FOGLIO 5

17 dic

D.4a $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

b- Dati $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ distinti, si consideri il polinomio $P(z) = \det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$.

- Che grado al massimo ha P?
- Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di P e fattorizzarlo.

c- Dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ qualsiasi, provare $\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

d- Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$ un riordinamento dei numeri $1, \dots, n$.
Provare che $\varepsilon(a) = \text{segno} \prod_{i>j}(a_i - a_j)$ conta la parità degli scambi per riportare $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine naturale $1 < \dots < n$. [Si consideri il determinante di Vandermonte dei numeri $(a_1, \dots, a_n)$ nell'ordine e quello di $(1, \dots, n)$.]
- Che dire se $a = (a_1, \dots, a_n)$ sono solo alcuni dei numeri tra $1, \dots, n$, riordinati, ma con ripetizioni?

* **Domanda 5** Siano U, uno spazio vettoriale di dimensione finita n su K, ed $f : U \to U$ un endomorfismo lineare di U in sé . Si provi che:

la matrice associata ad f è la stessa in ogni base di U
se e solo se
f è un multiplo dell'identità su U

i.e. vi è $\lambda \in K$ per cui $f(u) = \lambda u$, per ogni $u \in U$.

[Può esser utile fissare una base di U e considerare quelle da lei ottenuta cambiando segno ad un suo elemento e quindi permutando i suoi elementi.]

PROVA A CASA

Domanda 6 Sia M una matrice 3×3 che in una certa base di $\mathbf{R}^3$ rappresenta una rotazione per un angolo convesso attorno a qualche retta per l'origine. Calcolare l'ampiezza della rotazione in termini dei coefficienti di M.

Domanda 7 (Esercizio 1 del sesto appello 24 Luglio 2018) Sia A una matrice reale $n \times n$ per cui

$$A^2 - 4A + 3I = \mathrm{O}$$

ove I è la matrice identica $n \times n$ e O quella nulla.

a- Calcolare gli autovalori reali e complessi di A.

b- Dimostrare che A è diagonalizzabile.

RIC. GIULIA FIDANZA

Domanda 8 Dati due vettori $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ si indichi con $P(u,v)$ il parallelogramma di vertici: $0_{\mathbf{R}^2}$, u, v, $u + v$.
Identificando per colonne $\mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ con $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, si consideri la seguente funzione "area orientata di un parallelogramma", $A^o : \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$:

$$A^o(u,v) = \begin{cases} \text{area di } P(u,v) & \text{se la rotazione seguendo l'angolo convesso di } u \text{ su } v \text{ è in senso antiorario} \\ -\text{ area di } P(u,v) & \text{se tale rotazione avviene in senso orario} \end{cases}.$$

a- Si mostri in modo geometrico elementare che:
$A^o(Id_{2\times 2}) = 1$, $A^o(u + \lambda v, v) = A^o(u, v + \mu u) = A^o(u,v)$, $A^o(\lambda u, v) = A^o(u, \lambda v) = \lambda A^o(u,v)$.

b- Si mostri che A^o è lineare per colonne (bilineare nei suoi argomenti).

c- Si mostri che $A^o(u,v) = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.

Domanda 4 (Determinante di Vandermonde: cfr. domanda 9 del terzo foglio di esercizi).

a- Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, $a,\, b,\, c \in \mathbf{C}$.

b- Dati $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ distinti, si consideri il polinomio $P(z) = \det\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$.

- Che grado al massimo ha P?
- Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di P e fattorizzarlo.

c- Dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ qualsiasi, provare $\det\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

d- Sia $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un riordinamento dei numeri $1, \ldots, n$.
Provare che $\varepsilon(a) = \text{segno} \prod_{i>j}(a_i - a_j)$ conta la parità degli scambi per riportare $(a_1, \ldots, a_n)$ nell'ordine naturale $1 < \cdots < n$. [Si consideri il determinante di Vandermonte dei numeri $(a_1, \ldots, a_n)$ nell'ordine e quello di $(1, \ldots, n)$.]
- Che dire se $a = (a_1, \ldots, a_n)$ sono solo alcuni dei numeri tra $1, \ldots, n$, riordinati, ma con ripetizioni?

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = b - a$

$a^0 \quad b^0$

$a^1 \quad b^1$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

sviluppo per l'ultima colonna

$ab^2 - a^2 b - c(b^2 - a^2) + c^2(b - a) =$

$= ab(b - a) - c(b - a)(b + a) + c^2(b - a) =$

$= (b - a)(ab - cb - ca + c^2) =$

$$= (b-a)(ab - cb - ca + c^2) =$$

$$= (b-a)\big(a(b-c) + c(c-b)\big) =$$

$$= (b-a)(c-b)(c-a) = \prod_{1 \le j < i \le 3} (a_i - a_j)$$

$a = a_1$

$b = a_2$

$c = a_3$

b- Dati $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ distinti, si consideri il polinomio $P(z) = \det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & z \\ a_1^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & z^2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \\ a_1^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & z^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & z^{n-1} \end{pmatrix}$. A

- Che grado al massimo ha P? - Chi è il coefficiente del monomio di grado massimo?
- Trovare le radici di P e fattorizzarlo.

- $P(z)$ è un polinomio $(-1)^{n+1} \det A_{1}^{n} + (-1)^{n+2} z \det A_{2}^{n} + \ldots + (-1)^{n+k} z^{k-1} \det A_{k}^{n} + (-1)^{2n} z^{n-1} \det A_{n}^{n}$

non c'è z!

- $\det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}$

- $P(a_i) = \det \begin{pmatrix} 1 & & 1 & & 1 \\ a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_i^{n-1} & & a_i^{n-1} \end{pmatrix} = 0$

essendo P di grado $n-1$ ed essendo $a_1 \ldots a_{n-1}$ distinti radici di P sono le sole radici di P

$$P(z) = \prod_{i=1}^{n-1} (z - a_i) \cdot \det A_{n}^{n}$$

$\leq$ dati $a_1 \dots a_n$ numeri INDUZIONE SU n

CASO $a_1 \dots a_{n-1}$ DISTINTI

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = P(a_n) \stackrel{\downarrow}{=}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}$$

USIAMO L'IPOTESI INDUTTIVA

$$= \prod_{j=1}^{n-1} (a_n - a_j) \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (a_i - a_j) =$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

Se non fossero distinti $a_1 \dots a_{n-1}$ sia det $= 0$ sia il prod

Domanda 7 (Esercizio 1 del sesto appello 24 Luglio 2018) Sia A una matrice reale $n \times n$ per cui

$$A^2 - 4A + 3I = \mathrm{O}$$

ove I è la matrice identica $n \times n$ e O quella nulla.

a- Calcolare gli autovalori reali e complessi di A.

b- Dimostrare che A è diagonalizzabile.

$P(z) = z^2 - 4z + 3$ annulla la matrice

il polinomio minimo di A P_A divide P quindi gli autovalori di A sono le radici di P_A, quindi sono tra le radici di P

zeri di P $\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$

$P(z) = (z-3)(z-1)$

ci sono diversi casi

$(A - 3I)(A - I) = \mathrm{O}$

come visto $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A - 3I) \oplus \mathrm{Ker}(A - I)$

$\mathbb{R}^n = V_3 \oplus V_1$

Dobbiamo discutere tre casi non essendo detto che 1 e 3 siano entrambi autovalori

1) 1 autovalore cioè $V_1 \neq (0)$
3 non autovalore cioè $V_3 = (0)$
cioè $p_{min} = z - 1$ cioè $A = Id$

2) 1 non è autov i.e. $V_1 = (0)$
3 è autov. i.e. $V_3 \neq (0)$
ovvero $p_{min} = z - 3$ cioè $A = 3Id$

3) 1 e 3 autov. $V_1 \neq (0)$ $V_3 \neq (0)$
A sarebbe diagonalizzabile poiché

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 3 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix} = M^{-1}AM$$

Domanda 8 Dati due vettori $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ si indichi con $P(u,v)$ il parallelogramma di vertici: $0_{\mathbf{R}^2}$, u, v, $u+v$.

1

Identificando per colonne $\mathcal{M}(2,2,\mathbf{R})$ con $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, si consideri la seguente funzione "area orientata di un parallelogramma", $A^o : \mathcal{M}(2,2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$:

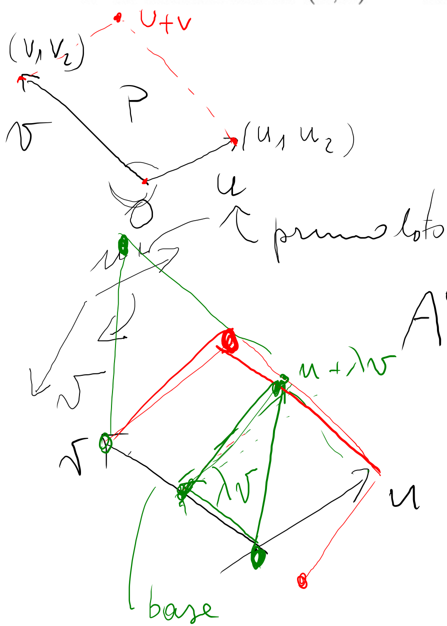
2

$$A^o(u,v) = \begin{cases} \text{area di } P(u,v) & \text{se la rotazione seguendo l'angolo convesso di } u \text{ su } v \text{ è in senso antiorario} \\ -\text{ area di } P(u,v) & \text{se tale rotazione avviene in senso orario} \end{cases}.$$

a- Si mostri in modo geometrico elementare che:
$A^o(Id_{2\times 2}) = 1$, $A^o(u+\lambda v, v) = A^o(u, v+\mu u) = A^o(u,v)$, $A^o(\lambda u, v) = A^o(u, \lambda v) = \lambda A^o(u,v)$.

b- Si mostri che A^o è lineare per colonne (bilineare nei suoi argomenti).

c- Si mostri che $A^o(u,v) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.



Prendo un Parallelogramma scelgo un vertice O e "oriento" il parallelogramma ordinando i due lati da O

$$A^o\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

IL PARALLELOGRAMMA DI U V (ROSSO)
HA STESSA BASE: V
E STESSA ALTEZZA A
DEL PARALL. DI U+λV, V (Verde)

$$A^\circ(u+w, v) = A^\circ(u,v) + A^\circ(w, v)$$

I) u e v dipendenti $v=0$ ok $v \neq 0$ $u = \lambda v$

$$A(\lambda v + w, v) = A(w,v) = A(w,v) + \lambda A(v,v) =$$

$$= A(w,v) + A(\lambda v, v)$$

II) u e v indipendenti

$$w = \lambda u + \mu v$$

$$A^\circ(u + \lambda u + \mu v / v) = A^\circ((1+\lambda) u + \underline{\mu v} / \underline{v}) =$$

$$= A^\circ((1+\lambda) u / v) = (1+\lambda) A^\circ(u/v) =$$

$$= A^\circ(u/v) + \lambda A^\circ(u/v) = \underline{A^\circ(u/v)} + \lambda A^\circ(u v)$$

$$= A^\circ(u, v) + A^\circ(\lambda u + \mu v / v)$$

$$= A^\circ(u, v) + A^\circ(w / v)$$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Sesto foglio di esercizi

NOTAZIONE: se $M(t)$ è una matrice di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili si ha:
$$\lim_{h\to 0}\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \left((m_i^j(t))'\right)_{i,j} =_{\text{def}} M'(t).$$

$N(h) \xrightarrow{h\to 0} L$ significa $N_i^j(h) \xrightarrow[h\to 0]{} L_i^j$

2) **Esercizio 1** (Regola di Leibniz per la derivata del determinante di una matrice di funzioni)

a- Si calcoli la dervata rispetto a t di: $\det\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ t^2 & 2t & 2\\ t^3 & 3t^2 & 6t\end{pmatrix}$.

b- Sia $M(t) = (M^1(t)|\dots|M^n(t))$, una matrice $n\times n$ di funzioni $m_i^j(t)$ derivabili in $t\in\mathbf{R}$, con colonne nell'ordine $M^1,\dots,M^n$. Indicando con $M_{\not i}^{\not j}$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da M toglindo la i^a riga e la j^a colonna, provare che
$$\begin{aligned}(\det M)' &= \\ &= \sum_{j=1}^n \det\left(\dots M^{j-1}|(M^j)'|M^{j+1}\dots\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (m_i^j)'(-1)^{i+j}\det M_{\not i}^{\not j}\\ &=_{\text{def}} \operatorname{tr}[M'\operatorname{adj}M] = \left\langle M'\cdot{}^t(\operatorname{adj}M)\right\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}} =_{\text{def}} \langle M'\cdot\operatorname{cof}M\rangle_{\mathbf{R}^{n^2}}\end{aligned}$$

$\operatorname{tr}\left[M'\operatorname{adj}M\right]_1^1$

$\sum_k M_1'^{\,k}\cdot(-1)^{k+1}\det M_{\not 1}^{\not k}$

$M' = (m_{ij}')$

$(\operatorname{adj}M)_i^j = (-1)^{i+j}\det M_{\not j}^{\not i}$

NOTA: il determinante di una matrice $n\times n$ può esser considerato come un "prodotto in blocco" delle n colonne (righe), essendo lineare per colonne (righe): se le colonne di M si indicano con $M^1,\dots M^n$, scrivendo in modo suggestivo $\det M = M^1\cdot\dots\cdot M^n$ si avrebbe quindi come per il prodotto di funzioni

$\sum_i\sum_k M_1'^{\,k}\,(-1)^{k+1}\det M_{\not 1}^{\not k}$
$$(M^1\cdot\dots\cdot M^n)' = \sum_{i=1}^n \dots M^{i-1}\cdot(M^i)'\cdot M^{i+1}\dots$$

c- Se $M(0) = I_{n\times n}$ provare che

$\det M(0) + t\,(\det M)'(0) + o(t)$
$$\boxed{\det M(t) = 1 + t\cdot\operatorname{tr}M'(0) + o(t).}$$

Che dire, per $M(t)$ generica matrice di funzioni derivabili in t, dello sviluppo di Taylor di $\det M(t)$ di ordine 1 e centrato in $t=0$?

d- Se, data un'altra $A(t)$ matrice $n\times n$ di funzioni (continue), si ha $M'(t) = A(t)M(t)$, provare che
$$(\det M(t))' = \operatorname{tr}A(t)\cdot\det M(t), \qquad \text{per cui} \qquad \det M(t) = d\cdot e^{\int^t[\operatorname{tr}A(\tau)]\,d\tau}.$$

1) **Esercizio 2** Siano $M(t)$, $n\times k$, ed $N(t)$, $k\times m$, due matrici di funzioni derivabili.

a- Provare che $(M(t)N(t))' = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

b- Se $k=n$ e le $M(t)$ sono invertibili allora $M^{-1}(t)$ è derivabile e $\left(M^{-1}(t)\right)' = -M^{-1}(t)M'(t)M^{-1}(t)$.

c- Trovare un esempio in cui $\left(M^{-1}(t)\right)' \neq -M^{-2}(t)M'(t),\ -M'(t)M^{-2}(t)$.

$A(h) \to L$
$B(h) \to \Lambda$
$A(h)B(h) \to L\Lambda$
infatti i coeff. del prodotto tra matrici sono somme e prodotti dei coeff. delle matrici che si stanno moltiplicando

CASA **Esercizio 3** a - Sia $M(t)$ una matrice ortogonale di funzioni derivabili. Provare che ${}^tMM'$ è anti-simmetrica.

b - Si considerino i moti $p(t)$, di egual rotazione uniforme attorno ad un asse *fisso*, per l'origine, individuato dal versore v, $||v||=1$, dati da $p(t) = M(t)u$, ove: le u sono le posizioni iniziali e $M(t)$ una matrice, di funzioni derivabili, per cui $M(0) = Id$. Provare che:

- ${}^tMM = Id$, $\det M = 1$,
- in generale la matrice associata all'applicazione lineare $L(x,y,z) = (a,b,c)\times(x,y,z)$ è

$$(a\,b\,c)\times(x\,y\,z) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- detto Ω il vettore (costante) di velocità angolare, velocità $= p'(t) = M'u = \Omega \times Mu = \Omega \times p(t)$, si ha

$\Omega = \omega \hat{v}$

$$M'(t)\,{}^tM(t) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

- ${}^tM$ ed M' commutano.

${}^tM M' = M'\,{}^tM$

Esercizio 4 Data $B \in \mathcal{M}(n,n)$ si consideri l'endomorfismo $L : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,n)$ dato da

$$L(A) = BA.$$

a- Se $n = 2$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcolino gli autovalori di L, le dimensioni dei rispettivi autospazi, e si discuta la diagonalizzabilità di L.
b- In generale si provi che B ed L hanno gli stessi autovalori.
c- Si esprima il polinomio caratteristico di L in termini di quello di B,
[può convenire identificare $\mathcal{M}(n,n)$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, e quindi L con una matrice $n^2 \times n^2$].
- Trovare la relazione tra la molteplicità algebrica di un autovalore relativa a B con quella relativa ad L.
Si provi che se B è diagonalizzabile anche L lo è.
d- Si provi che un polinomio annulla B se e solo se annulla L. Se ne deduca che se L è digonalizzabile anche B lo è.
f- Si provi che ogni autovalore ha molteplicità geometrica rispetto ad L eguale ad n volte quella rispetto a B

[può esser utile considerare un elemento di $\mathrm{Ker}\,(\mu Id_{\mathcal{M}} - L)$ come funzione lineare da $\mathbf{R}^n \to \mathrm{Ker}\,(\mu Id_{\mathbf{R}^n} - B)$].

Esercizio 5 Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare *non identicamente nulla*, e $v_0 \in \mathbf{R}^n$ *non nullo*. Si definisce l'endomorfismo lineare $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ come segue

$$T(x) \;=\; x \;+\; f(x)v_0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

a- Per quali $v_0 \in \mathbf{R}^n$ l'endomorfismo T è diagonalizzabile?

b- Per quali è triangolabile? Si descriva come può essere trovata una base rispetto alla quale la matrice associata a T è triangolare superiore.

c- Si calcoli il polinomio minimo di T.

Esercizio 2 Siano $M(t)$, $n \times k$, ed $N(t)$, $k \times m$, due matrici di funzioni derivabili.

a- Provare che $(M(t)N(t))' = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

a bis) Trovare $M(t)$

$(M^2)' \neq 2M'M,\ 2MM'$

b- Se $k = n$ e le $M(t)$ sono invertibili allora $M^{-1}(t)$ è derivabile e $\left(M^{-1}(t)\right)' = -M^{-1}(t)M'(t)M^{-1}(t)$.

c- Trovare un esempio in cui $\left(M^{-1}(t)\right)' \neq -M^{-2}(t)M'(t),\ -M'(t)M^{-2}(t)$.

a) $(M(t)\,N(t))' = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$

$\neq NM' + N'M$

$= (NM)'$

$(M^2)' \neq 2MM'$ in generale

a) bis LASCIATO COME ESERCIZIO

TROVARE $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} = M(t)$

Per cui $(M^2)' \neq 2MM'$

$2M'M$

b) $M(t)$ derivabile ed invertibile

$M^{-1}(t)M(t) = Id$

$M^{-1}(t)\,M(t) = Id$

derivo ed uso 2)

$(M^{-1}M)' = 0$

$(Id)' = 0$

$M^{-1\prime} M + M^{-1}M' = 0$

$M^{-1\prime} M = - M^{-1}M'$

$M^{-1\prime} = - M^{-1}M'M^{-1}$

che M^{-1} sia derivabile si può ammettere con Cramer $M^{-1} = \frac{\operatorname{adj} M}{\det M}$

c) TROVARE M invert deriv.

$$(M^{-1})' \neq -M^{-2}M'$$

$$-M'M^{-2} \qquad M^{-2} = M^{-1}M^{-1}$$

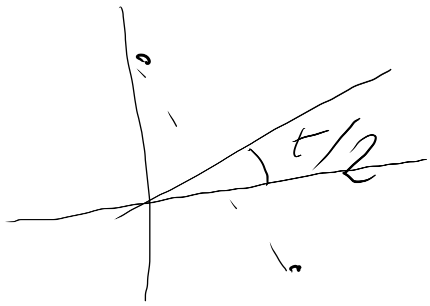
$$\| $$

$$-M^{-1}M'M^{-1}$$

$$-M^{-1}M'M^{-1} = -M'M^{-2}$$ molt. a dx per M

$$\Updownarrow$$

$$M^{-1}M' = M'M^{-1}$$



$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = {}^tM = M$$

$$M'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

$$M \quad M' \quad M$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \neq \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Esercizio 4 Data $B \in \mathcal{M}(n,n)$ si consideri l'endomorfismo $L : \mathcal{M}(n,n) \to \mathcal{M}(n,n)$ dato da

$$L(A) = BA.$$

$A \rightsquigarrow BA$

$B(A+\lambda C) = BA + \lambda BC$

a- Se $n = 2$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcolino gli autovalori di L, le dimensioni dei rispettivi autospazi, e si discuta la diagonalizzabilità di L.

b- In generale si provi che B ed L hanno gli stessi autovalori.

c- Si esprima il polinomio caratteristico di L in termini di quello di B,

[può convenire identificare $\mathcal{M}(n,n)$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, e quindi L con una matrice $n^2 \times n^2$].

- Trovare la relazione tra la molteplicità algebrica di un autovalore relativa a B con quella relativa ad L.

Si provi che se B è diagonalizzabile anche L lo è.

d- Si provi che un polinomio annulla B se e solo se annulla L. Se ne deduca che se L è digonalizzabile anche B lo è.

f- Si provi che ogni autovalore ha molteplicità geometrica rispetto ad L eguale ad n volte quella rispetto a B

[può esser utile considerare un elemento di Ker $(\mu Id_{\mathcal{M}} - L)$ come funzione lineare da $\mathbf{R}^n \to$ Ker $(\mu Id_{\mathbf{R}^n} - B)$].

a) $B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}(2,2) \sim \mathbb{R}^4$

$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \begin{matrix} a \\ c \\ b \\ d \end{matrix}$

$$\begin{cases} a + c = \lambda a \\ c = \lambda c \\ b + d = \lambda b \\ d = \lambda d \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$\cancel{a} + c = \cancel{a}$

$\cancel{b} + d = \cancel{b}$

se $\lambda = 1 \to c = 0,\ d = 0 \quad \dim V_1 = 2$

se $\lambda \neq 1 \to c = 0,\ d = 0 \longrightarrow a = 0,\ b = 0$

Ingegneria dell'energia, A.A. 2019/20
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Ottavo foglio di esercizi

Esercizio 1 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a- È diagonalizzabile su $\mathbf{R}$?

b- Descrivere una base in cui la matrice, associta all'endomorfismo di $\mathbf{R}^n$ definito da A, è triangolare.

Esercizio 2 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$.

a- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$?

b- Per quali $a \in \mathbf{R}$ è triangolabile su $\mathbf{R}$?

c- Per quali $a \in \mathbf{C}$ è diagonalizzabile su $\mathbf{C}$?

Esercizio 3 (Prosecuzione dell'esercizio 5 del sesto foglio) Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare *non identicamente nulla*, e $v_0 \in \mathbf{R}^n$ *non nullo.* Si definisce l'endomorfismo lineare $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ come segue

$$T(x) \; = \; x \; + \; f(x)v_0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

d- Quale relazione deve sussistere tra f e v_0 affinchè l'endomorfismo T sia simmetrico?

e- Quale relazione necessariamente deve sussistere tra $Ker\, f$ e v_0 affinchè T sia ortogonale?

f- In tal caso dare un'interpretazione geometrica dell'azione di T sui punti di $\mathbf{R}^n$.

Esercizio 4 Si caratterizzino gli endomorfismi *simmetrci e ortogonali* in $\mathbf{R}^n$.