} \phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k} \\ \phi(x) = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + \cdots + x \end{cases}$$

$1 \leq 2k-1 \leq n$

$2k+1 \leq n$

Se n è pari $\nexists$ $\quad n = 2m$ $\quad x^{2m}$ ho grado m

---

$\exists ? \ \tilde{\phi} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$\tilde{\phi}(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + 1) = x^{2k}$, $\quad \tilde{\phi}(x) = 0_{\mathbb{R}[x]}$

$\tilde{\phi}(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + \cdots + x$

$\tilde{\phi}(x^{2k})$? $\quad 1, x^2, x^4, x^6 \ldots$

$\tilde{\phi}(1) = 1 \quad \tilde{\phi}(x^2) = \tilde{\phi}(x^2 + 1 - 1) =$
$= \tilde{\phi}(x^2+1) - \tilde{\phi}(1) = x^2 - 1$

La domanda

$$\left(1+x+\dots+x^{2k},\ k\in\mathbb{N};\ x^{2h+1},\ h\in\mathbb{N}\right)$$

sono una base di $\mathbb{R}[x]$?

$$1 = 1$$

$$x^2 = x^2+1-1$$

$$x^{2k} = \underbrace{x^{2k}+x^{2(k-1)}+\dots+1}_{b_{2k}} - (\underbrace{x^{2(k-1)}+\dots+1}_{b_{2k-2}})$$

$$\operatorname{Span}\langle 1+x+\dots+x^{2k}\ k\in\mathbb{N}\rangle = \operatorname{span}\langle x^{2k}\ k\in\mathbb{N}\rangle$$

$$\tilde{\Phi}(x) = 0_{\mathbb{R}^x}$$

$$\tilde{\Phi}(x^{2k+1}) = x^{2k-1}+\dots+x \quad \Big| \ x^{2k}-x^{2k-2}$$

$$\tilde{\Phi}(x^{2k}) = \tilde{\Phi}(b_{2k}-b_{2k-2}) = \tilde{\Phi}(b_{2k}) - \tilde{\Phi}(b_{2k-2})$$

Se invece $n = 2m+1$ è dispari

grado max di un polin di grado pari in $\mathbb{R}_n[x]$

sicuramente il massimo grado pari è $2m = n-1$

Se per $x^{2k+1} \in \mathbb{R}[x]_n$

quindi $k \leq m$

$$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + \dots + x$$

$$k \leq m \qquad 2k-1 \leq 2m-1 < \underset{\overset{\parallel}{n}}{2m+1}$$

Nel caso

$$\phi : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n-1}$$

Ora si tratta di scrivere la matrice associata a $\phi : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{n-1}$ nelle basi canoniche quando $\underline{n = 2m+1}$.

$\phi(1) = 1 \qquad \phi(x) = 0_{\mathbb{R}[x]} \qquad \phi(x^{2k}) = x^{2k} - x^{2k-2}$

$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + \dots + x \qquad \phi(x^3) = x \qquad \phi(x^5) = x^3 + x$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1^\circ & & & & & & & & & (2m+2)^\circ \\
 & & & & & & & & & & (n+1)^\circ \\
 & & & & & & & & & & x^{2m+1} \\
1^\circ & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & 1 \\
\dim \mathbb{R}[x]_{n-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & & & 0 \\
= & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & 1 \\
n & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & & & & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & -1 & 0 & 2m-1 \\
x^{2m}\ m^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & & & 0 & 1 & 2m)^\circ \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & (2m+1)^\circ \\
 & \phi(1) & \phi(x) & \phi(x^2) & \phi(x^3) & \phi(x^4) & \phi(x^5) & \cdots & & & \phi(x^n)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\
\hline
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

a- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(H) = 0$ e $f(\mathbf{R}^3) = K$.

b- Dire se esiste $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$ dove f è una applicazione lineare verificante le ipotesi del punto precedente.

c- Dire se esiste e in caso affermativo scriverne almeno una, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(K) \subset H$ e $g(H) \subset K$.

25 **Domanda 14** Sia V lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Si consideri lo spazio H generato dai polinomi $1, 1 + x, 1 + x + x^2$ e lo spazio K quello generato dai polinomi $1 + x + x^2, 1 + x + x^3, 1 + x^4$.
a- Dopo aver identificato V con $\mathbf{R}^5$ tramite una base di V, scrivere le equazioni dell'intersezione $H \cap K$ e della somma $H + K$.
b- Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(H) = K$ e $T(K) = H \cap K$ e scriverne la matrice associata

25 **Domanda 15** Denotando con ${}^t e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, {}^t e_n = (0, \ldots, 1)$ le righe corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^n$, e data M matrice $n \times k$, a quali matrici rispettivamente corrispondono i prodotti righe per colonne seguenti:

$$\begin{pmatrix} {}^t e_1 \\ \vdots \\ {}^t e_{i-1} \\ {}^t e_i + \mu\, {}^t e_j \\ {}^t e_{i+1} \\ \vdots \\ {}^t e_n \end{pmatrix} M, \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ i^o\ {}^t e_j \\ \cdots \\ j^o\ {}^t e_i \\ \vdots \end{pmatrix} M?$$

25 nov **Domanda 16** Costruire se possibile, nei vari casi, un'applicazione lineare con le proprietà richieste, e scrivere la matrice associata nelle basi, di dominio e codominio, eventualmente specificate:
2 dic a- $\phi : \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, per cui se $rank A < n$ si abbia $\phi(A) = 0$, e $\phi(Id_{n \times n}) = 1$: base dominio $e_i^{\mathbf{R}^n} \otimes e_j^{\mathbf{R}^n}$ ove $e_I^{\mathbf{R}^n}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$, base codominio 2;
b- $\phi : \mathbf{R}[x]_n \to \mathbf{R}[x]_{n-1}$, $n \geq 1$, $\mathbf{R}[x]_m$ polinomi di grado minore eguale a m, per cui
$\phi(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \cdots + x^2 + 1) = x^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$, e $\phi(x) = 0$, ..
$\phi(x^{2k+1}) = x^{2k-1} + x^{2k-3} + \cdots + x$, $1 \leq 2k - 1 \leq n$: basi di dominio e codominio quelle canoniche;
c- $\phi : U \to U$, $U = U_1 \oplus U_2$, per cui $\phi(U_1) = U_2$ e $\phi(U_2) = U_1$.

Acq. F. .. **Domanda 17** a1- (Forma canonica di Nord-Est) Sia $L : U \to V$ e lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$. Trovare le basi di U e V per cui la matrice associata ad L in tali basi sia $\begin{pmatrix} O_{r \times (n-r)} & Id_{r \times r} \\ O_{(m-r) \times (n-r)} & O_{(m-r) \times r} \end{pmatrix}$.
Chi è r?
a2- Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$, trovare le matrci invertibili $\Sigma \in \mathcal{M}(m, M)$, $S \in \mathcal{M}(n, n)$ per cui $\Sigma M S = \begin{pmatrix} O_{r \times (n-r)} & Id_{r \times r} \\ O_{(m-r) \times (n-r)} & O_{(m-r) \times r} \end{pmatrix}$.
a3- Due matrici M, $N \in m \times n$ hanno lo stesso rango se e solo se $N = \Sigma M S$ con Σ ed S invertibili.
b1- Sia $L : U \to V$ lineare, $dim\, U = n$, $dim\, V = m$, $r =: rango\, L < m, n$. Determinare due funzioni lineari $f : U \to U$, $g : V \to V$ di rango rispettivamente $n - r$ e d $m - r$ per cui $L \circ f(u) = 0_V = g \circ L(u)$ per ogni $u \in U$.
b-2 Sia $M \in \mathcal{M}(m, n)$ non invertibile, cioè di rango non massimo, mostrare che è un divisore destro e sinistro, rispetto al prodotto di matrici, della matrice nulla: vi sono due matrici non nulle $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $B \in \mathcal{M}(m, m)$ per cui $MA = 0_{\mathcal{M}(m,n)} = BM$.

2 dic **Domanda 17 bis** a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1} M S$) allora è *uguale* alla matrice identica.
b- Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

~~c-~~Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.
~~d-~~ Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

2 sol. **Domanda 18** Sia $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{C})$ tale che $A^k = O_{n\times n}$ per qualche $k \in \mathbf{N}$: mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ la matrice $\lambda Id_{n\times n} - A$ è invertibile. cfr. dom 8 quarto f. bis

2 sol. **Domanda 19** a- Dato uno spazio vettoriale U, mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.
b- Si rammenti che data $A \in \mathcal{M}(n, n, \mathbf{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y\rangle = \langle x \cdot {}^tAy\rangle$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$:
Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ sono quelle per cui $P^2 - P = O_{n\times n}$ e $P = {}^tP$. cfr. domanda 6 quarto f. bis

2 sol. **Domanda 20** Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ data da $M_A(B) = AB = (AB^1|AB^2)$ ove B^1, B^2 son la prima e seconda colonna di B.
a- Si provi che M_A è lineare. b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A.

Domanda 21 Sia $D : \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ l'operatore lineare di derivazione sullo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale derivabili in ogni punto infinite volte. Con $D^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ si indichi quindi l'operatore di che associa alla funzione la funzione derivata k^a, se $k \neq 0, 1$, D stesso se $k = 1$, e l'identità I su $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ se $k = 0$
a- Dati $r, \omega \in \mathbf{R}$, non entrambi nulli, sia $T = T_{r,\omega}$ il sottospazio di $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ generato dalle funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$. Si mostri che D è bigettivo da T in sé.
b- Si determini la matrice associata a tale restrizione a T di D, considerando come base di T la coppia le funzioni $e^{rt}\cos\omega t$, $e^{rt}\sin\omega t$ (cfr. domanda 10 terzo foglio di esercizi).
c- Si considerino gli operatori lineari $D^2 + D + I$ e $D^2 + I$: si mostri che anch'essi operano su T, e si trovino le rispettive matrici associate alle loro restrizioni a T rispetto alla stessa base.
d- Si trovino le soluzioni del tipo $f(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$ delle equazioni $f'' + f' + f = \cos$, $f'' + f = \cos$.

~~PRIMA~~ PRIMA DI 19
$A \in \mathcal{M}(n\times n)$
$a \neq b$ se
$(A - aI_n)(A - bI_n) = O_n$
allora
$\mathbb{R}^n = Ker(A - aI) \oplus Ker(A - bI)$
$Ker(A - aI) = Im(A - bI)$
(cfr. domanda 9 quarto foglio bis)

D.18 $A \in \mathcal{M}(n)$: $\boxed{A^k = O_{n\times n}}$ $\exists k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \forall \lambda \neq 0$ $\lambda I_d - A$ è invertibile

$\lambda^k - \alpha^k = (\lambda - \alpha)(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}\alpha + \dots + \lambda\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1})$
COMM. PRODOTTO

$\lambda \neq 0$

λI e A COMMUTANO

$\cancel{\lambda^k} I = \lambda^k I - A^k = (\lambda I)^k - A^k =$

$= (\lambda I - A)\dfrac{(\lambda^{k-1} I + \lambda^{k-2} A + \dots + \lambda A^{k-2} + \lambda A^{k-1})}{\lambda^k}$

2 di 4 **Domanda 17 bis** a- Se una matrice quadrata M è *simile* alla matrice identica ($Id = S^{-1}MS$) allora è *uguale* alla matrice identica.

b- Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

c-Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hanno stesso rango ma non sono simili.

d- Le mosse di Gauss (sostituzione con somma di multplo di un'altra riga e permutazione di righe) non trasformano una matrice in una simile.

a) $M \in \mathcal{M}(n)$ $\quad Id_{n\times n} = S^{-1}MS$

$\Rightarrow S\, Id_{n\times n} = MS \Rightarrow S\, Id\, S^{-1} = M$

$\Rightarrow SS^{-1} = M \Rightarrow Id = M$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

- hanno stesso RANGO
- MA NON SONO SIMILI

• $B = S^{-1}MT^{-1}$ $\exists S$ e T

•• $B = S^{-1}MS$ $\nexists S$

se $\exists S$ per a) $B = M$

c) $\overset{*}{L}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \overset{**}{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}=M$

hanno rango 2 entrambe
ma non sono simili

Se fossero simili
$L=S^{-1}MS \qquad SLS^{-1}=M$

L la vediamo come funzione lineare $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2_{e_1,e_2} & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2_{e_1,e_2} \\ S\uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^2_{f_1,f_2} & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}^2_{f_1,f_2} \end{array}$$

M come matrice associata ad L in un'altra base (rispetto alla ~~base~~ canonica $f_1\ f_2$

$^{*}\ Le_1=e_1+e_2$
$\quad Le_2=e_1$

$^{**}\ Lf_1=f_1$
$\quad Lf_2=f_1-f_2$

$$f_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ae_1 + be_2$$

$$\parallel$$

$$Lf_1 = L(ae_1 + be_2) =$$

$$= aLe_1 + bLe_2 =$$

$$= \underline{ae_1} + ae_2 + \underline{be_1} =$$

$$= (a+b)e_1 + ae_2$$

$$(a, b) = (a+b, a)$$

$$\begin{cases} a = a + b \\ b = a \end{cases}$$

$$a = 2a$$

$$\Downarrow$$

$$b = 0 \Leftarrow a = 0$$

$$f_1 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

ma è l'elemento di una base

4 foglio bis

Domanda 9 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{K}$.

Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbf{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = 0_{n\times n}$, allora:

$$\mathbf{K}^n = Ker\left(A - aI_{n\times n}\right) \oplus Ker\left(A - bI_{n\times n}\right) \text{ e } \boxed{Ker\left(A - aI_{n\times n}\right) = Im\left(A - bI_{n\times n}\right)}$$

$a \neq b \qquad (A - aI)(A - bI) = 0$

$Im(A - bI) \subseteq Ker(A - aI)$

dim $= n - \dim Ker(A - b) \leq \dim Ker(A - aI)$

- $Ker(A - aI) \cap Ker(A - bI) = (0)$

$\in$ $\qquad \in$

$\underline{x}$

$(A - aI)x = \underline{0}$

$(A - bI)x = \underline{0}$

$Ax - ax = \underline{0} \qquad Ax = a\underline{x}$

$Ax - bx = \underline{0} \qquad Ax = b\underline{x}$

$a\underline{x} = b\underline{x}$

$(a - b)\underline{x} = \underline{0}$

$\neq 0 \qquad \Downarrow$

$\underline{x} = 0$

$$(A-aI)(A-bI)=0$$

A commuta con αI e con se stessa

quindi $(A-aI)$ commuta con $(A-bI)$

INFINE

$$\dim \operatorname{Im}(A-bI) = n - \dim \operatorname{Ker}(A-bI) = \dim \operatorname{Ker}(A-aI)$$

$$(A-bI)(A-aI)=0$$

$$\operatorname{Im}(A-aI) \subset \operatorname{Ker}(A-bI)$$

$$\operatorname{Im}(A-bI) \subseteq \operatorname{Ker}(A-aI)$$

$$\dim = n - \dim \operatorname{Ker}(A-aI) \leq$$

$$\leq \dim \operatorname{Ker}(A-bI)$$

$$n \leq \dim \operatorname{Ker}(A-bI) + \dim \operatorname{Ker}(A-aI)$$

SOTTOSP. $\mathbb{R}^n$

$$* = \dim\left[\operatorname{Ker}(A-bI) + \operatorname{Ker}(A-aI)\right] + \leq n$$

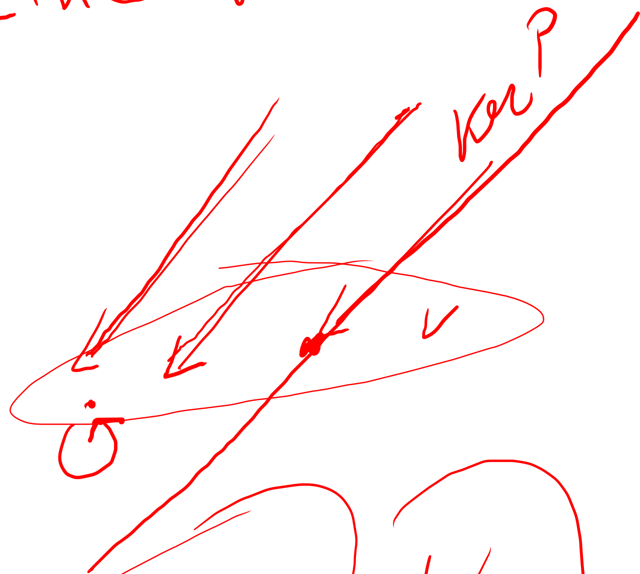
$$\cancel{\dim \operatorname{Ker}(A-bI) \cap \operatorname{Ker}(A-aI)}$$

Domanda 19 a- Dato uno spazio vettoriale U, mostrare che tutte e sole le proiezioni P su un sottospazio di U sono le applicazioni lineari da U in sé, per cui $P^2 - P = O$.
b- Si rammenti che data $A \in M(n,n,\mathbb{R})$ si ha $\langle Ax \cdot y \rangle = \langle x \cdot {}^tAy \rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:
Si mostri che tutte le proiezioni ortogonali su un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ sono quelle per cui $P^2 - P = O_{n \times n}$ e $P = {}^tP$. cfr. domanda 6 quarto f. bis

a)

$P : U \to U$ Lineare

V sts U



$P|_V = I_{d_V}$

$\operatorname{Im} P = V$

$P^2 - P = 0$

$PPv = Pv \quad \forall v$

$P(P - I) = 0$

$U = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Ker}(P - I) =$

$a = 0 \quad b = 1$

$= \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$

Viceversa

$P^2 - P = 0$

$U = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$

PARALLELAMENTE su

b) $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

è una proiez. ortogonale

se e solo se

$$\begin{cases} P^2 - P = O_n & \text{proiezioni} \\ P = {}^t P & \text{ortogonale} \end{cases}$$

$\Downarrow \to$ ok

$M \quad n \times n$

$$\langle Mx, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, {}^tMy\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

(1) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$

Esercizio precedente

(2) $\operatorname{Ker} P \subseteq (\operatorname{Im} P)^\perp$ per ipotesi

(3) $(\operatorname{Ker} P)^\perp = \operatorname{Im} {}^tP$ es. 2 in generale

$$\mathbb{R}^n = (\operatorname{Ker} P) \oplus \operatorname{Im} {}^tP$$

$$= (\operatorname{Im} {}^tP)^\perp \oplus \operatorname{Im} {}^tP$$

$\dim (\operatorname{Im} P)^\perp = \dim (\operatorname{Im} {}^tP)^\perp$

$\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp$

$\boxed{(\operatorname{Ker} P)^\perp = \operatorname{Im} P}$

Quindi

$$\begin{cases} \operatorname{Im} {}^tP = \operatorname{Im} P & \forall v\ \exists w \\ {}^tP v = P w & \forall w\ \exists v \end{cases}$$

$$P^2 v = P v \longrightarrow$$

4 $\quad ({}^tP)^2 w = {}^tP w$

$$\langle {}^tP\,{}^tP w \cdot x \rangle = \langle w \cdot P P x \rangle$$

$$= \langle w \cdot P x \rangle = \langle {}^tP w \cdot x \rangle$$

$$\forall x \ \langle ({}^tP\,{}^tP - {}^tP) w \cdot x \rangle = 0$$

$$0$$

5 $\quad {}^tP v = {}^tP\,{}^tP v \overset{\exists w}{=} {}^tP P w$

$$\overset{\shortparallel}{P w} = P^2 w \qquad ({}^tP - P) P w = 0$$

$${}^tP - P \big|_{\operatorname{Im} P} \equiv 0$$

VOGLIAMO

$\forall v$

$$P v = {}^tP v$$

$$\Uparrow$$

$\operatorname{Ker} P$

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P \oplus (\operatorname{Im} P)^{\perp}$$

$$(\operatorname{Im} P)^{\perp} = \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} {}^tP$$

$$\boxed{{}^tP\big|_{\operatorname{Im} P} = P\big|_{\operatorname{Im} P}}$$

6 FATTO GENERALE

$C = A \oplus B$

$L_1 : A \to C$

$L_2 : B \to C$

$\exists!\ L : C \to C$

$L(c) = L(a+b) = L_1 a + L_2 b$

$\Uparrow$ Viceversa

se $\dfrac{P^2 = P \quad \text{idempotent}}{P = {}^tP \quad \text{simmetrica}}$

$\Downarrow$

P è una proi ortogonale

(su Im P

$(\mathrm{Im}\,P)^\perp = \mathrm{Ker}\,P$)

• Si è già dimostrato che P è una proiezione su Im P parallel. a Ker P

es. 2 $(\mathrm{Im}\,{}^tP)^\perp = \mathrm{Ker}\,P$

$\quad\quad \parallel$

$(\mathrm{Im}\,P)^\perp = \mathrm{Ker}\,P$

Domanda 20 Per $t \in \mathbf{R}$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$, e si consideri $M_A : \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ data da $M_A(B) = AB = (AB^1|AB^2)$ ove B^1, B^2 son la prima e seconda colonna di B.

a- Si provi che M_A è lineare. b- Al variare di t si determinino l'immagine e il nucleo di M_A.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ $B = (B^1 | B^2)$

$B \xrightarrow{M_A} AB = (AB^1 | AB^2)$

a)

$B + C = (B^1 + C^1 | B^2 + C^2)$

b) $\operatorname{Ker} M_A$ $\operatorname{Im} M_A$

$\mathcal{M}(2) \sim \mathbb{R}^4$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim (a\ b\ c\ d)$

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(2) & \xrightarrow{M_A} & \mathcal{M}(2) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^4_{e_1 e_2 e_3 e_4} & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^4_{e_1 e_2 e_3 e_4} \end{array}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim e_1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim e_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim e_3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim e_4$

$\underline{1\ 0\ 0\ 0} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \sim (2,0,4,0)$

$x\ y\ z\ u$

$(0\ 1\ 0\ 0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{matrix}\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \sim (0\,2,0\,4)$

$(0\ 0\ 1\ 0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$

S

$(1,0,t,0)$

$(0\ 0\ 0\ 1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \sim (0,1,0,t)$

2	0	1	0
0	2	0	1
4	0	2	0
0	4	0	2

$2A \quad 2B \quad A \rightleftarrows B$

$\mathrm{Im}\, M_A = (1,2) \otimes (a,b)$

~~$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \right\}$ errore~~

NO

$\mathrm{Im}\, M_A =$

~~$\mathrm{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$~~

$(-1,2) \otimes (a,b)$

$\parallel$

$\left[a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

$\parallel$

2	0	1	0
0	2	0	1
4	0	t	0
0	4	0	t

$III - 2I \to III$

$IV - 2II \to IV$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & u \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}$$

$t \neq 2 \quad \mathrm{Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ // $t = 2 \quad \mathrm{Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} z/2 & -u/2 \\ z & u \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -a & -b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \right\}$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2020/21
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi Bis

Domande di introduzione

Domanda 1 Se A, B, U sono sottospazi vettoriali per cui $U \oplus A = U \oplus B$ allora $dim\,A = dim\,B$.

A **Domanda 2** Si consideri in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio P definito da $\begin{cases} x+y & = & 0 \\ x-y+z+u & = & 0 \end{cases}$.

a- Si determini $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare per cui $Im A = Ker A = P$.
b- Si scriva la matrice della A determinata.

A **Domanda 3** Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore, con 0 sulla diagonale. Mostrare che $T^n = \mathbf{O}_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 4 (cfr. domanda 10 del quarto foglio) Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ x\ +\ 2z & = & 0 \end{cases}$, $2x+y+3z=0$.

a- Determinare quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $KerL = r$, $ImL = \pi$?
b- Calcolare per una di esse la matrice che la identifica nella base canonica e quindi L^2 ed L^3.
c- Vi sono tali L per cui, per ogni m, L^m non è la matrice nulla?
d- In generale esprimere L^m, $m \geq 2$, in termini di L^2.

Domanda 5 (cfr. esercizio 2 del quarto foglio) Data due matrici reali $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$, $n \times m$, $L \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{R})$, $m \times n$, per cui

per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si abbia $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot Ly \rangle_{\mathbf{R}^m}$.

Si mostri che $L = {}^tM$.

||| **Domanda 6** (cfr. domanda 19b ed esercizio 2 del quarto foglio) (pseudo inversa di Moore-Penrose nel caso di rango massimo)

Si consideri una matrice $A \in \mathcal{M}(n, k, \mathbf{R})$, $n \times k$, con $k < n$.
a- La matrice $A\,{}^tA$, non è mai invertibile.
b- La matrice ${}^tAA$ è invertibile se e solo se A è di rango massimo.
c- Se A è di rango massimo la matrice $A\,({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ dà la proiezione ortogonale su ImA.

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui

a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?
b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

| **Domanda 8** (cfr. domanda 18 quarto foglio di esercizi) Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore con 1 sulla diagonale.
Provare che se per qualche $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ si ha $\overset{*}{T^k = Id_{\mathcal{M}(n)}}$ allora $T = Id_{\mathcal{M}(n)}$.

|| **Domanda 9** Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbf{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = \mathrm{O}_{n\times n}$, allora:

$$\mathbf{K}^n = Ker\,(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker\,(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker\,(A - aI_{n\times n}) = Im\,(A - bI_{n\times n})$$

$\underset{0}{0} \overset{*}{=} T^k - 1 = (T-1)\underbrace{(T^{k-1} + T^{k-2} + \dots + T + 1)}_{S \text{ INVERTIBILE}}$

$K > 1$ $\begin{bmatrix} K & & * \\ & K & \\ 0 & & K \end{bmatrix}$

MOLTIPLICO A DX PER S^{-1}

$\underset{0}{0S^{-1}} = \underset{T=1}{(T-1)SS^{-1}}$

$T^k = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quinto foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 2 a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} a & b & 3 & 4 \\ c & d & 6 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Provare le seguenti identità

b- $\det\begin{pmatrix} A_{h\times h} & B_{h\times(n-h)} \\ O_{(n-h)\times h} & D_{(n-h)\times(n-h)} \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$

ind. su n

c- $\det\begin{pmatrix} \boxed{A^1_{h_1\times h_1}} & B_{h_1\times h_2} & \dots & B_{h_1\times h_k} \\ O_{h_2\times h_1} & \boxed{A^2_{h_2\times h_2}} & \dots & B_{h_2\times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{h_k\times h_1} & O_{h_k\times h_2} & \dots & \boxed{A^k_{h_k\times h_k}} \end{pmatrix} = \det A^1 \cdot \dots \cdot \det A^k$, con $h_1 + \dots + h_k = n$.

Domanda 3 Siano $M = (M^1|\dots|M^n) \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{K})$, $x =^t (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{K}^n$, $b =^t (b_1,\dots,b_n) \in \mathbf{K}^n$ per cui $Mx = b$.
a- (Cramer) Si provi, utilizzando il fatto che $b = x_1M^1 + \dots + x_nM^n$, e calcolando il determinante della matrice $M[b/M^i]$, ottenuta da M sostituendo b alla i^a colonna di M

$$x_i = \frac{det\, M[b/M^i]}{det\, M}.$$

b- Se M è invertibile allora per l'elemento di riga i^a e colonna j^a della matrice inversa vale la formula:

$$\left(M^{-1}\right)^j_i = \frac{1}{det\, M}(-1)^{i+j} det\, M^{\not i}_{\not j}$$

ove $M^{\not i}_{\not j}$ è la matrice $(n-1)\times(n-1)$, ottenuta da M cancellando la j^a *riga* e la i^a *colonna*.

Domanda 4 (Determinante di Vandermonde: cfr. domanda 9 del terzo foglio di esercizi).

a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $a,\ b,\ c \in \mathbf{C}$.

$$\det M = \langle M \rangle$$

Domanda 2 a- Calcolare $\det \begin{pmatrix} a & b & 3 & 4 \\ c & d & 6 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Provare le seguenti identità

b- $\det \begin{pmatrix} A_{h\times h} & B_{h\times(n-h)} \\ \\ O_{(n-h)\times h} & D_{(n-h)\times(n-h)} \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$

c- $\det \begin{pmatrix} \boxed{A^1_{h_1\times h_1}} & B_{h_1\times h_2} & \dots & B_{h_1\times h_k} \\ O_{h_2\times h_1} & \boxed{A^2_{h_2\times h_2}} & \dots & B_{h_2\times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{h_k\times h_1} & O_{h_k\times h_2} & \dots & \boxed{A^k_{h_k\times h_k}} \end{pmatrix} = \det A^1 \cdot \ldots \cdot \det A^k$, con $h_1 + \cdots + h_k = n$.

a) SVILUPPO LAPLACE I^a COLONNA

$$a \left\langle \begin{matrix} d & 6 & -1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{matrix} \right\rangle - c \left\langle \begin{matrix} b & 3 & 4 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= ad \left\langle \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\rangle - cb \left\langle \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\rangle$$

c) si dimostra per induzione
su n
o su k

$$
\text{c- }\det \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{A^{(1)}_{h_1\times h_1}} & B_{h_1\times h_2} & \dots & B_{h_1\times h_k} \\ O_{h_2\times h_1} & \boxed{A^{(2)}_{h_2\times h_2}} & \dots & B_{h_2\times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{h_k\times h_1} & O_{h_k\times h_2} & \dots & \boxed{A^{(k)}_{h_k\times h_k}} \end{pmatrix}}_{M} = \det A^{(1)}\cdot\ldots\cdot\det A^{(k)}, \text{ con } h_1+\cdots+h_k=n.
$$

Base induttiva

$M = (a)$

vero

Passo induttivo

supponiamo vero per $m \leq n-1$

per ogni matrice $m\times m$

triang sup. a blocchi il det

ne è il prodotto dei det dei

blocchi diagonali

M $n\times n$ sviluppo rispetto alla

prima colonna =

$$= \sum_{i=1}^{h_1} (-1)^{1+i} \left(A^{(1)}\right)^1_i \det M^1_i$$

$M^{\cancel{1}}_{\cancel{i}}$ è ancora triangolare a blocchi

e il suo primo blocco diagonale è proprio $(A^{(1)})^{\cancel{1}}_{\cancel{i}}$, gli altri sono proprio i blocchi sulle diagonali di M

$$\det M = \left[\sum_{i=1}^{h_1} (-1)^{i+1} A^{(1)\,1}_{\;i} \cdot \det \left(A^{(1)}\right)^{\cancel{1}}_{\cancel{i}} \right] \cdot \det\left(A^{(2)}\right) \cdots \det\left(A^{(k)}\right)$$

$$= \det\left(A^{(1)}\right) \cdots$$

b- Dati $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ distinti, si consideri il polinomio $P(z) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$.

- Che grado al massimo ha P?
- Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di P e fattorizzarlo.

c- Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ qualsiasi, provare $\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

d- Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$ un riordinamento dei numeri $1, \dots, n$.
Provare che $\varepsilon(a) = \text{segno} \prod_{i>j}(a_i - a_j)$ conta la parità degli scambi per riportare $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine naturale $1 < \dots < n$. [Si consideri il determinante di Vandermonte dei numeri $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine e quello di $(1, \dots, n)$.]
- Che dire se $a = (a_1, \dots, a_n)$ sono solo alcuni dei numeri tra $1, \dots, n$, riordinati, ma con ripetizioni?

Domanda 5 Siano U, uno spazio vettoriale di dimensione finita n su K, ed $f : U \to U$ un endomorfismo lineare di U in sé . Si provi che:

la matrice associata ad f è la stessa in ogni base di U
se e solo se
f è un multiplo dell'identità su U

i.e. vi è $\lambda \in K$ per cui $f(u) = \lambda u$, per ogni $u \in U$.

[Può esser utile fissare una base di U e considerare quelle da lei ottenuta cambiando segno ad un suo elemento e quindi permutando i suoi elementi.]

Domanda 6 Sia M una matrice 3×3 che in una certa base di $\mathbf{R}^3$ rappresenta una rotazione per un angolo convesso attorno a qualche retta per l'origine. Calcolare l'ampiezza della rotazione in termini dei coefficienti di M.

Domanda 7 (Esercizio 1 del sesto appello 24 Luglio 2018) Sia A una matrice reale $n \times n$ per cui

$$A^2 - 4A + 3I = \mathrm{O}$$

ove I è la matrice identica $n \times n$ e O quella nulla.

a- Calcolare gli autovalori reali e complessi di A.

b- Dimostrare che A è diagonalizzabile.

Domanda 8 Dati due vettori $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ si indichi con $P(u, v)$ il parallelogramma di vertici: $0_{\mathbf{R}^2}$, u, v, $u + v$.
Identificando per colonne $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ con $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, si consideri la seguente funzione "area orientata di un parallelogramma", $A^o : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$:

$$A^o(u,v) = \begin{cases} \text{area di } P(u,v) & \text{se la rotazione seguendo l'angolo convesso di } u \text{ su } v \text{ è in senso antiorario} \\ -\text{ area di } P(u,v) & \text{se tale rotazione avviene in senso orario} \end{cases}.$$

a- Si mostri in modo geometrico elementare che:
$A^o(Id_{2\times 2}) = 1$, $A^o(u + \lambda v, v) = A^o(u, v + \mu u) = A^o(u, v)$, $A^o(\lambda u, v) = A^o(u, \lambda v) = \lambda A^o(u, v)$.

b- Si mostri che A^o è lineare per colonne (bilineare nei suoi argomenti).

c- Si mostri che $A^o(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.

Domanda 9 Si identifichi per colonne $\mathcal{M}(n,n,K)$ con $K^n \times {}_{n\,\text{volte}} \times K^n$, e si denoti con $(e^1,\dots,e^n)$ la base canonica di K^n.
Una funzione $\Lambda : K^n \times {}_{n\,\text{volte}} \times K^n \to K$, $\Lambda(u^1,\dots,u^n)$ si dice:
- *multilineare* se fissati $n-1$ argomenti è lineare nel rimanente.
- *alternante* se si annulla quando due argomenti sono linearmente dipendenti,
- normalizzata se $\Lambda(e^1,\dots,e^n) = 1$.

a- Se Λ è alternante normalizzata, e $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, $\sigma_i = \sigma(i)$, allora

$$\Lambda(e^{\sigma_1},\dots,e^{\sigma_n}) \;=\; \text{segno} \prod_{i<j}(\sigma_i - \sigma_j) = \det(e^{\sigma_1},\dots,e^{\sigma_n})$$

ovvero la parità del numero di scambi per riportare $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ in $(1,\dots,n)$.

b- Il determinante *è l'unica funzione* multilineare, alternante (rispetto le colonne viz. righe) e normalizzata.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Sesto foglio di esercizi

NOTAZIONE: se $M(t)$ è una matrice di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili si ha:
$$\lim_{h\to 0}\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \left((m_i^j(t))'\right)_{i,j} =_{\text{def}} M'(t).$$

Esercizio 1 (Regola di Leibniz per la derivata del determinante di una matrice di funzioni)

a- Si calcoli la dervata rispetto a t di: $\det\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ t^2 & 2t & 2\\ t^3 & 3t^2 & 6t\end{pmatrix}$.

b- Sia $M(t) = (M^1(t)|\dots|M^n(t))$, una matrice $n\times n$ di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili in $t\in\mathbf{R}$, con colonne nell'ordine $M^1,\dots,M^n$. Indicando con $M_{\not i}^{\not j}$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da M toglindo la i^a riga e la j^a colonna, provare che
$$\begin{aligned}(\det M)' &=\\ &= \sum_{j=1}^n \det\left(\dots M^{j-1}|(M^j)'|M^{j+1}\dots\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (m_i^j)'(-1)^{i+j}\det M_{\not i}^{\not j}\\ &=_{\text{def}} \operatorname{tr}[M'\operatorname{adj}M] = \left\langle M'\cdot {}^t(\operatorname{adj}M)\right\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}} =_{\text{def}} \langle M'\cdot \operatorname{cof}M\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}}\end{aligned}$$

NOTA: il determinante di una matrice $n\times n$ può esser considerato come un "prodotto in blocco" delle n colonne (righe), essendo lineare per colonne (righe): se le colonne di M si indicano con $M^1,\dots M^n$, scrivendo in modo suggestivo $\det M = M^1\cdot\dots\cdot M^n$ si avrebbe quindi come per il prodotto di funzioni
$$\left(M^1\cdot\ldots\cdot M^n\right)' = \sum_{i=1}^n \dots M^{i-1}\cdot\left(M^i\right)'\cdot M^{i+1}\dots$$

c- Se $M(0) = I_{n\times n}$ provare che
$$\det M(t) = 1 + t\cdot\operatorname{tr}M'(0) + o(t).$$

Che dire, per $M(t)$ generica matrice di funzioni derivabili in t, dello sviluppo di Taylor di $\det M(t)$ di ordine 1 e centrato in $t=0$?

d- Se, data un'altra $A(t)$ matrice $n\times n$ di funzioni (continue), si ha $M'(t) = A(t)M(t)$, provare che
$$(\det M(t))' = \operatorname{tr}A(t)\cdot\det M(t), \qquad \text{per cui} \qquad \det M(t) = d\cdot e^{\int^t[\operatorname{tr}A(\tau)]\,d\tau}.$$

Esercizio 2 Siano $M(t)$, $n\times k$, ed $N(t)$, $k\times m$, due matrici di funzioni derivabili.

a- Provare che $(M(t)N(t))' = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

b- Se $k=n$ e le $M(t)$ sono invertibili allora $M^{-1}(t)$ è derivabile e $\left(M^{-1}(t)\right)' = -M^{-1}(t)M'(t)M^{-1}(t)$.

c- Trovare un esempio in cui $\left(M^{-1}(t)\right)' \neq -M^{-2}(t)M'(t),\ -M'(t)M^{-2}(t)$.

Esercizio 3 a - Si $M(t)$ una matrice ortogonale di funzioni derivabili. Provare che ${}^tMM'$ è antisimmetrica e che $\operatorname{Im}(Id - {}^tM)\subseteq \operatorname{Ker}M'$.
b - Si considerino i moti $p(t)$, di egual rotazione uniforme attorno ad un asse *fisso*, per l'origine, individuato dal versore v, $||v|| = 1$, dati da $p(t) = M(t)u$, ove: le u sono le posizioni iniziali e $M(t)$ una matrice, di funzioni derivabili, per cui $M(0) = Id$. Provare che:
- ${}^tMM = Id$, $\det M = 1$,
- in generale la matrice associata all'applicazione lineare $L(x,y,z) = (a,b,c)\times(x,y,z)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

- detto Ω il vettore (costante) di velocità angolare, velocità $= p'(t) = M'u = \Omega \times Mu = \Omega \times p(t)$, si ha

$$M'(t)^t M(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

- ${}^tM$ ed M' commutano.

Esercizio 4 Data $B \in \mathcal{M}(n,n)$ si consideri l'endomorfismo $L : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,n)$ dato da

$$L(A) = BA.$$

a- Se $n = 2$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcolino gli autovalori di L, le dimensioni dei rispettivi autospazi, e si discuta la diagonalizzabilità di L.
b- In generale si provi che B ed L hanno gli stessi autovalori.
c- Si esprima il polinomio caratteristico di L in termini di quello di B,
[può convenire identificare $\mathcal{M}(n,n)$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, e quindi L con una matrice $n^2 \times n^2$].
- Trovare la relazione tra la molteplicità algebrica di un autovalore relativa a B con quella relativa ad L.
Si provi che se B è diagonalizzabile anche L lo è.
d- Si provi che un polinomio annulla B se e solo se annulla L. Se ne deduca che se L è digonalizzabile anche B lo è.
f- Si provi che ogni autovalore ha molteplicità geometrica rispetto ad L eguale ad n volte quella rispetto a B

[può esser utile considerare un elemento di $\operatorname{Ker}(\mu Id_{\mathcal{M}} - L)$ come funzione lineare da $\mathbf{R}^n \to \operatorname{Ker}(\mu Id_{\mathbf{R}^n} - B)$].

Esercizio 5 Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare *non identicamente nulla*, e $v_0 \in \mathbf{R}^n$ *non nullo*. Si definisce l'endomorfismo lineare $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ come segue

$$T(x) \;=\; x \;+\; f(x)v_0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

a- Per quali $v_0 \in \mathbf{R}^n$ l'endomorfismo T è diagonalizzabile?

b- Per quali è triangolabile? Si descriva come può essere trovata una base rispetto alla quale la matrice associata a T è triangolare superiore.

c- Si calcoli il polinomio minimo di T.