Nome: **Matricola:**

ALGEBRA LINEARE
Secondo compito a casa

(le domande con difficoltà superiore al necessario,
per verificare una buona preparazione, sono indicate con $\bullet$.)

Esercizio 1 a -Siano $v^1 = (1,-1,-1,1)$, $v^2 = (1,1,-1,-1)$, $v^3 = (1,-1,1,-1)$, $v^4 = (1,1,1,1)$: si mostri che nell'ordine dato sono una base di $\mathbf{R}^4$.
b- Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare definita da $Tv^1 = v^3$, $Tv^2 = v^4$, $Tv^3 = v^1 + v^2$, $Tv^4 = v^1+v^3$. In che elementi di $\mathbf{R}^4$, $T(1,0,0,0)$, $T(0,1,0,0)$, $T(0,0,1,0)$, $T(0,0,0,1)$, T trasforma i vettori della base canonica?

Esercizio 2 Quali sono le coordinate di $(0,1,2,3,4) \in \mathbf{C}^5$ nella base $\mathcal{B} = ((i,0,0,0,0),\ (i,i,0,0,0),\ (i,i,i,0,0),\ (i,i,i,i,0),\ (i,i,i,i,i))$?

Esercizio 3 a- Siano $v^1 = (a,b,c,d)$, $v^2 = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, $v^3 = (A,B,C,D)$ in $\mathbf{R}^4$, spazio cartesiano delle coordinate (x,y,z,u), una *base ortonormale* dello spazio tridimensionale definito dall' equazione $x+y+u=0$.

Trovare v^4 che li completi a base *ortonormale* di tutto $\mathbf{R}^4$.

b- Se $\mathcal{B} = (v^1,\ldots,v^n)$ è una base *ortonormale* di $\mathbf{R}^n$ allora le coordinate di $u = (x_1,\ldots x_n) \in \mathbf{R}^n$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date da

$$y_1 = \langle u \cdot v^1 \rangle, \ldots, y_n = \langle u \cdot v^n \rangle.$$

Esercizio 4 Siano U e V sottospazi di $\mathbf{R}^4$ definiti rispettivamente da
$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x - y + z - u = 0 \end{cases}$, e $\begin{cases} x + y = 0 \\ z + u = 0 \end{cases}$, e si indichino i loro ortogonali con $U^\perp$, $V^\perp$.

a- Si mostri che esiste un'unica funzione lineare $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ per cui $KerA = U^\perp \cap V^\perp$, e $A : U+V \to U+V$ sia l'identità su $U+V$.
b- Si mostri che A è simmetrica.
c- Si trovi una base di $U+V$ costituita da elementi di $U \cap V$, $U \cap V^\perp$, $U^\perp \cap V$.
d- Si scriva la matrice (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$) che identifica A.

Esercizio 5 Per quali $k \in \mathbf{N}$

esiste A matrice $n \times n$ per cui: $\quad rango\, A = k$ e $A^2 = \mathbf{O}_{n\times n}$?

Esercizio 6 Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare B, 3×3, e C, 4×4, possibilmente non nulle, per cui $\quad AB = \mathbf{O}_4$, e, $CA = \mathbf{O}_3$.

Esercizio 7 a- Per $a,\ b \in \mathbf{R}$, si calcolino $det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, e $|\, det(a+ib)\,|^2$.

b- Si calcolino $\left| det\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1+2i & -2i \end{pmatrix}\right|^2$, $det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 Sia $p(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j \in \mathbf{C}[z]$ di grado esattamente eguale a $d \in \mathbf{N}$.
Sia poi $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri distinti (iniettiva).

a- Mostrare che i polinomi della famiglia $\{p(z+w_n) : n \in \mathbf{N},\ n \leq d+1\} = \{p(z+w_0),\, p(z+w_1),\, \dots,\, p(z+w_{d+1})\}$ sono linearmente dipendenti su $\mathbf{C}$.

b- Se $d \leq 2$ allora rispettivamente: se $d = 0$ $p(z+w_0)$ è non nullo, se $d = 1$ $p(z+w_0)$ e $p(z+w_1)$ generano il sottospazio dei polinomi di grado al più 1, se $d = 2$ $p(z+w_0)$, $p(z+w_1)$, $p(z+w_2)$ generano quello dei polinomi di grado al più 2.

• c- Si mostri che $p(z+w_0), \dots, p(z+w_d)$ sono linearmente indipendenti.

[*Suggerimento 1: una possibile dimostrazione è per assurdo: fai le derivate "calcolate in $z = 0$", sino alla d^a, della combinazione lineare, dei polinomi, assunta nulla. Ricorsivamente all'indietro, partendo dall'ultima relazione, ottieni $d+1$ condizioni lineari sui $d+1$ coefficienti $\lambda_0, \dots \lambda_d$ della combinazione.* E.g.*: dalla relazione per la d^a derivata, una costante eguale per tutti i polinomi in giuoco, ottieni che $\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 0$.*
Sugg. 2: in alternativa provare con i polinomi di Taylor ed induzione ... ?].

Esercizio 9 Data $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & -1 & a^2+1 \end{pmatrix}$, $\quad a \in \mathbf{R}$:

a- Per quali a è triangolabile? b- Per quali è diagonalizzabile?

Esercizio 10 Data $\begin{pmatrix} 1 & -t & t-1 & t^2 \\ -1 & t+1 & 2t-2 & -t \\ 0 & 0 & t+1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$, $\quad t \in \mathbf{R}$:

a- Se ne calcoli il determinante.
b- Per quali t ha tutti gli autovalori in $\mathbf{R}$?
c- Per quali è diagonalizzabile?

Esercizio 11 Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineare per cui $T^2 \neq \mathbf{O}$ ma $T^3 \neq \mathbf{O}$.
a- L'unico autovalore (reale o complesso che sia) è il numero 0.
b- $KerT \subsetneq KerT^2 \subsetneq KerT^3$. c- T non è diagonalizzabile.

Esercizio 12 Sia r una retta passante per l'origine in $\mathbf{R}^3$, sia P un sotto-spazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ per cui $\mathbf{R}^3 = r \oplus P$, e $v_1,\, v_2 \in P$:
a- Se v_1 e v_2 sono indipendenti mostrare che vi è $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ per cui

$$\begin{array}{l} T(v_1) = v_2,\ T(v_2) = v_1 \\ T(v) = v,\ \text{per } v \in r \end{array},$$

mostrare che

$$\begin{array}{l} T \text{ è univocamente determinata} \\ T \text{ è invertibile} \\ dim\, Ker(T - Id) = 2 \\ T \text{ è diagonalizzabile} \end{array},$$

e trovarne tutti gli autovalori.

b- Se v_1 e v_2 sono dipendenti esiste una T che soddisfi le conizioni in a-? Nel caso sarebbe invertibile? univocamente determinata?

c- Si mostri che retta r, definita dalle equazioni $\left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{array} \right.$, e i vettori $v_1 = (1,1,1)$, $(1,-1,1)$ verificano le ipotesi generali. Quindi si scriva la matrice associata (nella base canonica di $\mathbf{R}^3$) a T.

Esercizio 13 Sia $T : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{M}(n)$ data da $T(A) = 3A - 2\,{}^tA$. Si mostri che T è diagonalizzabile.

Esercizio 14 Se $u \in \mathbf{R}^n$ e $v \in \mathbf{R}^n$ sono vettori di egual lunghezza si mostri che vi è $P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineare ortogonale per cui $P(u) = v$.

Esercizio 15 Se si conosce la matrice A di una rotazione nello spazio cartesiano $\mathbf{R}^3$ attorno ad un asse per l'origine, si calcoli (il coseno) dell'angolo di rotazione.

• **Esercizio 16** Se due matrici $A,\ B \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}(n,n,\mathbf{C})$ sono simili in $\mathcal{M}(n,n,\mathbf{C})$, cioè:

$$A = CBC^{-1} \text{ con } C \text{ matrice a coefficienti in } \mathbf{C}$$

allora sono simili in $\mathcal{M}(n,n,\mathbf{R})$, cioè:

$$A = MBM^{-1} \text{ con } M \text{ matrice a coefficienti in } \mathbf{R}.$$