Ingegneria dell'energia, A.A. 2020/21
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi Bis

Domande di introduzione

Domanda 1 Se A, B, U sono sottospazi vettoriali per cui $U \oplus A = U \oplus B$ allora $dim\, A = dim\, B$.

Domanda 2 Si consideri in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio P definito da $\begin{cases} x+y &= 0 \\ x-y+z+u &= 0 \end{cases}$.
a- Si determini $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare per cui $ImA = KerA = P$.
b- Si scriva la matrice della A determinata.

Domanda 3 Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore, con 0 sulla diagonale. Mostrare che $T^n = \mathbf{O}_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 4 (cfr. domanda 10 del quarto foglio) Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x \ + \ 2z &= 0 \end{cases}$, $2x+y+3z = 0$.
a- Determinare quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $KerL = r$, $ImL = \pi$?
b- Calcolare per una di esse la matrice che la identifica nella base canonica e quindi L^2 ed L^3.
c- Vi sono tali L per cui, per ogni m, L^m non è la matrice nulla?
d- In generale esprimere L^m, $m \geq 2$, in termini di L^2.

Domanda 5 (cfr. esercizio 2 del quarto foglio) Data due matrici reali $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$, $n \times m$, $L \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{R})$, $m \times n$, per cui

$$\text{per ogni } x \in \mathbf{R}^m,\ y \in \mathbf{R}^n \text{ si abbia } \langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot Ly \rangle_{\mathbf{R}^m}.$$

Si mostri che $L = {}^tM$.

Domanda 6 (cfr. domanda 19b ed esercizio 2 del quarto foglio) (pseudo inversa di Moore-Penrose nel caso di rango massimo)

Si consideri una matrice $A \in \mathcal{M}(n, k, \mathbf{R})$, $n \times k$, con $k < n$.
a- La matrice $A\,{}^tA$, non è mai invertibile.
b- La matrice ${}^tAA$ è invertibile se e solo se A è di rango massimo.
c- Se A è di rango massimo la matrice $A\,({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ dà la proiezione ortogonale su ImA.

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui

a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?
b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

Domanda 8 (cfr. domanda 18 quarto foglio di esercizi) Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore con 1 sulla diagonale.
Provare che se per qualche $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ si ha $T^k = Id_{\mathcal{M}(n)}$ allora $T = Id_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 9 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbf{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = \mathrm{O}_{n\times n}$, allora:

$$\mathbf{K}^n = Ker\,(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker\,(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker\,(A - aI_{n\times n}) = Im\,(A - bI_{n\times n})$$

Def

due matrici $n \times n$, A e B
sono **SIMILI** se

vi è N
$n \times n$ invertibile
per cui

$$A = NBN^{-1}$$

Scriveremo $A \sim B$

Oss

$A \sim B$

è una rel. di equiv

$$B = N^{-1} A N \qquad B \sim A$$

$$A = NBN^{-1} = KCK^{-1} \qquad B \sim A \sim C \Rightarrow B \sim C$$

$$K^{-1} N B N^{-1} K = C \qquad (K^{-1} N)^{-1} = N^{-1} K$$

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in M(n)$ per cui

$\lambda I \in$ a- per ogni $N \in M(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?

b- per ogni altra $N \in M(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

λI

$N \lambda I N^{-1} = \lambda I N N^{-1} = \lambda I \cdot I = \lambda I$

Domanda 5 Siano U, uno spazio vettoriale di dimensione finita n su K, ed $f : U \to U$ un endomorfismo lineare di U in sé . Si provi che:

la matrice associata ad f è la stessa in ogni base di U

se e solo se

f è un multiplo dell'identità su U

$$M_B = J_B \circ f \circ J_B^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} U_B \arrow[r, "f"] & U_B \arrow[d, "J_B"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "J_B"] \arrow[r, "M_B"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

i.e. vi è $\lambda \in K$ per cui $f(u) = \lambda u$, per ogni $u \in U$.

[Può esser utile fissare una base di U e considerare quelle da lei ottenuta cambiando segno ad un suo elemento e quindi permutando i suoi elementi.]

La domanda 5 è equivalente a 7a

Infatti

1) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi: $M_{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B}'}(f)$ simili

2) Se M è simile a $M_{\mathcal{B}}(f)$ $\mathcal{B}$ base vi è una base $\mathcal{B}'$ per cui

$$M = M_{\mathcal{B}'}(f)$$

D7a è quindi equindi equivalente alla D5

$f: U \longrightarrow U$ lineare

$\mathcal{B}$ base di U

$\mathcal{B} = (v^1, \dots, v^n) \qquad v^i \in U$

$M_{\mathcal{B}} =: M$

$$f(v^h) = M^h_1 v^1 + M^h_2 v^2 + \dots + M^h_n v^n$$

$$M e_h = {}^t(M^h_1, M^h_2, \dots, M^h_n)$$

$$\mathcal{B}' = (\underset{w^1}{\overset{\shortparallel}{v^2}}, \underset{w^2}{\overset{\shortparallel}{v^1}}, v^3, \dots, v^n) \qquad M_{\mathcal{B}'} =: M'$$

$$M^2_1 v^1 + M^2_2 v^2 + \dots + = f(v^2) = f(w^1) = (M')^1_1 w^1 + (M')^1_2 w^2 + \dots +$$

$$M^2_1 = (M')^1_2 = M^1_2$$

$$M^2_2 = (M')^1_1 = M^1_1$$

Si ripete il ragionamento fatto per 1 e 2, in generale per $i<j$

$$\mathcal{B}' \quad \overset{w^i}{v^j} \quad v^{i+1} \cdots \quad v^{j-1} \quad \overset{w^j}{v^i}$$

post $i°$ posto $j°$

$$\ldots M^i_i v^i + \ldots M^j_i v^j + \ldots = f(v^i) = f(w^j) = \ldots (M')^j_i w_i + \ldots (M')^j_j w_j$$

$$* \quad M^i_j = (M')^j_i = M^j_i$$

$$** \quad M^i_i = M^j_j = M^j_j$$

ipotesi

M è simm. * costante sulla diag.

$$M = \begin{array}{c|cccc|c} & & & & j & \\ \hline & \lambda & & & \circ & i \\ & & \ddots & & & \\ j & \circ & & \ddots & & \\ & & & & \lambda & \\ \hline & i & & & & \end{array}$$

$\lambda = M^1_1$ ${}^tM = M$

$$M = \lambda I + S$$

$S = {}^tS$ con diag nulla

$V^1 \ldots V^n$ TROVARE UNA BASE

M_B PER CUI M

È DIAGONALE

$e^1 \ldots e^n$ M

$e^j \ldots e^i$ $\Longrightarrow$ $M = {}^tM$ COST SU DIAG

i^b j^o

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $M^j_i = 0$ SE $i \neq j$

$v^1 - - - v^n$

$X = 0$

$\Updownarrow$

$X = -X$

$M^j_i = -M^j_i$

cosa fare su una base perché nella base ottenuta cambi segno la prima coord..

$\mathbb{R}^2 \ni (1,2) =$

$= e_1 + 2e_2$

in che base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2)$

$\underline{e_1 + 2e_2} = -w_1 + 2w_2$??

$= (-1, 2)_{\mathcal{B}'}$!!

$w^1 = -e_1$

$w^2 = e_2$

$\mathcal{B}'$

w^i

$\ldots - v^i \ldots$

$i°$ posto

$M_{\mathcal{B}'} = M' \quad h < i < k$

$f(-v^i) = f(w^i) = \ldots (M')^i_h v^h + \ldots (M')^i_i (-v^i) + \ldots + (M')^i_k v^k$

$\shortparallel$

$-f(v^i)$

$=$

$-(M^i_1 v^1 + \ldots + M^i_n v^n)$

$0_V = \ldots (M^i_h + (M')^i_h) v^h + \ldots (M^i_i - (M')^i_i) v^i + \ldots (M^i_k + (M')^i_k) v_k + \ldots$

$-M^i_h = M'^i_h = M^i_h$

$=$ IPOTESI

$\forall j \neq i$

$M^i_j = 0$

CONCLUSIONE

M è diagonale

$M_i^j = 0 \quad i \neq j$

M è costante
sulla diag.

$M = \lambda I$

D7b

$\{\lambda I : \lambda\} \subseteq \{M : NM = MN \ \forall N \text{ matrice}\}$

$\subseteq \{M : NM = MN \ \forall N \text{ invertibile}\}$

$= \{M : M = N^{-1}MN \ \forall N\} =$

$= \{\lambda I : \lambda\}$

Domanda 9 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbb{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = O_{n\times n}$, allora:

$$\mathbb{K}^n = Ker\,(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker\,(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker\,(A - aI_{n\times n}) = Im\,(A - bI_{n\times n})$$

$(f - a\,id) \circ (f - b\,id)$ = funzione nulla

Già fatto

$$O = (A - aI)(A - bI) = (A - bI)(A - aI)$$

$$Im(A - aI) \overset{*}{\subseteq} Ker(A - bI)$$

$$n - \dim Ker(A - aI) = \dim Im(A - aI) \leq \dim Ker(A - bI)$$

$$n \leq \dim Ker(A - bI) + \dim Ker(A - aI) =$$

$$= \dim(Ker(A - aI) + Ker(A - bI)) + \cancel{\dim(Ker(A - aI) \cap Ker(A - bI))}$$

$*$ $Ker(A - bI) \cap Ker(A - aI) = (0)$ Poiché $a \neq b$

$*$ $Ax = bx$ e $Ax = ax$ $\Rightarrow x = 0$

$$= \dim(\underbrace{Ker(A - aI) + Ker(A - bI)}_{\text{SOTTOSPAZIO}}) \leq n$$

Quindi $Ker(A - aI) \oplus Ker(A - bI) = \mathbb{R}^n$

$$\dim Im(A - aI) = n - \dim Ker(A - aI) = \dim Ker(A - bI)$$

da $*$ $Im(A - aI) = Ker(A - bI)$ $\blacksquare$

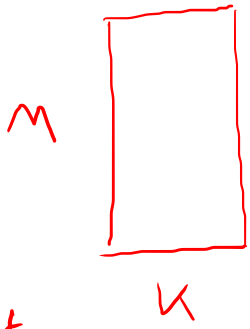
Domanda 6 (cfr. domanda 19b ed esercizio 2 del quarto foglio) (pseudo inversa di Moore-Penrose nel caso di rango massimo)

Si consideri una matrice $A \in M(n, k, \mathbf{R})$, $n \times k$, con $k < n$.

a- La matrice $A\,{}^tA$, non è mai invertibile.

b- La matrice ${}^tAA$ è invertibile se e solo se A è di rango massimo.

c- Se A è di rango massimo la matrice $A\,({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ dà la proiezione ortogonale su ImA.

a. 

$= A \qquad k < n$

$\underbrace{A \cdot {}^tA}_{n \times n}$ $\quad n \times k \quad k \times n$

non è mai invertibi-

per rango ${}^tA \le k$

$\Downarrow$

rango $A\,{}^tA \le k < n$

b $\underbrace{{}^tA \cdot A}_{k \times k}$ $\quad k \times n \quad n \times k$ invert. $\Leftrightarrow$ $rk A = k$

$\Rightarrow)$ ${}^tAA$ è invert. $rk\,{}^tAA = k \Rightarrow$

$\Rightarrow rk A = k$

$\Leftarrow)$ $rk A = k$

$\underset{m\times k}{\mathrm{rk}\,A} = k \implies {}^tAA$ invert.

V sttp $\mathbb{R}^m$

$\mathrm{Im}\,A = (\mathrm{Ker}\,{}^tA)^{\perp} =$

$= \{ v \in \mathbb{R}^m : \forall w \;\; {}^tAw = 0 \implies \langle v \cdot w \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \}$

$V \cap V^{\perp} = (0_{\mathbb{R}^m})$

$\Downarrow$

x

$\langle x \cdot x \rangle = |x|^2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$

$= 0$

$A : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^m$

${}^tA : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$

$\mathrm{Im}\,A \cap \mathrm{Ker}\,{}^tA = (0_{\mathbb{R}^n})$

${}^tA\big|_{\mathrm{Im}\,A}$ è iniettiva

$\mathrm{rk}\,A = k \implies A$ iniettiva

${}^tAA$ è iniett.

A di rango massimo
$m \times k$ $\quad k$

$$(A^1 | \ldots | A^k) = A$$

$$\boxed{A} \boxed{({}^tAA)^{-1}\,{}^tA} =: P$$

$$\Downarrow$$

$\operatorname{Im} P \subseteq \operatorname{Im} A$

$\dim \operatorname{Im} P$

P è la proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} A$

$P^2 = P$?

$$A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\cancel{A}\cdot A\cancel{({}^tAA)}^{-1}\,{}^tA =$$
$$= A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA = P$$

$P = {}^tP$

$$ {}^t(A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA) = {}^{tt}A\;{}^t({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$$
$$= A\;({}^t({}^tAA))^{-1}\,{}^tA$$
$$= A({}^tA\cdot{}^{tt}A)^{-1}\,{}^tA = P$$

${}^tM$ invert
$\Uparrow$
M invert.

$${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$$

$${}^t(M^{-1})\,{}^tM = I_d$$
$$\Updownarrow$$
$${}^{tt}M^t({}^t(M^{-1})) = I_d$$
$$\Updownarrow$$
$$M\,M^{-1} = I_d$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quinto foglio di esercizi

Domande di introduzione

Domanda 1 Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 2 a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} a & b & 3 & 4 \\ c & d & 6 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Provare le seguenti identità

b- $\det\begin{pmatrix} A_{h\times h} & B_{h\times(n-h)} \\ \mathrm{O}_{(n-h)\times h} & D_{(n-h)\times(n-h)} \end{pmatrix} = \det A\cdot\det D.$

c- $\det\begin{pmatrix} \boxed{A^1_{h_1\times h_1}} & B_{h_1\times h_2} & \dots & B_{h_1\times h_k} \\ \mathrm{O}_{h_2\times h_1} & \boxed{A^2_{h_2\times h_2}} & \dots & B_{h_2\times h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O}_{h_k\times h_1} & \mathrm{O}_{h_k\times h_2} & \dots & \boxed{A^k_{h_k\times h_k}} \end{pmatrix} = \det A^1\cdot\ldots\cdot\det A^k$, con $h_1+\cdots+h_k=n$.

Domanda 3 Siano $M=(M^1|\ldots|M^n)\in\mathcal{M}(n,n,\mathbf{K})$, $x={}^t(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{K}^n$, $b={}^t(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbf{K}^n$ per cui $Mx=b$.
a- (Cramer) Si provi, utilizzando il fatto che $b=x_1M^1+\cdots+x_nM^n$, e calcolando il determinante della matrice $M[b/M^i]$, ottenuta da M sostituendo b alla i^a colonna di M

$$x_i=\frac{det\,M[b/M^i]}{det\,M}.$$

b- Se M è invertibile allora per l'elemento di riga i^a e colonna j^a della matrice inversa vale la formula:

$$\left(M^{-1}\right)^j_i=\frac{1}{det\,M}(-1)^{i+j}det\,M^{\not i}_{\not j}$$

ove $M^{\not i}_{\not j}$ è la matrice $(n-1)\times(n-1)$, ottenuta da M cancellando la j^a *riga* e la i^a *colonna*.

Domanda 4 (Determinante di Vandermonde: cfr. domanda 9 del terzo foglio di esercizi).

a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $a,\,b,\,c\in\mathbf{C}$.

Domanda 3 Siano $M = (M^1|\dots|M^n) \in \mathcal{M}(n,n,\mathbf{K})$, $x = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{K}^n$, $b = {}^t(b_1,\dots,b_n) \in \mathbf{K}^n$ per cui $Mx = b$.

a- (Cramer) Si provi, utilizzando il fatto che $b = x_1M^1 + \dots + x_nM^n$, e calcolando il determinante della matrice $M[b/M^i]$, ottenuta da M sostituendo b alla i^a colonna di M

$$x_i = \frac{det\, M[b/M^i]}{det\, M}.$$

b- Se M è invertibile allora per l'elemento di riga i^a e colonna j^a della matrice inversa vale la formula:

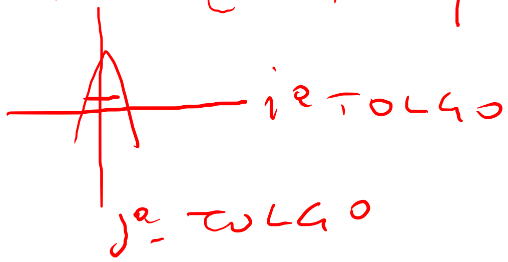
$$\left(M^{-1}\right)_i^j = \frac{1}{det\, M}(-1)^{i+j} det\, M_{j\!\!/}^{i\!\!/}$$

ove $M_{j\!\!/}^{i\!\!/}$ è la matrice $(n-1)\times(n-1)$, ottenuta da M cancellando la j^a *riga* e la i^a *colonna*.

$Mx = b \qquad x_1 M^1 + \dots + x_n M^n = b$

$A[v/A^i] = [\dots A^{i-1} | v | A^{i+1} \dots]$

$A_{\cancel{i}}^{\cancel{j}}$



$$x_i = \frac{det\, M[b/M^i]}{det}$$

$$Mx = b$$

$$\det M[b/M^i] =$$

$$= \det M[x_1 M^1 + \dots + x_i M^i \dots x_n M^n / M^i]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\det M[M^k/M^i]}_{\text{ha la } k^a \text{ e la } i^e \text{ colonne uguali}}$$

se $k \neq i$

$$\det M[M^k/M^i] = 0$$

$$= x_i \det M[M^i/M^i]$$

$$= x_i \det M$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2020/21
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quinto foglio di esercizi Bis

Domanda 1 (cfr. domanda 3 del quarto foglio) Data una matrice M, $n \times n$ si definisce la *matrice aggiunta di M*, la matrice di componente di i^a riga e j^a collonna:

$$(adj M)_i^j = (-1)^{i+j} det\, M^{\cancel{i}}_{\cancel{j}}.$$

Verificare che in generale (non solo quando M sia invertibile, d.3 quarto foglio) vale

$$M\, adjM = det\, M \cdot Id_{n \times n}.$$

$$(adj\, M)_i^j = (-1)^{i+j}\, det\, M^{\cancel{i}}_{\cancel{j}}$$

$$M\, adj M = (det\, M) \cdot Id$$

$$det\, M \neq 0 \qquad (M^{-1})^j =: x \qquad Mx = e^j$$

b

uso Cramer

SVILUPPO per le colonn

$$(M^{-1})_i^j = \frac{det\, M[e^j / M^i]}{det\, M} = \frac{(-1)^{i+j}\, det\, M^{\cancel{i}}_{\cancel{j}}}{det\, M} = \frac{(adj\, M)_i^j}{det\, M}$$

$\det M = 0$

$$(M \cdot \operatorname{adj} M)_i^j =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} M_i^l (\operatorname{adj} M)_l^j =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} M_i^l (-1)^{l+j} \det M_{\cancel{j}}^{\cancel{l}}$$

$i = j$

$i \neq j$

$$\sum_{l=1}^{n} M_i^l (-1)^{l+i} \det M_{\cancel{i}}^{\cancel{l}}$$

Il sviluppo i^a riga

$\det M = 0$

Lo vedo come sviluppo per la j^a riga

$M[M_i / M_j]$

con due righe uguali

b- Dati $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ distinti, si consideri il polinomio $P(z) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$.

- Che grado al massimo ha P? - Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di P e fattorizzarlo.

c- Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ qualsiasi, provare $\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$.

d- Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$ un riordinamento dei numeri $1, \dots, n$.
Provare che $\varepsilon(a) = \text{segno} \prod_{i>j}(a_i - a_j)$ conta la parità degli scambi per riportare $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine naturale $1 < \dots < n$. [Si consideri il determinante di Vandermonte dei numeri $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine e quello di $(1, \dots, n)$.]
- Che dire se $a = (a_1, \dots, a_n)$ sono solo alcuni dei numeri tra $1, \dots, n$, riordinati, ma con ripetizioni?

* **Domanda 5** Siano U, uno spazio vettoriale di dimensione finita n su K, ed $f : U \to U$ un endomorfismo lineare di U in sé . Si provi che:

la matrice associata ad f è la stessa in ogni base di U
se e solo se
f è un multiplo dell'identità su U

i.e. vi è $\lambda \in K$ per cui $f(u) = \lambda u$, per ogni $u \in U$.

[Può esser utile fissare una base di U e considerare quelle da lei ottenuta cambiando segno ad un suo elemento e quindi permutando i suoi elementi.]

PROVA A CASA

Domanda 6 Sia M una matrice 3×3 che in una certa base di $\mathbf{R}^3$ rappresenta una rotazione per un angolo convesso attorno a qualche retta per l'origine. Calcolare l'ampiezza della rotazione in termini dei coefficienti di M.

Domanda 7 (Esercizio 1 del sesto appello 24 Luglio 2018) Sia A una matrice reale $n \times n$ per cui

$$A^2 - 4A + 3I = \mathrm{O}$$

ove I è la matrice identica $n \times n$ e O quella nulla.

a- Calcolare gli autovalori reali e complessi di A. b- Dimostrare che A è diagonalizzabile.

RIC. GIULIA FIDANZA

Domanda 8 Dati due vettori $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ si indichi con $P(u, v)$ il parallelogramma di vertici: $0_{\mathbf{R}^2}$, u, v, $u + v$.
Identificando per colonne $\mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R})$ con $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, si consideri la seguente funzione "area orientata di un parallelogramma", $A^o : \mathcal{M}(2, 2, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$:

$$A^o(u, v) = \begin{cases} \text{area di } P(u, v) & \text{se la rotazione seguendo l'angolo convesso di } u \text{ su } v \text{ è in senso antiorario} \\ -\text{ area di } P(u, v) & \text{se tale rotazione avviene in senso orario} \end{cases}.$$

a- Si mostri in modo geometrico elementare che:
$A^o(Id_{2\times 2}) = 1,\ A^o(u + \lambda v, v) = A^o(u, v + \mu u) = A^o(u, v),\ A^o(\lambda u, v) = A^o(u, \lambda v) = \lambda A^o(u, v).$

b- Si mostri che A^o è lineare per colonne (bilineare nei suoi argomenti).

c- Si mostri che $A^o(u, v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.

Domanda 4 (Determinante di Vandermonde: cfr. domanda 9 del terzo foglio di esercizi).

a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $a,\, b,\, c \in \mathbf{C}$.

b- Dati $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ distinti, si consideri il polinomio $P(z) = \det\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$.

- Che grado al massimo ha P?
- Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di P e fattorizzarlo.

c- Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ qualsiasi, provare $\det\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

d- Sia $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un riordinamento dei numeri $1, \ldots, n$.
Provare che $\varepsilon(a) = \text{segno} \prod_{i>j}(a_i - a_j)$ conta la parità degli scambi per riportare $(a_1, \ldots, a_n)$ nell'ordine naturale $1 < \cdots < n$. [Si consideri il determinante di Vandermonte dei numeri $(a_1, \ldots, a_n)$ nell'ordine e quello di $(1, \ldots, n)$.]
- Che dire se $a = (a_1, \ldots, a_n)$ sono solo alcuni dei numeri tra $1, \ldots, n$, riordinati, ma con ripetizioni?

Domanda 9 Si identifichi per colonne $\mathcal{M}(n,n,K)$ con $K^n \times_{\,n\,\text{volte}} \times K^n$, e si denoti con $(e^1,\dots,e^n)$ la base canonica di K^n.
Una funzione $\Lambda : K^n \times_{\,n\,\text{volte}} \times K^n \to K$, $\Lambda(u^1,\dots,u^n)$ si dice:
- *multilineare* se fissati $n-1$ argomenti è lineare nel rimanente.
- *alternante* se si annulla quando due argomenti sono linearmente dipendenti,
- normalizzata se $\Lambda(e^1,\dots,e^n)=1$.

a- Se Λ è alternante normalizzata, e $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, $\sigma_i=\sigma(i)$, allora

$$\Lambda(e^{\sigma_1},\dots,e^{\sigma_n}) \;=\; \text{segno} \prod_{i<j}(\sigma_i-\sigma_j) = \det(e^{\sigma_1},\dots,e^{\sigma_n})$$

ovvero la parità del numero di scambi per riportare $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ in $(1,\dots,n)$.

b- Il determinante *è l'unica funzione* multilineare, alternante (rispetto le colonne viz. righe) e normalizzata.

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Sesto foglio di esercizi

NOTAZIONE: se $M(t)$ è una matrice di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \left((m_i^j(t))'\right)_{i,j} =_{\rm def} M'(t).$$

Esercizio 1 (Regola di Leibniz per la derivata del determinante di una matrice di funzioni)

a- Si calcoli la dervata rispetto a t di: $\det\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ t^2 & 2t & 2\\ t^3 & 3t^2 & 6t\end{pmatrix}$.

b- Sia $M(t) = (M^1(t)|\ldots|M^n(t))$, una matrice $n\times n$ di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili in $t\in\mathbf{R}$, con colonne nell'ordine $M^1,\ldots,M^n$. Indicando con $M_{\not i}^{\not j}$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da M toglindo la i^a riga e la j^a colonna, provare che

$$\begin{aligned}(\det M)' &= \\ &= \sum_{j=1}^n \det\left(\ldots M^{j-1}|(M^j)'|M^{j+1}\ldots\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (m_i^j)'(-1)^{i+j}\det M_{\not i}^{\not j}\\ &=_{\rm def} \mathrm{tr}\,[M'\mathrm{adj}M] = \left\langle M'\cdot{}^t(\mathrm{adj}M)\right\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}} =_{\rm def} \langle M'\cdot\mathrm{cof}M\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}}\end{aligned}$$

NOTA: il determinante di una matrice $n\times n$ può esser considerato come un "prodotto in blocco" delle n colonne (righe), essendo lineare per colonne (righe): se le colonne di M si indicano con $M^1,\ldots M^n$, scrivendo in modo suggestivo $\det M = M^1\cdot\cdots\cdot M^n$ si avrebbe quindi come per il prodotto di funzioni

$$\left(M^1\cdot\ldots\cdot M^n\right)' = \sum_{i=1}^n \ldots M^{i-1}\cdot\left(M^i\right)'\cdot M^{i+1}\ldots$$

c- Se $M(0) = I_{n\times n}$ provare che

$$\det M(t) = 1 + t\cdot\mathrm{tr}M'(0) + o(t).$$

Che dire, per $M(t)$ generica matrice di funzioni derivabili in t, dello sviluppo di Taylor di $\det M(t)$ di ordine 1 e centrato in $t=0$?

d- Se, data un'altra $A(t)$ matrice $n\times n$ di funzioni (continue), si ha $M'(t) = A(t)M(t)$, provare che

$$(\det M(t))' = \mathrm{tr}A(t)\cdot\det M(t), \qquad \text{per cui} \qquad \det M(t) = d\cdot e^{\int^t[\mathrm{tr}A(\tau)]\,d\tau}.$$

Esercizio 2 Siano $M(t)$, $n\times k$, ed $N(t)$, $k\times m$, due matrici di funzioni derivabili.

a- Provare che $(M(t)N(t))' = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

b- Se $k=n$ e le $M(t)$ sono invertibili allora $M^{-1}(t)$ è derivabile e $\left(M^{-1}(t)\right)' = -M^{-1}(t)M'(t)M^{-1}(t)$.

c- Trovare un esempio in cui $\left(M^{-1}(t)\right)' \neq -M^{-2}(t)M'(t),\ -M'(t)M^{-2}(t)$.

Esercizio 3 a - Sia $M(t)$ una matrice ortogonale di funzioni derivabili. Provare che ${}^tMM'$ è antisimmetrica.

b - Si considerino i moti $p(t)$, di egual rotazione uniforme attorno ad un asse *fisso*, per l'origine, individuato dal versore v, $||v|| = 1$, dati da $p(t) = M(t)u$, ove: le u sono le posizioni iniziali e $M(t)$ una matrice, di funzioni derivabili, per cui $M(0) = Id$. Provare che:

- ${}^tMM = Id$, $\det M = 1$,
- in generale la matrice associata all'applicazione lineare $L(x,y,z) = (a,b,c)\times(x,y,z)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

- detto Ω il vettore (costante) di velocità angolare, velocità $= p'(t) = M'u = \Omega \times Mu = \Omega \times p(t)$, si ha

$$M'(t)^t M(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

- ${}^tM$ ed M' commutano.

Esercizio 4 Data $B \in \mathcal{M}(n,n)$ si consideri l'endomorfismo $L : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,n)$ dato da

$$L(A) = BA.$$

a- Se $n = 2$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcolino gli autovalori di L, le dimensioni dei rispettivi autospazi, e si discuta la diagonalizzabilità di L.
b- In generale si provi che B ed L hanno gli stessi autovalori.
c- Si esprima il polinomio caratteristico di L in termini di quello di B,
[può convenire identificare $\mathcal{M}(n,n)$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, e quindi L con una matrice $n^2 \times n^2$].
- Trovare la relazione tra la molteplicità algebrica di un autovalore relativa a B con quella relativa ad L.
Si provi che se B è diagonalizzabile anche L lo è.
d- Si provi che un polinomio annulla B se e solo se annulla L. Se ne deduca che se L è digonalizzabile anche B lo è.
f- Si provi che ogni autovalore ha molteplicità geometrica rispetto ad L eguale ad n volte quella rispetto a B

[può esser utile considerare un elemento di $\mathrm{Ker}\,(\mu Id_{\mathcal{M}} - L)$ come funzione lineare da $\mathbf{R}^n \to \mathrm{Ker}\,(\mu Id_{\mathbf{R}^n} - B)$].

Esercizio 5 Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare *non identicamente nulla*, e $v_0 \in \mathbf{R}^n$ *non nullo*. Si definisce l'endomorfismo lineare $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ come segue

$$T(x) \;=\; x \;+\; f(x)v_0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

a- Per quali $v_0 \in \mathbf{R}^n$ l'endomorfismo T è diagonalizzabile?

b- Per quali è triangolabile? Si descriva come può essere trovata una base rispetto alla quale la matrice associata a T è triangolare superiore.

c- Si calcoli il polinomio minimo di T.

Esercizio 1 (Regola di Leibniz per la derivata del determinante di una matrice di funzioni)

a- Si calcoli la dervata rispetto a t di: $\det\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 2 \\ t^3 & 3t^2 & 6t \end{pmatrix}$.

b- Sia $M(t) = (M^1(t)|\ldots|M^n(t))$, una matrice $n \times n$ di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili in $t \in \mathbf{R}$, con colonne nell'ordine $M^1, \ldots, M^n$. Indicando con $M_{\not i}^{\not j}$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da M togliendo la i^a riga e la j^a colonna, provare che

$$
\begin{aligned}
(\det M)' &= \\
&= \sum_{j=1}^{n} \det\left(\ldots M^{j-1}|(M^j)'|M^{j+1}\ldots\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (m_i^j)'(-1)^{i+j}\det M_{\not i}^{\not j} \\
&=_{\text{def}} \operatorname{tr}\left[M'\operatorname{adj}M\right] = \left\langle M' \cdot {}^t\left(\operatorname{adj}M\right)\right\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}} =_{\text{def}} \left\langle M' \cdot \operatorname{cof}M\right\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}}
\end{aligned}
$$

NOTA: il determinante di una matrice $n\times n$ può esser considerato come un "prodotto in blocco" delle n colonne (righe), essendo lineare per colonne (righe): se le colonne di M si indicano con $M^1, \ldots M^n$, scrivendo in modo suggestivo $\det M = M^1 \cdot \cdots \cdot M^n$ si avrebbe quindi come per il prodotto di funzioni

$$\left(M^1 \cdot \ldots \cdot M^n\right)' = \sum_{i=1}^{n} \ldots M^{i-1} \cdot \left(M^i\right)' \cdot M^{i+1} \ldots$$

c- Se $M(0) = I_{n\times n}$ provare che

$$\det M(t) = 1 + t \cdot \operatorname{tr}M'(0) + o(t).$$

Che dire, per $M(t)$ generica matrice di funzioni derivabili in t, dello sviluppo di Taylor di $\det M(t)$ di ordine 1 e centrato in $t=0$?

d- Se, data un'altra $A(t)$ matrice $n\times n$ di funzioni (continue), si ha $M'(t) = A(t)M(t)$, provare che

$$(\det M(t))' = \operatorname{tr}A(t)\cdot\det M(t), \qquad \text{per cui} \qquad \det M(t) = d \cdot e^{\int^t [\operatorname{tr}A(\tau)]\,d\tau}.$$

Esercizio 2 Siano $M(t)$, $n \times k$, ed $N(t)$, $k \times m$, due matrici di funzioni derivabili.

a- Provare che $(M(t)N(t))' = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

a bis) Trovare $M(t)$ $(M^2)' \neq 2M'M,\ 2MM'$

b- Se $k = n$ e le $M(t)$ sono invertibili allora $M^{-1}(t)$ è derivabile e $\left(M^{-1}(t)\right)' = -M^{-1}(t)M'(t)M^{-1}(t)$.

c- Trovare un esempio in cui $\left(M^{-1}(t)\right)' \neq -M^{-2}(t)M'(t),\ -M'(t)M^{-2}(t)$.

Esercizio 3 a - Sia $M(t)$ una matrice ortogonale di funzioni derivabili. Provare che ${}^tMM'$ è antisimmetrica.

b - Si considerino i moti $p(t)$, di egual rotazione uniforme attorno ad un asse *fisso*, per l'origine, individuato dal versore v, $||v|| = 1$, dati da $p(t) = M(t)u$, ove: le u sono le posizioni iniziali e $M(t)$ una matrice, di funzioni derivabili, per cui $M(0) = Id$. Provare che:

- ${}^tMM = Id$, $\det M = 1$,
- in generale la matrice associata all'applicazione lineare $L(x, y, z) = (a, b, c) \times (x, y, z)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

- detto Ω il vettore (costante) di velocità angolare, velocità $= p'(t) = M'u = \Omega \times Mu = \Omega \times p(t)$, si ha

$$M'(t)\,{}^tM(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

- ${}^tM$ ed M' commutano.