

CHIRURGIA ASSISTITA DAL CALCOLATORE
Appunti dal corso del Prof. Vincenzo Ferrari AA 2015-16

REGISTRAZIONE DI ANATOMIE RIGIDE

Dagli appunti di:

Pasqualina Ferrazzano

Michele Nicastro

Olga Diyakonova

INTRODUZIONE (Pasqualina Ferrazzano)

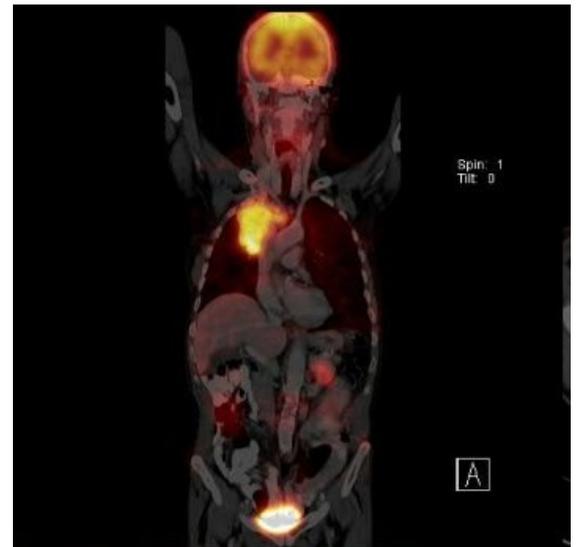
Si parla di registrazione nell'ambito delle immagini medicali (ma non solo) riferendosi al processo che permette di sovrapporre due o più immagini della stessa scena prese in tempi diversi, da diversi punti di vista o con fonti d'acquisizione diverse [Zitova and Flusser, 2003].

In altri termini, l'obiettivo di un algoritmo della registrazione è quello di determinare la trasformazione spaziale che mappa i punti (baricentri dei pixel o dei voxel, a seconda che si abbia a che fare con immagini 2D o 3D) di un'immagine nei corrispondenti punti in un'altra immagine. Nel caso specifico delle applicazioni biomediche, consente di ricondurre tutti i dati relativi al paziente in un unico sistema di coordinate. La registrazione presenta molte affinità con la calibrazione: in entrambi i casi l'obiettivo è di trasferire le informazioni espresse in un sistema di riferimento (di un sistema di imaging nel caso della registrazione, o di uno strumento chirurgico nel caso della seconda operazione) in un sistema comune.

Nello specifico possiamo distinguere almeno due tipi di registrazione nell'ambito della chirurgia assistita dal calcolatore:

- **Registrazione immagine/immagine**

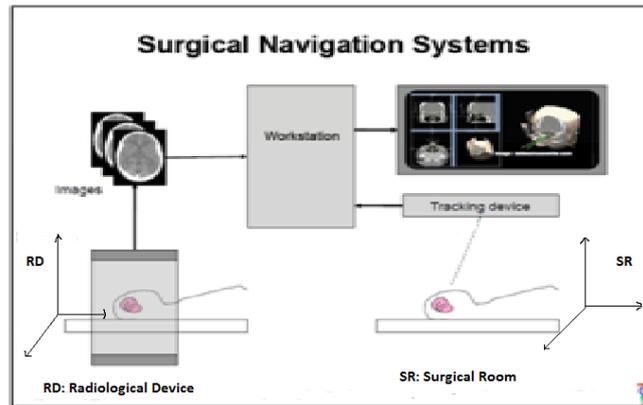
Quando si ha a che fare con immagini acquisite con dispositivi di imaging differenti che forniscono informazioni complementari (TAC, PET, MR) la registrazione permette di integrare le informazioni acquisite. Nello specifico, si allineano i voxel/pixel delle immagini disponibili con l'obiettivo di sovrapporre i contenuti. La registrazione di questi dati permette al chirurgo di pianificare un intervento utilizzando tutti le informazioni disponibili. La figura a destra è un esempio di registrazione immagine PET/TAC. Questa tipologia di registrazione è approfondita nel corso di Elaborazione delle Bioimmagini.



- **Registrazione paziente/immagine**

In questa dispensa è trattato questo secondo caso.

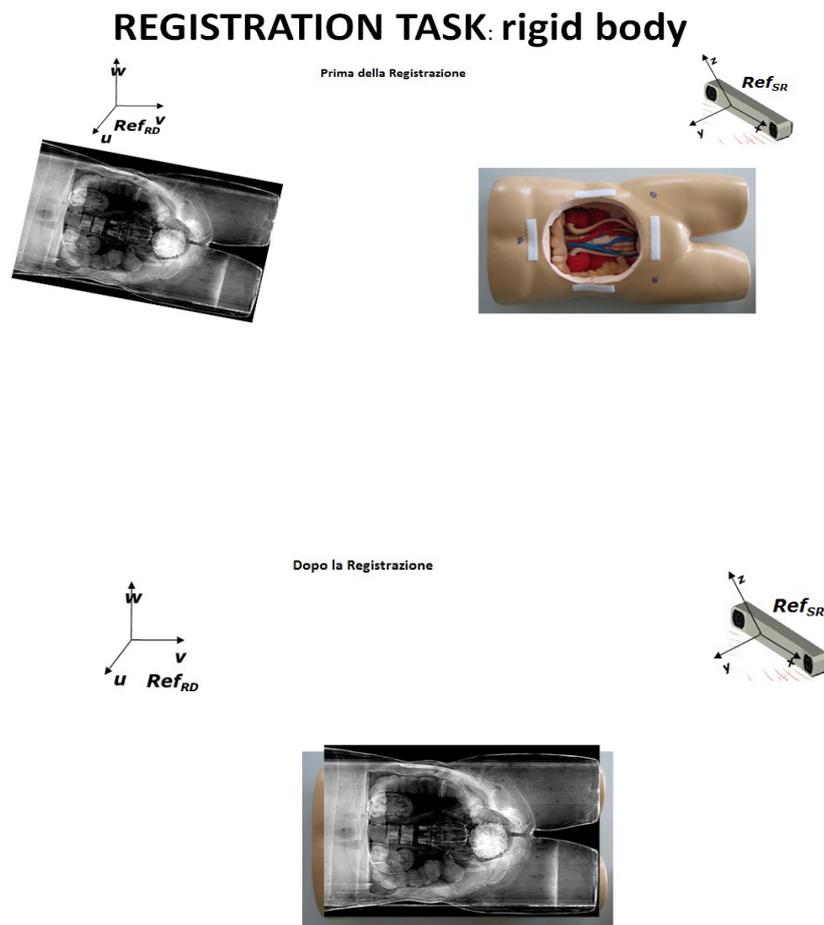
Questo tipo di registrazione si effettua in fase di intervento e consiste nel rendere coerente il contenuto di una o più immagini preoperatorie acquisite con scanner 2D o volumetrici (per esempio CT, RM) sul paziente in sede intraoperatoria. Ciò consente di mettere in relazione il "paziente virtuale" sul quale è effettuata la pianificazione dell'intervento col paziente reale, mediante il sistema di localizzazione (in figura tracking device).



Sostanzialmente, l'operazione di registrazione nell'ambito chirurgico (unitamente alla calibrazione) consente al medico di visualizzare il proprio strumentario nel campo operatorio e come questo si muove rispetto all'anatomia del paziente 'virtuale'. Dal punto di vista del paziente, un intervento assistito dalle immagini è generalmente eseguito con maggiore sicurezza e minore invasività.

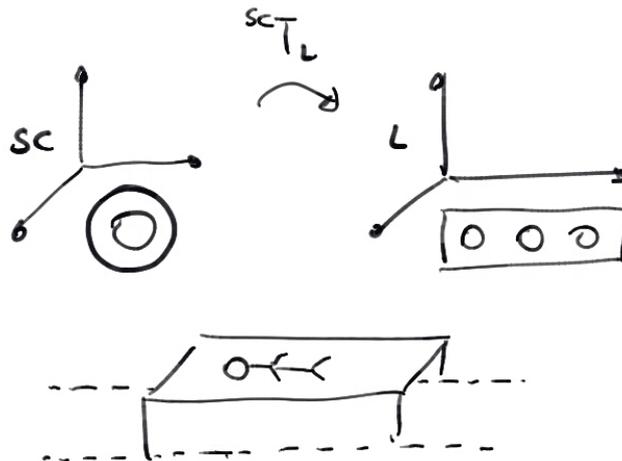
Nello caso di immagini volumetriche, l'operazione di registrazione consiste nel determinare una trasformazione spaziale tale da allineare i punti i baricentri dei voxel P_i espressi nel sistema di riferimento del dispositivo di imaging (RD) con i punti P'_i corrispondenti sull'anatomia del paziente nel sistema di riferimento della sala operatoria (SR) (caso di registrazione paziente/immagine) e/o in quello della seconda immagine (caso di registrazione immagine/immagine). Il problema è ripreso e trattato in seguito in modo formale più avanti.

Quando i punti d'interesse da registrare sono solidali a corpi rigidi (per esempio alle ossa), si può assumere l'immobilità di tali punti. Si parla in questo caso di registrazione rigida in quanto, affinché i punti corrispondenti coincidano, è sufficiente applicare una roto-traslazione (usando matrici di trasformazione omogenea come nella procedura di calibrazione). Se la scelta ricade su punti appartenenti a strutture deformabili (per esempio tessuti molli che sia in fase di imaging sia in fase operatoria sono fisiologicamente in movimento), oltre alla rototraslazione, che viene comunque generalmente eseguita, è necessaria una registrazione deformabile che tenga conto del movimento dei punti. In questa dispensa si farà riferimento solo alla registrazione rigida. Nel caso di strutture deformabili un primo passaggio di registrazione rigida è quasi sempre fondamentale.



Nell'ambito della registrazione rigida distinguiamo i seguenti casi:

- Acquisizione con scanner intraoperatorio:** In questo caso l'immagine intraoperatoria è acquisita con uno scanner calibrato rispetto al sistema di riferimento (da qui in poi SdR) della sala chirurgica. In questo caso non è necessario eseguire nessuna procedura di registrazione per lo specifico paziente. Le immagini acquisite sono registrate rispetto l'SdR del localizzatore al fine di sovrapporre il paziente virtuale a quello reale. In altre parole, la rototraslazione che consente l'allineamento del SdR del dispositivo radiologico (SC) su quello della sala (L), permette anche la registrazione delle immagini.



Con il metodo di registrazione appena descritto si ottengono risultati attendibili se è assicurata l'immobilità del paziente sul letto operatorio. Il rischio di errore viene ridotto lasciando il paziente (in fase pre e intra operatoria) sullo stesso lettino e spostandolo, se necessario, dalla zona di imaging a quella chirurgica lungo una traiettoria nota (binari nel pavimento). Tali metodi sono, nonostante ciò, particolarmente prone all'errore in quanto l'immobilità del paziente non può essere assicurata in sede operatoria: è difatti sufficiente che un operatore urti il lettino per compromettere i risultati. Inoltre, verosimilmente, il chirurgo ha la necessità di spostare il paziente durante la pratica chirurgica. Le soluzioni a questo problema sono principalmente due e non sono alternative. Sfruttando strumenti appositi si garantisce l'immobilità del paziente o di una sua parte anatomica. Per esempio, gli interventi di neurochirurgia sono eseguiti con il supporto di una testiera (generalmente di tipo Mayfield) che blocca il cranio del paziente nella posizione prevista dal chirurgo. Un'altra opzione è quella di fissare alla parte anatomica di interesse un sensore per il sistema di localizzazione in sala. In questo modo è possibile tracciare real time la posizione della zona nel SdR L. Una soluzione ibrida, prendendo come esempio ancora il caso dell'operazione di neurochirurgia di cui sopra, consiste nell'immobilizzare la testa del paziente con una testiera. Alla testiera si fissa un frame/sensore che traccia la posizione dello strumento e di conseguenza della parte anatomica 'solidale' ad esso.

- **Acquisizione di immagini preoperatorie:** la pianificazione di un intervento è eseguita dall'equipe chirurgica facendo riferimento a immagini acquisite un certo tempo prima dell'intervento. Per registrare le immagini preoperatorie con il paziente in sala si sfruttano delle caratteristiche geometriche individuabili sia nelle immagini che vincolate al paziente. Con la registrazione rigida si va a cercare la matrice di trasformazione che va a sovrapporre le caratteristiche geometriche individuate e la si utilizza per registrare tutti i punti d'interesse presenti nell'immagine sul paziente reale. In base alla scelta di tali caratteristiche geometriche e come le si individuano sul paziente abbiamo:
 1. **Metodi estrinseci:** si applicano oggetti esterni sul paziente che siano 'riconoscibili' dai dispositivi in gioco (esempio di materiale radiopaco nel caso di TAC):
 - **Invasivi:** i marker sono impiantati nel paziente (viti impiantate);
 - **Non invasivi:** i marker sono applicati sul paziente (poggiati o mediante colle);
 2. **Metodi intrinseci:** si sfruttano caratteristiche geometriche dell'anatomia del paziente, si tratta quindi di una tipologia di registrazione non invasiva. Si considerano come marker

fiduciali punti caratteristici del paziente (esempio canti degli occhi e/o denti) acquisiti con puntatore o intere superfici acquisite con scanner 3D di superficie o eventualmente con scanner radiologici (2D o 3D).

La registrazione con marker estrinseci impiantati è sicuramente più accurata e precisa in quanto si individuano dei punti in modo preciso e univoco, mentre i marker non invasivi che spesso sono applicati sulla cute forniscono errori maggiori a causa della loro mobilità

NB: Qualunque sia il metodo prescelto, i punti individuati devono essere 'visibili' nei dispositivi di imaging utilizzati (per esempio, nella CT, i marker saranno radiopachi). In fase operatoria si può sfruttare un puntatore opportunamente sensorizzato in modo da localizzare i marker anche nel sistema di riferimento della sala.

Nell'eseguire le operazioni, in successione, di localizzazione dei punti e di registrazione, si commettono inevitabilmente degli errori. La definizione dei suddetti errori è descritta di seguito.

TRE = Target Registration Error

Generalmente nell'ambito della chirurgia guidata dalle immagini, si esegue una registrazione di immagini pre-operatorie sul paziente per permettere di guidare l'atto chirurgico su target (e zone da evitare) non facilmente o direttamente identificabili sull'anatomia reale. In generale, possiamo definire p_t identificabile nell'immagine le cui coordinate saranno espresse nel sistema di riferimento pre-operatorio. Una volta effettuata la registrazione avremo la matrice di rotazione R ed il vettore di traslazione t . A questo punto il target vero p_t' sarà legato al target p_t pre-operatorio (identificato nell'immagine ed espresso nel sistema di riferimento pre-operatorio) dalla registrazione e da un errore:

$$p_t' = Rp_t + t + TRE$$

dove TRE sta per Target Registration Error e quantifica l'errore tra il target registrato ed il target vero:

$$TRE = \| p_t' - (Rp_t + t) \|$$

Da notare che:

- 1) Il TRE cambia in funzione del target t e durante un intervento si può avere a che fare con molti target: tante lesioni oppure tutti i vertici dei triangoli con i quali sono rappresentate tutte le anatomie ricostruite da immagini pre-operatorie.
- 2) Spesso (nella pratica chirurgica sempre) il TRE lo si può misurare solo a posteriori, una volta raggiunto il target chirurgico.
- 3) Per effettuare dei controlli di ragionevolezza, si possono utilizzare dei target fittizi facilmente identificabili (che non siano i punti fiduciali utilizzati per effettuare la registrazione) e calcolare il TRE su questi.
- 4) Solo nel caso di registrazione per punti fiduciali corrispondenti con il metodo ai minimi quadrati (descritto in seguito) è possibile stimare a priori il TRE e solo in particolari condizioni.

FLE=Fiducial Localization Error

E' definito in inglese FiducialLocalizationError (FLE) e rappresenta l'errore con il quale sono acquisite le posizioni dei punti fiduciali sia nel sistema di riferimento pre-operatorio che in quello intra-operatorio. Se l'informazione pre-operatoria è un'immagine di RM, l'FLE sarà legato sia alla risoluzione spaziale dell'immagine (dimensione dei voxel) sia alla capacità/possibilità dell'operatore (o eventualmente di un algoritmo automatico) di individuare i punti fiduciali sull'immagine pre-operatoria. Ad esempio, se si avesse a che fare con voxel cubici di 1mm di lato e nell'individuazione del punto fiduciale si commettesse un errore medio di 2 voxel, l'FLE pre-operatorio sarebbe di 2 mm. Un ragionamento analogo può essere fatto per l'FLE intra-operatorio che sarà legato all'accuratezza del sistema di localizzazione intra-operatorio e alla capacità/possibilità di individuare i punti fiduciali sul paziente.

FRE = Fiducial Registration Error

Nel caso di registrazione per coppie di punti corrispondenti (si veda il caso analogo della calibrazione con il metodo dei 3 punti corrispondenti), se non vi fosse errore di localizzazione sui punti fiduciali (FLE=0), qualunque dei metodi di registrazione si utilizzasse (tra quelli descritti in seguito), permetterebbe di allineare perfettamente i punti fiduciali pre-operatori $p_i = \{x_i, y_i, z_i\}^T$ sui punti fiduciali intra-operatori $p'_i = \{x_i, y_i, z_i\}^T$. In altre parole, una volta ottenuta la matrice di rotazione R ed il vettore di traslazione t avrei:

$$p'_i = Rp_i + t, \forall i$$

In realtà avrò sempre un errore FLE di localizzazione sui punti fiduciali che mi deformerà la nuvola di punti fiduciali intra-operatoria rispetto a quella pre-operatoria (e viceversa), il che algebricamente significa:

$$\forall i, j: \|p'_i - p'_j\| \neq \|p_i - p_j\|$$

cioè, presi due punti fiduciali i e j la loro distanza misurata nel sistema di riferimento pre-operatorio differirà dalla distanza dei medesimi punti misurata nel sistema di riferimento intra-operatorio. In generale si avrà un errore di localizzazione diverso per ogni punto fiduciale e sarà pertanto impossibile ottenere un allineamento perfetto su ciascuna coppia di punti fiduciali. Avremo un errore di registrazione sul singolo punto fiduciale FRE_i lungo le tre componenti:

$$p'_i = Rp_i + t + FRE_i, \forall i$$

Una volta effettuata la registrazione posso calcolare ciascun FRE_i :

$$FRE_i = p'_i - (Rp_i + t), \forall i$$

Possiamo inoltre determinare un FRE globale. L'errore FRE è comunemente fornito in termini di scarto quadratico medio.

CONTROLLO DI RAGIONEVOLEZZA

A prescindere dal metodo di registrazione utilizzato, è bene eseguire di norma un controllo visivo su alcuni target fittizi. Questo generalmente lo si fa posizionando il puntatore sul target prescelto e verificandone il TRE rispetto a dove è il punto corrispondente dell'immagine registrato.

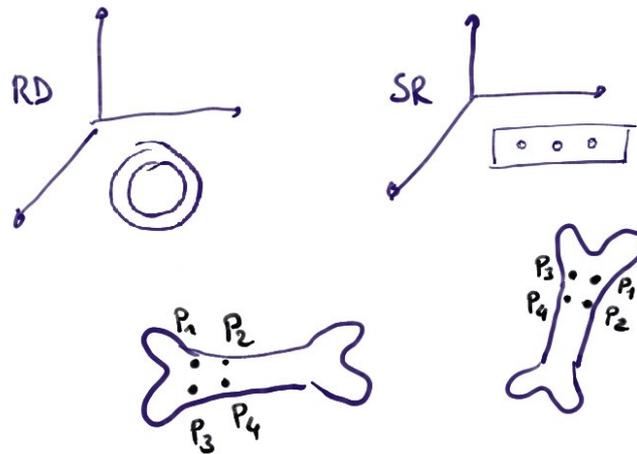
TABELLA RIEPILOGATIVA METODI DI REGISTRAZIONE DESCRITTI IN QUESTA DISPENSA

A causa della nomenclatura e di aspetti ricorrenti nei vari metodi di registrazione c'è il rischio di confondersi nel loro studio. Per questo motivo, prima di passare in rassegna i vari metodi, è fornita la seguente tabella che raccoglie i metodi di registrazione trattati all'interno del corso. Nella tabella sono esplicitate le caratteristiche geometriche utilizzate per ottenere la registrazione, la tipologia intrinseca o estrinseca, ed infine i nomi degli algoritmi.

		Immagine 3D→Paziente	Im. 3D→ Im. 2D → Paz.	
		Caratteristiche geometriche utilizzate		
		<i>Punti</i>	<i>Superfici</i>	<i>Contorni</i>
Allineamento	<i>Estrinseco</i>	fiducial marker <i>invasivi</i> (marker avvitati...) e <i>non invasivi</i> (marker adesivi)	dime chirurgiche, supporti sensorizzati	
	<i>Intrinseco</i>	Riferimenti anatomici	superfici da immagini pre-operatorie con superfici da immagini intra-operatorie	superfici da immagini pre-operatorie con contorni da immagini 2D intra-operatorie
Algoritmo		↓ 3 punti corrispondenti ↓ Allineamento assi d'inerzia	↓ Minimi quadrati	↓ ICP e affini
			↓ ICP 3D/2D e affini	

REGISTRAZIONE PER PUNTI CORRISPONDENTI (Michele Nicaastro)

Il problema della registrazione rigida nel caso di immagini pre-operatorie è il seguente: ho un'immagine pre-operatoria acquisita rispetto il sistema di riferimento RD (Radiological Department) e vorrei registrarla sul paziente in sala operatoria. Ho a disposizione un sistema di localizzazione, il cui sistema di riferimento chiameremo SR (Surgical Room).



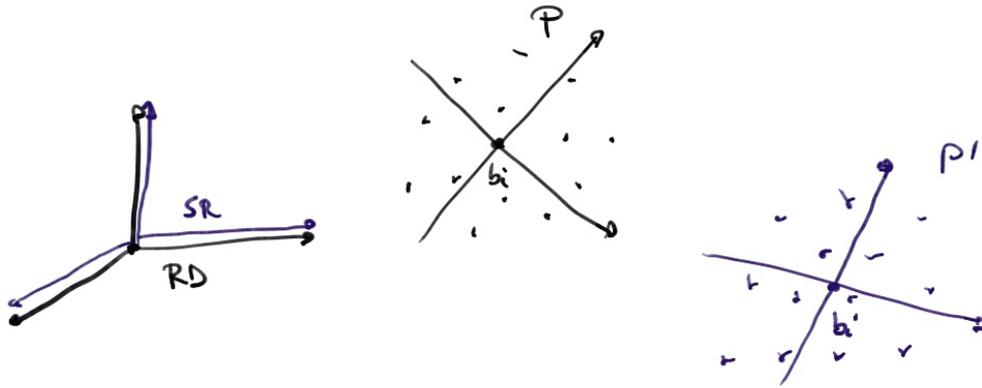
Potremmo pensare di utilizzare il **metodo dei 3 punti corrispondenti**, analogamente a quanto visto per la calibrazione. Saremmo tuttavia fortemente soggetti all'errore umano: la localizzazione col puntatore da parte dell'operatore può essere imprecisa (ovvero potremmo avere un elevato FLE). Tale errore, si ripercuoterebbe sulla registrazione, rendendola poco accurata. Supponendo l'FLE casuale (gaussiano isotropico a media nulla...), viene da pensare che, per ridurre l'errore, dovremmo impiegare un numero maggiore di punti (per compensare l'effetto dell'errore di localizzazione FLE).

Con il metodo dell'**allineamento degli assi principali d'inerzia**, passiamo a considerare da 3 ad una nuvola di punti.

Abbiamo P , la nuvola acquisita in fase pre-operatoria rispetto RD , e P' , la nuvola acquisita in fase intra operatoria rispetto SR . Supponiamo di caricare P nel sistema di riferimento SR : l'operazione corrisponde a far coincidere SR e RD . Otterremo quasi sicuramente due nuvole di punti disallineate tra loro.

A questo punto, il nostro fine è calcolare la rototraslazione necessaria a riallineare le due nuvole di punti. L'algoritmo dell'allineamento degli assi principali d'inerzia teoricamente può essere applicato anche al caso di punti non corrispondenti (con varie problematiche...) ma in questa trattazione prenderemo come riferimento il caso di punti corrispondenti, e cioè che ad ogni punto nella nuvola di punti pre-operatori corrisponda un punto nella nuvola di punti intra-operatori pressappoco nella medesima posizione (rispetto al paziente).

Esprimendo formalmente il problema:



$$P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$$

$$P' = [p'_1, p'_2, \dots, p'_n]$$

$$T \parallel \forall_i T p_i \approx p'_i \rightarrow R, t \parallel \forall_i R p_i + t \approx p'_i$$

$$\dots (\forall_i R p_i + t + F R E_i = p'_i)$$

L'approccio prevede di considerare ogni punto come punto materiale di massa unitaria e di andare ad allineare sia i baricentri che gli assi principali d'inerzia dei P sui P' .

Per far questo per prima cosa devo calcolare il baricentro di ciascuna nuvola. Dopodiché traslo le nuvole di una quantità pari ai loro baricentri, allineandole in questo modo nell'origine, ottenendo le nuove nuvole Q e Q' :

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_N]$$

$$Q' = [q'_1, q'_2, \dots, q'_N]$$

$$b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \quad b' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i$$

$$q_i = p_i - b \quad q'_i = p'_i - b'$$

A questo punto entrambe le nuvole di punto hanno il baricentro allineato con l'origine e posso calcolarne le matrici d'inerzia rispetto agli assi cartesiani. La matrice d'inerzia per la nuvola Q è:

$$I_n = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix}$$

A questo punto posso ruotare la nuvola di punti Q al fine di allinearne gli assi principali d'inerzia con la terna cartesiana. Ricordando che la matrice d'inerzia calcolata rispetto agli assi principali

d'inerzia è diagonale, devo andare alla ricerca della rotazione R che diagonalizza I_n .
Per far questo possiamo riscrivere I_n come:

$$I_n = T_r(QQ^T)I - QQ^T$$

Dove:

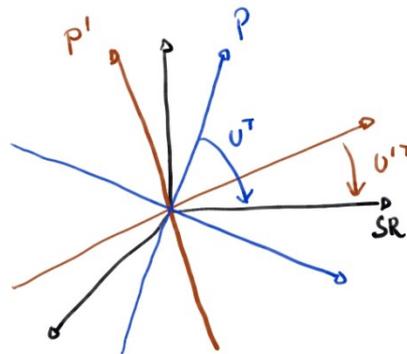
$$QQ^T = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ y_1 & \dots & y_N \\ z_1 & \dots & z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_N & y_N & z_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y_i^2 & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i^2 \end{bmatrix}$$

$$T_r(QQ^T) = \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

Osserviamo che il primo termine di I_n , dato dal prodotto della traccia di QQ^T per la matrice identità, è già diagonale: resta da diagonalizzare la matrice di covarianza QQ^T . Applicando il teorema spettrale si ha:

$$QQ^T = USU^T \rightarrow U^T QQ^T U = S \rightarrow U^T Q(U^T Q)^T = S$$

Dove U è una matrice ortogonale ed S la matrice degli autovalori. U^T sarà la rotazione che porta gli assi di inerzia a coincidere con gli assi del nostro sistema di riferimento. Allo stesso modo, si sarebbe potuto procedere per la nuvola P' , ottenendo U'^T .



Possiamo a questo punto ricostruire la rotazione R necessaria ad allineare le due nuvole di punti:

$${}^{SR}R_p = U^T$$

$${}^{SR}R_{p'} = U'^T$$

$${}^{P'}R_p = ({}^{SR}R_{p'})^{-1} {}^{SR}R_p = (U'^T)^{-1} U^T = U' U^T$$

NB: Essendo U' una matrice ortogonale, $U'^T = (U')^{-1}$.

Ho calcolato R , resta tuttavia da calcolare la traslazione t che compensi la traslazione iniziale dei baricentri:

$$\forall_i RQ_i \approx Q'_i \rightarrow R(p_i - b) \approx p'_i - b' \rightarrow R(p_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i) \approx p'_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i \rightarrow Rp_i - \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i \approx p'_i$$

Confrontando con $Rp_i + t \approx p'_i$ abbiamo:

$$t = -\frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i$$

In conclusione, la rototraslazione atta ad allineare le due nuvole di punti è la seguente:

$$R = U'U^T$$

$$t = -\frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i$$

NB: Qualora $\det(R)=-1$ deve essere invertito il versore z della R . Si veda il paragrafo “Osservazione importante”

Come detto in precedenza, l’algoritmo dell’allineamento degli assi principali d’inerzia può essere teoricamente applicato anche al caso di punti non corrispondenti e con un numero di punti della nuvola P diverso dal numero di punti nella nuvola P' . Il procedimento matematico resta lo stesso (tenendo conto dell’eventuale diversa numerosità dei punti) ma il risultato della qualità della registrazione dipenderà dalla distribuzione dei punti sull’anatomia. Ad esempio l’acquisizione di un punto in più sul paziente rispetto all’immagine farà spostare il baricentro verso quest’ultimo punto.

Metodo ai minimi quadrati

L’approccio precedentemente visto è valido, ma poco utilizzato. Il metodo che presenteremo ora si basa sul calcolare la procedura ottimale ai fini della minimizzazione dell’FRE.

La funzione di costo che vogliamo minimizzare è FRE^2 , dove

$$FRE^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Rp_i + t - p'_i|^2$$

L’approccio algebrico è il seguente:

$$FRE^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Rp_i + t - p'_i|^2 \xrightarrow{*} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |R(q_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i) + t - (q'_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i)|^2 \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Rq_i - q'_i + \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + t - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i|^2$$

$$*q_i = p_i - b = p_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i$$

$$*q'_i = p'_i - b' = p'_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i$$

Posto $t' = \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + t - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Rq_i - q'_i + \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + t - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i|^2 &\rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |(Rq_i - q'_i) + t'|^2 \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (|Rq_i - q'_i|^2 + |t'|^2 + 2t'^T (Rq_i - q'_i)) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N |Rq_i - q'_i|^2 + N |t'|^2 + 2 \sum_{i=1}^N t'^T (Rq_i - q'_i) \right) \end{aligned}$$

Dove:

$$2 \sum_{i=1}^N t'^T (Rq_i - q'_i) = 2t'^T R \sum_{i=1}^N q_i - 2t'^T \sum_{i=1}^N q'_i = 0$$

NB: I baricentri delle nuvole Q e Q' sono nell'origine $\left(\sum_{i=1}^N q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sum_{i=1}^N q'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Resta da minimizzare:

$$\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N |Rq_i - q'_i|^2 + N |t'|^2 \right)$$

Agisco su t' . Affinché $t'=0$, deve verificarsi la seguente condizione:

$$|t'|=0 \rightarrow \frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + t - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow t = -\frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i$$

Si è ricavata la stessa traslazione t ottenuta precedentemente col metodo degli assi principali di inerzia: abbiamo dimostrato che la traslazione che allinea i baricentri è la scelta ottimale ai fini della minimizzazione dell' FRE.

Per il calcolo della R , si dimostra che otteniamo la soluzione ottima mediante la decomposizione a valori singolari (SVD) della matrice QQ'^T .

$$QQ'^T \stackrel{SVD}{=} USV^T \rightarrow R = VU^T$$

Dove U, V sono matrici ortogonali, ed S la matrice degli autovalori.

In conclusione, la rototraslazione ottima ai fini della minimizzazione dello FRE è:

$$\begin{aligned} R &= VU^T \\ t &= -\frac{R}{N} \sum_{i=1}^N p_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'_i \end{aligned}$$

NB: Qualora $\det(R)=-1$ deve essere invertito il versore z della R . Si veda il paragrafo "Osservazione importante"

Osservazione importante

Sia con il metodo degli assi principali che col metodo dei minimi quadrati, R è data dal prodotto di due matrici ortogonali:

$$\text{Assi} : R = U'U^T$$

$$\text{Min quad} : R = VU^T$$

Il determinante di una matrice ortogonale può essere ± 1 . Ne consegue, per il teorema di Binet ($\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$), che il determinante di R potrà essere anch'esso ± 1 .

Affinché R sia una matrice di rotazione, deve essere una matrice ortogonale speciale, ne consegue $\det(R) = 1$ (corrisponde ad a riferimento una terna destrorsa).

Nel caso $\det(R) = -1$, si procede calcolando una nuova matrice di rotazione R' :

$$R' = I^* R$$

$$I^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice I^* non fa che invertire l'asse z , passando da un riferimento a terna sinistrorsa a destrorsa. R' così calcolata sarà in definitiva la nostra matrice di rotazione.

Relazione tra FLE, FRE, TRE (a cura di Pasqualina Ferrazzano)

Nel caso di registrazione con il metodo ai minimi quadrati, è possibile stimare a priori la relazione esistente tra FLE con FRE e con TRE. Le seguenti considerazioni valgono soltanto in caso di FLE appartenente a una distribuzione normale, a media nulla, ed anche isotropico (stessa distribuzione lungo tutte e tre le direzioni).

- Relazione FLE-FRE:

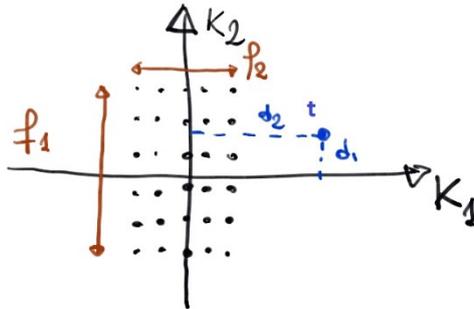
$$FRE^2 = \frac{N-2}{N} FLE^2$$

Si osserva che :

- Per valori bassi di N l'errore di registrazione è più basso di quello di localizzazione, poiché il metodo ai minimi quadrati va ad allineare le nuvole di punti “incastrandole” al fine di minimizzare l'errore globale FRE.
- Al crescere di N l'errore di registrazione tende a quello localizzazione poiché nel caso di errori casuali su molti punti è impossibile trovare un “incastro” in grado di compensare l'effetto dell'errore su ciascun punto fiduciale.

- Relazione FLE-FRE-TRE

Data una nuvola di punti si individuano gli assi principali di inerzia k_1, k_2, k_3 (NB: la rappresentazione grafica è riferita al caso bidimensionale). Si ha la stima a priori del TRE sul punto target t vale:



$$TRE^2(t) = \frac{FRE^2}{N-2} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1,2,3} \frac{d_k^2}{f_k^2} \right)$$

$$TRE^2(t) = \frac{FLE^2}{N} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1,2,3} \frac{d_k^2}{f_k^2} \right)$$

$$\left(\frac{FRE^2}{N-2} = \frac{FLE^2}{N} \right)$$

Dove:

f_k : distanza calcolata come scarto quadratico medio tra i punti e gli assi principali (misura la dispersione dei punti rispetto agli assi di inerzia). Il valore degli f_k determina quanto l'ellissoide di inerzia si allontana da una forma sferica (per $f_1=f_2=f_3$ i punti risultano distribuiti su una sfera);

d_k = distanza del target da assi principali.

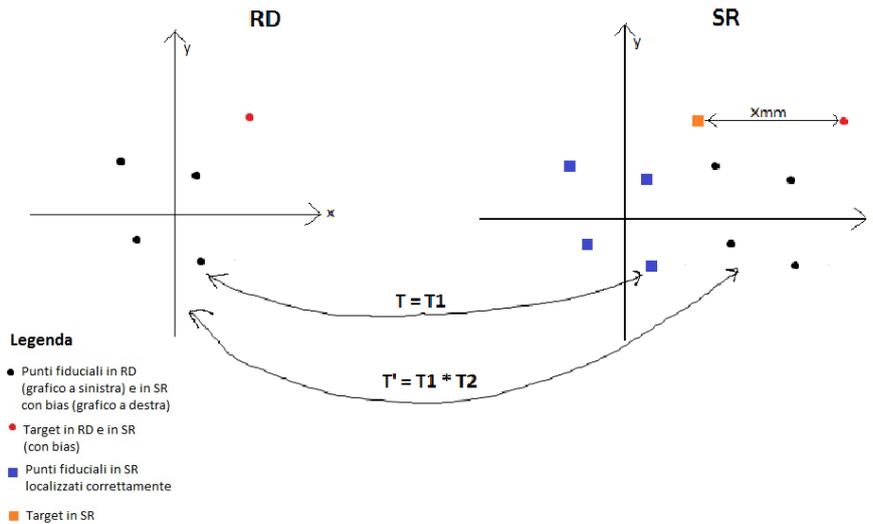
In particolare, se il target si trova nel baricentro dei punti, si ha:

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0 \quad TRE^2(t) = \frac{FRE^2}{N-2} = \frac{FLE^2}{N}$$

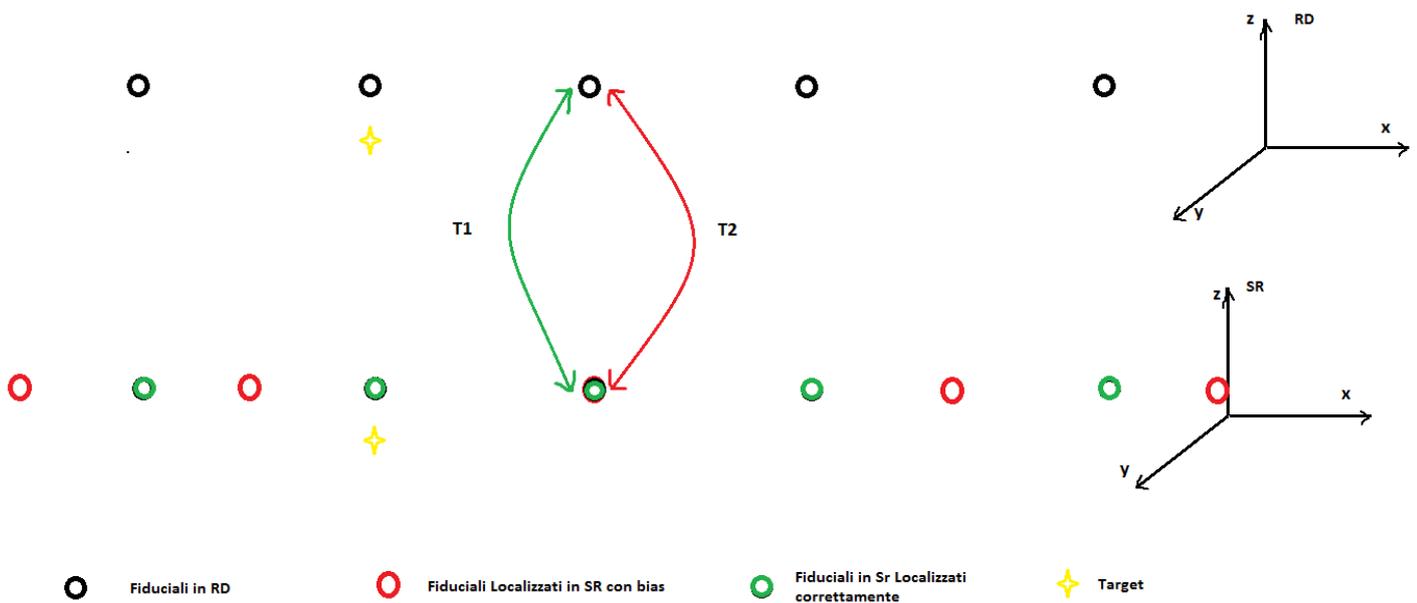
Si evince che se il numero di punti scelti per eseguire la registrazione aumenta, si ha una conseguente riduzione dell'errore sul target. Chiaramente N non può essere grande a piacere, ma deve essere un valore che trovi un riscontro nella pratica chirurgica.

Come detto precedentemente questa stima a priori è valida solo in caso di una distribuzione casuale dell'errore. Di seguito sono descritti due casi verosimili in controtendenza rispetto alla stima appena descritta.

Analizziamo per primo il caso verosimile di una registrazione che ha determinato un FRE limitato ed una misura a posteriori (non una stima) del TRE elevata. Ipotizziamo un errore di localizzazione di X_{mm} nella direzione x per tutti i punti fiduciali. La registrazione determinerà una matrice di rototraslazione (T della figura) per allineare i punti fiduciali dell'immagine con quelli del paziente 'con bias'. Risulterà quindi un FRE limitato. In altre parole un bias sui fiduciali non viene individuato dell'errore di registrazione. Si avrà però un TRE elevato poiché un target virtuale sarà registrato con un errore (quantomeno) di X_{mm} sul paziente reale.



Analizziamo ora il caso, anche in questo caso verosimile, di una registrazione che può determinare un FRE elevato ma con una misura a posteriori (non una stima) del TRE limitata. Assumiamo un FLE di +Xmm nella direzione x per metà dei fiduciali e di -Xmm per l'altra metà come nella figura seguente (dove per problematiche di spazio i punti fiduciali sono riportati allineati, una situazione discutibile nella realtà applicativa). La registrazione fornirà una trasformazione corretta. Gli errori si annullano reciprocamente e la matrice trovata è la stessa che si determinerebbe in assenza di bias ($T_1=T_2$). Questo comporta però un elevato errore di registrazione pari a Xmm infatti i punti fiduciali pre-operatori non potranno essere allineati a quelli sul paziente. Il target sarà comunque registrato correttamente ottenendo quindi un TRE limitato.



Dalle osservazioni sugli errori fatte finora si evince che le relazioni trovate hanno alcuni limiti: le formule sono di difficile applicabilità e non si adattano a tutti i casi reali. Si è difatti supposto che

l'FLE sia gaussiano isotropo a media nulla ma questo non trova sempre riscontro nella realtà. Ciò che quindi deve essere sempre eseguito per verificare la bontà delle operazioni svolte è il SanityCeck (controllo di ragionevolezza in italiano).

METODI DI REGISTRAZIONE BASATI SULLE SUPERFICI (a cura di Olga Diyakonova)

Registrazione tramite supporti sensorizzati paziente specifico.

Una registrazione “estrinseca” basata su superfici, oltre che con le dime chirurgiche paziente specifico ([si veda questo link per un esempio](#)), può essere basata sull’impiego di supporti sensorizzati. Tali supporti devono combaciare pressoché perfettamente (ed essere pressoché solidali) con l’anatomia del soggetto. In fase di progetto verranno sensorizzati con elementi rilevabili da un localizzatore esterno. In sala operatoria, poi, essendo nota la relazione tra i sensori montati sul supporto ed il sistema di localizzazione del dispositivo, basterà applicare il supporto all’anatomia per registrarla rispetto sistema di localizzazione disponibile. In questo modo, applicando opportunamente le matrici di trasformazione, l’immagine pre-operatoria e l’anatomia reale del paziente potranno essere registrate coerentemente.

Ad esempio – impianto dentale: 1) si può utilizzare una dima di foratura oppure 2) una volta costruito un supporto che sia il complementare dell’arcata dentale del paziente, basterà posizionarlo in bocca per fare l’intera operazione in un modo accurato utilizzando un navigatore chirurgico. In questo caso, infatti, si andrebbe a fare una foratura con un trapano con punta di 3-4 mm di diametro in strutture di dimensioni ridotte. Una registrazione per punti fiduciali potrebbe non dare una precisione soddisfacente, mentre un supporto sensorizzato ed un trapano localizzato aiuterebbero nel risolvere il problema.

Da sottolineare che una dima chirurgica è una soluzione decisamente semplice e di facile impiego poiché non è necessario né il localizzatore né sensori sugli strumenti chirurgici. L’utilizzo della dima chirurgica è comunque limitato alla guida della punta di un trapano (lungo un canale di foratura) o di una sega (lungo un piano di taglio).

Allineamento per punti non corrispondenti, “surface based”

In alcune applicazioni risulta utile operare la registrazione sfruttando la superficie dell’anatomia come caratteristica geometrica (come si fa per le dime chirurgiche ed i supporti sensorizzati). Per far ciò possono essere applicate le metodiche di registrazione dette in inglese “surface based”, che tengono conto, per l’appunto, delle caratteristiche delle superfici. È un metodo intrinseco, in cui si sfruttano le superfici anatomiche del paziente esposte o che si possono esporre: si pensi ad esempio alla superficie del volto del paziente. Nella pratica si acquisiscono questi punti in sala operatoria, con un puntatore o con uno scanner 3D calibrato nel sistema di riferimento del localizzatore.



L’obiettivo delle metodiche di registrazione “surface based” è quello di registrare il sistema di riferimento del sistema di imaging pre-operatorio con quello del localizzatore, al fine allineare

l'immagine virtuale con il paziente reale, andando a sovrapporre la superficie virtuale pre-operatoria con quella reale intra-operatoria.

Ad esempio potrebbe essere disponibile un'immagine CT dalla quale è stata ottenuta una superficie dell'anatomia e dei punti intra-operatori acquisiti sulla stessa superficie: per allineare le due informazioni sicuramente non sarà sufficiente il metodo dei tre punti corrispondenti, né può andar bene il metodo dei minimi quadrati, poiché per questi due metodi è necessario conoscere la corrispondenza tra i punti nei due insiemi.

L'unico metodo visto precedentemente che dal punto di vista algebrico non richiede una corrispondenza uno ad uno tra i punti è quello dell'allineamento degli assi d'inerzia. Comunque sia, se i punti sul volto fossero acquisiti in modo disomogeneo, ad esempio ottenendo più punti sul lato destro rispetto al lato sinistro, il calcolo dei baricentri sarebbe sbilanciato e quindi anche il risultato dell'intera registrazione.

Per ottenere la registrazione tra due superfici esistono algoritmi apposti in grado di far combaciare "digitalmente" le due superfici.

Metodo Head in Hat

E' doveroso citare il metodo "Head in Hat" poiché è stato il primo per interventi di neurochirurgia guidati dalle immagini utilizzando una registrazione surface based. Questo metodo prevede la ricostruzione della superficie della testa nel pre-operatorio, poi la sua acquisizione nell'intra-operatorio.

Si compone di due passaggi: l'*allineamento dei baricentri delle nuvole di punti*, seguito da una procedura di *ottimizzazione per l'allineamento* delle superfici.

Dato che si dovrebbe passare per l'allineamento dei baricentri, anche qui, all'operatore è richiesta attenzione massima nell'acquisire i punti in maniera uniforme per evitare sbilanciamenti.

Proprio per questo motivo il metodo head in hat non è oggi utilizzato.

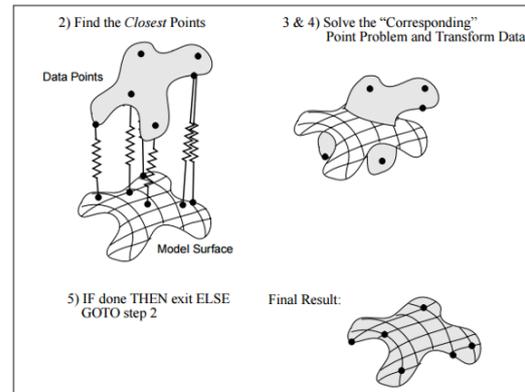
Metodo Iterative Closest Point, ICP

Esistono molte altre implementazioni per la registrazione delle superfici, molte delle quali prendono spunto dal metodo Iterative Closest Point (ICP).

L'algoritmo ICP, nella sua versione più semplice, funziona così:

0. **Allineamento iniziale** dei punti appartenenti alle due superfici. Come già detto, non vi è una corrispondenza nota a priori tra i punti: si sa solo che appartengono alla stessa superficie. Per procedere alla registrazione è necessario partire da una registrazione di massima iniziale. Tale registrazione iniziale può essere eseguita tramite i metodi di allineamento per punti corrispondenti precedentemente trattati: ad esempio, può essere eseguita utilizzando riferimenti anatomici, come i cantici degli occhi, il naso, i denti (il cui errore di localizzazione dipenderà sia dall'accuratezza dello strumento di misura utilizzato che dall'incertezza dell'operatore nell'individuare in modo univoco detti punti). Anche se la registrazione iniziale può essere inaccurata, questa può essere sufficiente come dato iniziale per il successivo raffinamento con la registrazione che sfrutta l'informazione delle due superfici (passaggi successivi).

1. Per ogni punto della nuvola intra-operatoria posso determinare il punto più vicino in termini di distanza euclidea, rispetto ai punti appartenenti alla nuvola pre-operatoria. In questo modo si riesce ad ottenere un accoppiamento fittizio tra le due nuvole di punti.
2. Utilizzando le corrispondenze tra i punti individuate, si calcola la rototraslazione che minimizza una funzione di costo (ad esempio, nel caso della registrazione ai minimi quadrati, minimizzerò l'FRE). In altre parole in questo passaggio si vanno a registrare tra loro i punti accoppiati fittiziamente al passaggio precedente.



3. Si ripetono gli step 1 e 2 fino al raggiungimento di un criterio di stop (ad esempio finché l'errore di registrazione non si stabilizza e corrispondentemente le componenti della matrice di trasformazione omogenea non presentano più variazioni significative o fino al raggiungimento del numero massimo di iterazioni prefissato).
N.B. Per ottenere una soluzione del problema più rapida, in alcuni algoritmi si usa una pesatura delle singole coppie di punti: in questo modo si trascurano gli outliers. Questo migliora la robustezza, ma impedisce la dimostrabilità analitica della convergenza dell'algoritmo ad un minimo locale.

È importante osservare che è un metodo che trova un minimo locale: come ogni minimizzatore locale dipende dalle condizioni iniziali, cioè dall'allineamento iniziale. Si raggiungerà un buon risultato, se si partirà da delle buone condizioni iniziali.

È un algoritmo, nella sua implementazione originale, dispendioso dal punto di vista computazionale: per ogni punto della nuvola di punti intraoperatoria viene calcolata una distanza euclidea per ogni punto appartenente all'altra nuvola.

I punti possono essere nell'ordine delle migliaia, grazie all'utilizzo di scanner 3D o puntatori (ad esempio impostando un timer che per ogni tot milli secondi determina l'acquisizione di un punto). Ne conseguono tempi di calcolo notevoli, anche perché tali distanze saranno ricalcolate per ogni iterazione (nel caso peggiore si arriva ad una complessità $O(MN)$). Dopo questo sono stati sviluppati molti altri algoritmi, che provvedono all'ottimizzare il mapping dei punti, al fine di ridurre il costo computazionale.

Alcune varianti discretizzano la nuvola di punti preoperatori impostando delle aree (per esempio un volume cubico) di ricerca per ciascun punto: si calcolano le distanze euclidee solo all'interno di tali aree.

Altri non passano per una ricerca del punto più vicino, ma del punto su una superficie preoperatoria in termini di superficie triangolarizzata. In questo caso la superficie è descritta da un insieme di triangoli interconnessi, applicando algoritmi di computer grafica. Sono algoritmi molto più efficienti di quello visto in prima istanza, che aiutano a ridurre il tempo di calcolo.

Indipendentemente dalla implementazione, l'ICP si intende spesso come sinonimo di registrazione per superfici, nonostante non sia l'algoritmo predominante per la soluzione di questo problema.

Indipendentemente dall'implementazione, ad ogni passaggio l'algoritmo calcola un errore di registrazione tra i punti fittiziamente accoppiati (comunemente l'FRE in termini di quadratico medio) e termina comunicando l'errore finale ottenuto.

Da notare che un errore finale basso potrebbe essere dovuto ad un minimo locale, ad esempio. Sarà fondamentale effettuare un controllo di ragionevolezza.

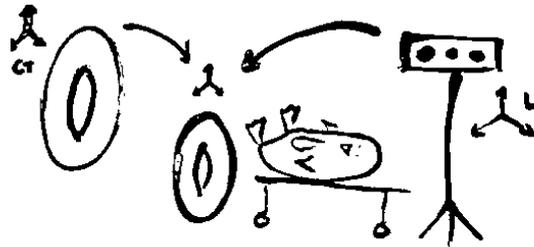
METODI DI REGISTRAZIONE CHE PREVEDONO L'USO DI UNO SCANNER INTRA-OPERATORIO

Si affronterà adesso il tema della registrazione d'immagini senza utilizzare il solo sistema di riferimento del localizzatore (ed i sensori ad esso associati).

Prendiamo ad esempio un'operazione alla colonna eseguita con l'ausilio di un navigatore chirurgico. Una metodica di registrazione ottimale al fine di ridurre l'errore di registrazione sarebbe quella basata sull'applicazione pre-operatoria di marker invasivi (avvitati magari al processo spinoso di ciascuna vertebre). Al fine di ridurre l'invasività e le problematiche logistiche si potrebbe ricorrere a marker applicati alla cute, aumentando però indubbiamente l'errore di registrazione poiché sia le vertebre che la cute sono mobili.

Per questa tipologia di procedure l'utilizzo di un ulteriore scanner intraoperatorio può essere la scelta ottimale.

Registrazione di immagini 3D/3D



Lo scanner intraoperatorio può essere uno scanner volumetrico come una sonda ecografica 3D oppure uno scanner 3D ai raggi-X (una CT intraoperatoria a bassa dose oppure una cone beam CT). Si registrano le immagini pre-operatorie con quelle dello scanner 3D intra-operatorio, sia tramite metodiche che si basano sull'intensità di segnale che con quelle che sfruttano informazioni geometriche (punti corrispondenti o superfici). Dopodiché se lo scanner intraoperatorio è calibrato con il localizzatore è possibile riportare coerentemente l'immagine pre-operatoria nel sistema di riferimento del localizzatore.

Nel caso dell'intervento alla colonna, un approccio possibile è ricostruire la superficie dell'osso in entrambe le immagini, intra e preoperatorie, ed allinearle. L'adeguatezza del meccanismo dipende dal tipo di intervento che deve essere eseguito. In questi casi si parla di registrazione 3D/3D, che trova utilizzo anche in interventistica e non solo per finalità diagnostiche. La registrazione 3D/3D è trattata in modo esaustivo nel corso di Elaborazione delle Immagini.

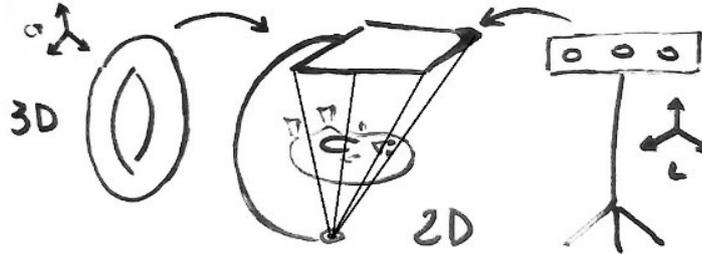
Registrazione di immagini 2D/3D

Un'altra possibilità è registrare immagini pre-operatorie volumetriche con immagini intraoperatorie 2D. In particolare, nell'intra-operatorio si può usare uno scanner a raggi X: uno dei più utilizzati è costituito da emettitore e detettore montati su un arco a C, noto come C-ARM.

È un dispositivo molto diffuso, grazie al suo basso costo ed alle basse dosi di radiazioni che comporta, oltre al fatto che è piuttosto maneggevole. E' comunemente utilizzato in interventi

endovascolari, ortopedici ed in molte procedure mininvasive in quanto permette una visione dell'anatomia non direttamente esposta.

Le immagini 2D acquisite da tali dispositivi possono essere utilizzate per registrare immagini pre-operatorie con il sistema di riferimento di un localizzatore. Lo schema seguente mostra i dispositivi ed i sistemi di riferimento in gioco.



Notare che i C-ARM acquisiscono immagini 2D proiettive, proprio come nel caso delle telecamere. Nel caso ottico con le telecamere si acquisisce una proiezione della superficie anteriore esposta dell'oggetto, mentre nel caso dei raggi X si ha una proiezione dell'intero oggetto sul dettore: in ogni caso, si ha sempre a che fare con una proiezione di punti dell'oggetto tridimensionale su un piano, lungo rette che passano per il centro di proiezione.

Si è visto, per esempio, che conoscendo il modello di proiezione della telecamera ed identificando in maniera univoca dei punti sull'oggetto d'interesse, è possibile determinare la sua posizione rispetto alla telecamera. Per analogia, la stessa cosa si potrebbe fare con le immagini del C-ARM, ma è difficile identificare in modo univoco i punti sull'anatomia del paziente.

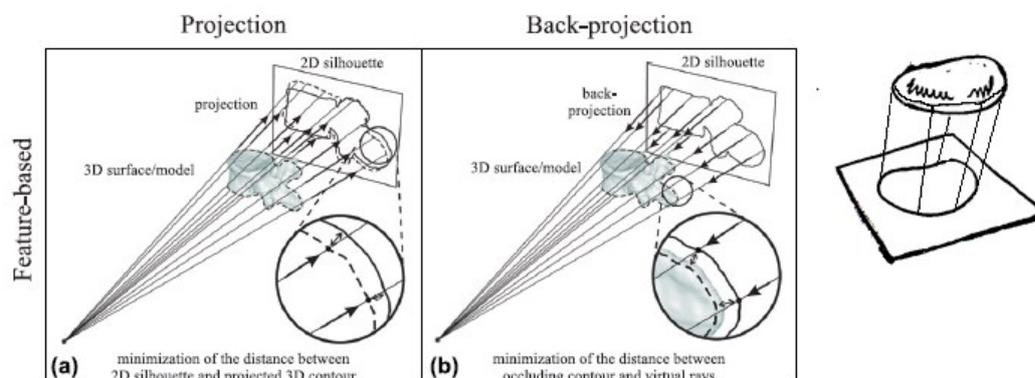
Si usano principalmente due tipologie di metodi di metodice di registrazione 3D/2D:

- Metodi di registrazione 2D/3D basati sull'intensità (come nel caso dei metodi 3D/3D)
- Metodi basati sui contorni. Sono quelli più comunemente utilizzati e sono descritti nel prossimo paragrafo.

Metodi di registrazione 2D/3D basati sui contorni

Si usano metodi di registrazione 2D/3D basati sui contorni soprattutto per le strutture rigide, ossia le ossa, poiché dalle immagini del C-ARM si possono identificare con alto grado di precisione i contorni di dette strutture.

Come detto precedentemente, queste immagini sono date dalla proiezione dell'oggetto, posizionato in un certo modo rispetto al sistema emittitore-detettore. L'obiettivo è identificare questa relazione nelle tre dimensioni data la proiezione 2D dell'oggetto stesso.



Per ogni punto del contorno 2D vi sarà un punto associato sull'oggetto 3D che giace lungo la linea di proiezione passante per il punto sul contorno 2D. Possiamo anticipare che per individuare queste corrispondenze esiste un'implementazione dell'algoritmo ICP: "ICP 3D/2D".

Analizzando il problema più in particolare, idealmente, si vorrebbe trovare la rototraslazione "vera" dell'oggetto 3D rispetto al sistema di proiezione, che abbia generato ogni punto proiettato in 2D.

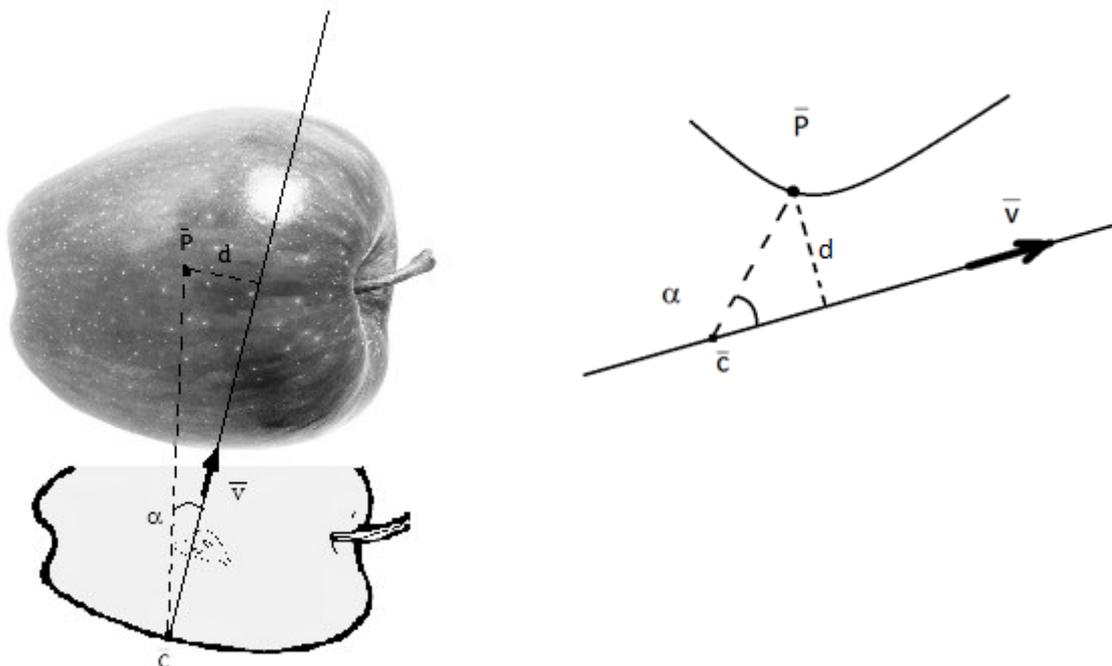
Se si tracciasse la retta di proiezione per ogni punto (backprojection), l'algoritmo troverebbe l'ottimo quando ciascun punto del bordo dell'oggetto vero fosse compreso nelle rette di proiezione, come in figura.

Per applicare questi metodi è necessaria anche in questo caso partire da una registrazione iniziale di massima. Spesso, nel caso dell'uso del C-ARM, si conosce già abbastanza bene quest'allineamento iniziale: esistono meccanismi di acquisizione standard per specifici distretti anatomici.

Oltre l'allineamento iniziale è necessario identificare la superficie dell'organo sull'immagine 3D preoperatoria, tramite segmentazione.

Dopodiché esistono sono molti algoritmi per ottenere la registrazione 2D/3D vera e propria. Ad esempio dato un punto C del contorno dell'immagine 2D, da questo si fa partire la retta di proiezione corrispondente su cui giace il versore \vec{v} . Per ciascuna retta di proiezione associata a ciascun punto del contorno 2D si determina un punto P della superficie 3D come il punto a minima distanza dalla retta stessa. Per far questo, operativamente, si va a scorrere i punti sulla superficie cercando il punto con distanza minima d rispetto alla direzione indicata dal versore \vec{v} , con d così determinata:

$$d = \|(\bar{p} - \bar{c}) \times \vec{v}\| = \|(\bar{p} - \bar{c})\| \cdot \sin \alpha$$



A questo punto, come nel caso dell'IPC "tradizionale", abbiamo ottenuto un accoppiamento fittizio tra i punti dell'immagine pre-operatoria 3D ed i punti del contorno 2D ed è possibile minimizzare la loro distanza applicando un passo di registrazione col metodo ai minimi quadrati. Iterativamente sarà poi possibile andare ad "avvicinare" l'oggetto virtuale pre-operatorio alla sua posa reale. L'algoritmo appena descritto avvicina le rette di proiezione alla superficie 3D dell'oggetto virtuale pre-operatorio utilizzando il concetto della back-projection. Esistono poi metodi che lavorano al contrario, il cui obiettivo è quello di minimizzare lo scarto tra la proiezione 2D della rappresentazione virtuale dell'oggetto pre-operatorio rispetto alla contorno 2D reale (che rappresenta la proiezione dell'anatomia reale).