ALGEBRA LINEARE
Secondo compito a casa
Soluzione proposta Esercizio 8c

Esercizio 8 Sia $p(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j \in \mathbf{C}[z]$ di grado esattamente eguale a $d \in \mathbf{N}$.

Sia poi $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri distinti (iniettiva).

a- Mostrare che i polinomi della famiglia $\{p(z+w_n) : n \in \mathbf{N},\ n \le d+1\} = \{p(z+w_0),\ p(z+w_1),\ \dots,\ p(z+w_{d+1})\}$ sono linearmente dipendenti su $\mathbf{C}$.

b- Se $d \le 2$ allora rispettivamente: se $d = 0$ $p(z+w_0)$ è non nullo, se $d = 1$ allora $p(z+w_0)$ e $p(z+w_1)$ generano il sottospazio dei polinomi di grado minore eguale a 1, $p(z+w_0)$, $p(z+w_1)$, $p(z+w_2)$ generano quello dei polinomi di grado al più 2.

• c- Si mostri che $p(z+w_0), \dots, p(z+w_d)$ sono linearmente indipendenti.

[*Suggerimento 1: una possibile dimostrazione è per assurdo: fai le derivate "calcolate in $z = 0$", sino alla d^a, della combinazione lineare, dei polinomi, assunta nulla. Ricorsivamente all'indietro, partendo dall'ultima relazione, ottieni $d+1$ condizioni lineari sui $d+1$ coefficienti $\lambda_0, \dots \lambda_d$ della combinazione.* E.g.*: dalla relazione per la d^a derivata, una costante eguale per tutti i polinomi in giuoco, ottieni che $\lambda_0 + \cdots + \lambda_d = 0$.*
Sugg. 2: in alternativa provare con i polinomi di Taylor ed induzione ... ?].

Soluzione 8c: sia $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d = \sum_{h=0}^{d} a_j z^j$, $a_d \neq 0_{\mathbf{C}}$.

1) Si consideri una combinazione lineare di tali polinomi nulla: cioè vi sono $d+1$ numeri, non necessariamente distiniti, $\lambda_0, \dots, \lambda_d$, per cui:

$$\lambda_0 p(z+w_0) + \lambda_1 p(z+w_1) + \cdots + \lambda_d p(z+w_d) \ = \ \sum_{k=0}^{d} \lambda_k p(z+w_k) \ = \ 0_{\mathbf{C}[z]}.$$

Va dimostrato che tali numeri sono tutti nulli.

1) Indichamo con D^m la derivata m^a di una funzione, e quindi si considerino le funzioni definite dai polinomi.
Iniziamo con il derivare d volte la combinazione lineare. Si otterrebbe la funzione nulla 0_F. Poichè gli addendi sono tutte funzioni polinomiali di grado esattamente d, la derivata d^a di ognuno di essi è la costante $d!$ moltiplicato il coefficiente di $(z+w_k)^d$, che è per tutti gli addendi a_d. Quindi:

$$D^d \sum_{k=0}^{d} \lambda_k p(z+w_k) = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k D^d p(z+w_k) \ = \ \sum_{k=0}^{d} \lambda_k d! a_d = d! a_d \sum_{k=0}^{d} \lambda_k = 0_{\mathbf{C}}.$$

Quindi si ottiene la prima relazione sui coefficienti: $\quad \sum_{k=0}^{d} \lambda_k = 0.$

2) Usando questa relazione e considerando la derivata $(d-1)^a$ della combinazione lineare, e quindi calcolando per $z = 0_{\mathbf{C}}$, si ottiene

$$D^{d-1}\sum_{k=0}^{d}\lambda_k p(z+w_k)|_{z=0} = \sum_{k=0}^{d}\lambda_k D^{d-1}p(z+w_k)|_{z=0} =$$
$$\sum_{k=0}^{d}\lambda_k[(d-1)!a_{d-1}+d!a_d(z+w_k)|_{z=0}] = \sum_{k=0}^{d}\lambda_k(d-1)!a_{d-1}+\lambda_k d!a_d w_k =$$
$$\sum_{k=0}^{d}\lambda_k d!a_d w_k = d!a_d\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k = 0_{\mathbf{C}}.$$

Quindi si ottiene la seconda relazione sui coefficienti: $\displaystyle\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k = 0.$

3) Si procede quindi per induzione su $N \leq d$, per provare che per ogni $j:\ 0\leq j\leq N$ si ha $\displaystyle\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k^j = 0_{\mathbf{C}}.$
La *base induttiva* $N=0$ è quanto sopra provato derivando d volte, e il secondo passo $N=1$ è quanto appena provato derivando $d-1$ volte e calcolando in $z=0_{\mathbf{C}}$ per ottenere la seconda relazione.
Per il *passo induttivo* si vuole dimostrare l'asserto per N, non nullo, sapendolo per $N-1$, cioè assumendo *l'ipotesi induttiva*

$$\text{per ogni } j:\ 0\leq j\leq N-1 \quad \sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k^j = 0_{\mathbf{C}}.$$

Basta mostrare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k^N = 0_{\mathbf{C}}.$
Come nel secondo calcolo si deriva la combinazione lineare nulla $d-N$ volte, si calcola per $z=0_{\mathbf{C}}$, e si usa l'ipotesi induttiva:

$$0_{\mathbf{C}} = D^{d-N}\sum_{k=0}^{d}\lambda_k p(z+w_k)|_{z=0} = \sum_{k=0}^{d}\lambda_k D^{d-N}p(z+w_k)|_{z=0} =$$
$$\sum_{k=0}^{d}\lambda_k\left[\sum_{m=d-N}^{d}\frac{m!}{(m-d+N)!}a_m(z+w_k)^{m-d+N}\right]|_{z=0} =$$
$$\sum_{k=0}^{d}\lambda_k\left[\sum_{m=d-N}^{d}\frac{m!}{(m-d+N)!}a_m w_k^{m-d+N}\right] = (\text{il grado } N \text{ dei } w_k \text{ è per } m=d)$$
$$\frac{d!}{N!}a_d\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k^N \ + \ \sum_{k=0}^{d}\lambda_k\sum_{m=d-N}^{d-1}\frac{m!}{(m-d+N)!}a_m w_k^{m-d+N} =$$
(scambiando le due sommatorie del secondo addendo)
$$0_{\mathbf{C}} = \frac{d!}{N!}a_d\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k^N \ + \ \sum_{m=d-N}^{d-1}\frac{m!}{(m-d+N)!}a_m\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k^{m-d+N}.$$

si conclude osservando che per $d-N\leq m\leq d-1$, gli esponenti $m-d+N$ dei w_k sono tutti non maggiori di $N-1$: infatti aggiungendo alle diseguaglianze per m la differenza $N-d$ si ha $0\leq m+N-d\leq N-1$. Quindi il secondo addendo è una somma di somme nulle per ipotesi induttiva. Rimane:

$$0_{\mathbf{C}} = \frac{d!}{N!}a_d\sum_{k=0}^{d}\lambda_k w_k^N,$$

ed essendo $\dfrac{d!}{N!}a_d \neq 0_{\mathbf{C}}$ si ottiene quanto desiderato.

4) Si sono quindi ottenute $d+1$ relazioni lineari omogenee sui $d+1$ coefficienti della combinazione lineare $\lambda_), \ldots, \lambda_d$:

$$\begin{cases} \lambda_0 & +\ldots & + & \lambda_d = & 0 \\ \lambda_0 w_0 & +\ldots & + & \lambda_d w_d = & 0 \\ \lambda_0 w_0^2 & +\ldots & + & \lambda_d w_d^2 = & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_0 w_0^d & +\ldots & + & \lambda_d w_d^d = & 0 \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & \\ w_0 & \ldots & w_d & \\ w_0^2 & \ldots & w_d^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_0^d & \ldots & \lambda_d w_d^d & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{d-1} \\ \lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice èuna matrice di Vandermonde, quindi essendo per ipotesi tutti i w_k, $0 \leq k \leq d$, distinti a coppie, ùna matrice invertibile. Pertanto tutti i $\lambda_k 0 \leq k \leq d$, devono essere nulli.