Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 1
RIPASSO DELLE DISTANZE IN SPAZI CARTESIANI
E DELLE NOZIONI ASTRATTE SULLE FUNZIONI;
COORDINATE POLARI,CILINDRICHE E SFERICHE

1) Limitatezza e diseguaglianze notevoli
Distanza euclidea Prodotto scalare euclideo negli spazi cartesiani: Se $x,\ y \in \mathbf{R}^M$ si definisce il prodotto scalare euclideo: $\langle x \cdot y \rangle_M =: x_1 y_1 + \cdots + x_M y_M$.
Distanza e norma euclidea negli spazi cartesiani: In $\mathbf{R}$ la norma euclidea di $a \in \mathbf{R}$ non è altro che il suo valore assoluto $|a|$. La distanza euclidea tra $a \in \mathbf{R}$ e $b \in \mathbf{R}$ è data da $dist_{\mathbf{R}}(a,b) = |a-b|$, cioè dalla norma della differenza. La norma è la distanza da $0 \in \mathbf{R}$.
- Sulla base intuitiva del teorema di Pitagora in $\mathbf{R}^2$ si definisce come distanza euclidea tra $A = (a,\alpha) \in \mathbf{R}^2$ e $B = (b,\beta) \in \mathbf{R}^2$

$$dist_{\mathbf{R}^2}((a,\alpha),(b,\beta)) = \sqrt{|a-b|^2 + |\alpha-\beta|^2} = \sqrt{d_{\mathbf{R}}(a,b)^2 + d_{\mathbf{R}}(\alpha,\beta)^2} = \sqrt{\langle (A-B)\cdot(A-B)\rangle}.$$

La norma euclidea $|(a,\alpha)|_{\mathbf{R}^2} = \sqrt{a^2+\alpha^2}$ di (a,α) è la distanza dall'origine $(0,0) \in \mathbf{R}^2$.
- Identificando $\mathbf{R}^2$ con il piano complesso $\mathbf{C}$: $(a,b) \sim a + ib = z$ si ha che il modulo di z è la norma del corrispondente vettore di $\mathbf{R}^2$.
- Iterando tale procedimento si definiscono la norma euclidea e la distanza euclidea in $\mathbf{R}^M$:

$$A = (a_1, \dots a_M),\ B = (b_1, \dots b_M) \in \mathbf{R}^M,\quad |(a_1,\dots a_M)|_{\mathbf{R}^M} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_M^2} = \sqrt{\langle A \cdot A\rangle};$$

$$dist_{\mathbf{R}^M}((a_1,\dots a_M),(b_1,\dots b_M)) = \sqrt{dist_{\mathbf{R}^{M-1}}((a_1,\dots a_{M-1}),(b_1,\dots b_{M-1}))^2 \ +\ dist_{\mathbf{R}}(a_M,b_M)^2} =$$
$$= \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \cdots + (a_M-b_M)^2} = \sqrt{\langle (A-B)\cdot(A-B)\rangle} = |A-B|_{\mathbf{R}^M}.$$

<ins>Proprietà assiomatiche dei prodotti scalari</ins> $\langle x \cdot y\rangle$: s1) *non negatività:* $\langle x \cdot x\rangle \geq 0$,
s2) *bilinearità:* $\langle (x+\lambda u)\cdot(y+\mu v)\rangle = \langle x\cdot y\rangle + \lambda\langle u\cdot y\rangle + \mu\langle x\cdot v\rangle + \lambda\mu\langle u\cdot v\rangle$, per $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$,
s3)*commutatività (simmetria):* $\langle x\cdot y\rangle = \langle y\cdot x\rangle$,
s4) *non degenere:* $\langle x\cdot x\rangle = 0 \iff x = \underline{0}$.
<ins>Proprietà assiomatiche delle norme</ins> $||v||$: n1) *non negatività norma:* $||v|| \geq 0$,
n2) 1-*omogeneità (Talete):* $||\lambda v|| = |\lambda|\,||v||$, $\lambda \in \mathbf{R}$,
n3) *diseguaglianza triangolare norma:* $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$,
n4) *non degenere:* $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$;

Relazioni tra norma e prodotto scalare e proprietà che le caratterizzano: sn1) $||v||^2 = \langle v\cdot v\rangle$,
sn2) $||v+w||^2 \ - \ ||v-w||^2 \ = \ 4\langle v\cdot w\rangle$,
sn3) *eguaglianza parallelogramma:* $||v+w||^2 \ + \ ||v-w||^2 \ = \ 2||v||^2 \ + \ 2||w||^2$;

sng1) *Interpretazione geometrica del prodotto scalare euclideo:* $\langle A\cdot B\rangle_{E,M} = |A|_{E,M}|B|_{E,M}\cos \widehat{A0_{\mathbf{R}^M}B}$.
<ins>Proprietà assiomatiche delle distanze</ins> d: d1) *non negatività distanza:* $d(A,B) \geq 0$,
d2) *diseguaglianza triangolare:* $d(A,B) \leq d(A,C) \ + \ d(C,B)$,
d3) *simmetria :* $d(A,B) = d(B,A)$,
d4) *non degenere:* $d(A,B) = 0 \iff A = B$;
Proprietà della distanza in relazione a quelle della norma:
nd1) 1-*omogeneità (Talete):* $d(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d(A,B)$, $\lambda \in \mathbf{R}$,
nd2) *invarianza per traslazione:* $d(A+C, B+C) = d(A,B)$.

Per provare le diseguaglianze triangolari un metodo generale è il seguente.

Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz: 1) $|\langle A\cdot B\rangle| \leq ||A||\,||B||$,
2) avendosi l'eguaglianza se e solo se A e B sono linearmente dipendenti.

Prima giustificazione: per interpretazione geometrico-intuitiva del prodotto scalare euclideo.
Dimostrazione algebrica generale: 1) per ogni $t \in \mathbf{R}$ da s1), s2) (bilinearità) e s3)(simmetria):
$0 \leq ||A + tB||^2 = \langle (A + tB) \cdot (A + tB) \rangle = t^2 ||B||^2 + 2t\langle A \cdot B\rangle + ||A||^2$
pertanto il discriminante del trinomio in t è non positivo, cioè $4\langle A \cdot B\rangle^2 \leq 4||A||^2||B||^2$.
Se poi A e B sono dipendenti, $sA + tB = 0$, l'eguaglianza è immediata.
2) Viceversa se vale l'eguaglianza il discriminante è nullo ed il trinomio è $(t||B|| \pm ||A||)^2$. Se $||B|| = 0$ per $s4$) anche $B = \underline{0}$ e vi è dipendenza lineare. Altrimenti il trinomio si annulla per $t = T =: \mp\frac{||A||}{||B||}$. Ma il trinomio è anche $||A + tB||^2$ e si annulla per tale $t = T$, e quindi per s4) si ha $A + TB = \underline{0}$.
<u>Osservazione:</u> - quindi tale diseguaglianza vale *per ogni prodotto* $\langle u{\cdot}v\rangle$ che soddisfa $s1$), $s2$), $s3$), relativamente a $\|u\| = \sqrt{\langle u \cdot v\rangle}$.
- Per caraterizzare l'eguaglianza si usa anche $s4$).

Ne seguono dei corollari tra cui le diseguaglianze triangolari.

Massima pendenza: $$||w|| = \max_{v,||v||=1} \langle w \cdot v\rangle.$$
Prima giustificazione: per interpretazione geometrico-intuitiva del prodotto scalare euclideo.
Dimostrazione: per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz $||w|| \geq \langle w \cdot v\rangle$ per ogni v per cui $||v|| = 1$. Se $w = \underline{0}$ l'asserto è vero. Se $w \neq 0$ si pone $v = \dfrac{w}{||w||}$ ottenendo l'euguaglianza.

Diseguaglianza triangolare: n3) $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$; d2)$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.
Giustificazione geometrica: la minima lunghezza di un cammmino tra due punti è quella del segmento che li congiunge.
Dimostrazione algebrica generale: n3): da una parte per sn1) $||v+w||^2 = \langle (v+w)\cdot(v+w)\rangle =$ per bilinearità s2) e simmetria s3) $= ||v||^2 + ||w||^2 + 2\langle v \cdot w\rangle$,
d'altra parte $(||v|| + ||w||)^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v|| \, ||w||$, e per Cauchy-Schwrz si conclude.
d2): segue da $n3$): $d(A, B) = ||A - B|| = ||(A - C) + (C - B)|| \leq ||A - C|| + ||C - B||$.

Lemma. Se $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq M}}$ allora $$||L|| =: \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{|Lv|_{\mathbf{R}^m}}{|v|_{\mathbf{R}^M}} \leq |L|_{\mathbf{R^{mM}}}.$$

Dim.: $|Lv|_{\mathbf{R}^m} = \left| \sum_{j=1}^{M} v_j L^j \right|_{\mathbf{R^m}} \leq$ triangolare $\sum_{j=1}^{M} |v_j| \left| L^j \right|_{\mathbf{R^m}} \leq$ Cauchy-Schwarz$|v|_{\mathbf{R^M}}|L|_{\mathbf{R^{mM}}}$.

Diseguaglianze per componenti negli spazi cartesiani: se $x = (x_1, \dots x_M) \in \mathbf{R}^M$:

1) $$\max_{1\leq i\leq M} |x_i| \leq |x|_{\mathbf{R}^M} \leq \sqrt{M} \max_{1\leq i\leq M} |x_i|.$$

2) $$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^{M} |x_i| \leq |x|_{\mathbf{R}^M} \leq \sum_{i=1}^{M} |x_i|.$$

Dimostrazione: 1) la prima è ovvia poichè la somma di quadrati è maggiore di uno degli addendi, la seconda anche: la somma di M addendi è minore di M volte il loro massimo.
2) la prima si ottiene applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ai vettori di $\mathbf{R}^M$ $(|x_1|, \dots, |x_M|)$ e $(1, \dots 1) \in \mathbf{R}^M$, la seconda si ottiene semplicemente elevando al quadrato i due termini non negativi e osservando che i doppi prodotti del secondo sono non negativi.
Definizione - Si dice **palla aperta** di centro $p \in \mathbf{R}^M$ e raggio $r > 0$ il sottoinsieme dei punti di $\mathbf{R}^M$ che distano meno di r da p: $B(p, r) = \left\{x \in \mathbf{R}^M : (x_1 - p_1)^2 + \cdots + (x_M - p_M)^2 < r^2\right\}$.
- Si dice la **palla chiusa** il sottoinsieme dei punti di $\mathbf{R}^M$ che distano al più r da p:
$\overline{B}(p, r) = \left\{x \in \mathbf{R}^M : (x_1 - p_1)^2 + \cdots + (x_M - p_M)^2 \leq r^2\right\}$.
- Si dice che $A \subseteq \mathbf{R}^M$ è **limitato** se è *contenuto in qualche palla.*

2) Immagine, sostegno, traiettoria: se $f : D \to C$ è una funzione definita su D (*dominio*, Dom$f$) a valori in C (*codominio*) e $H \subseteq D$, si dice **immagine** di H per f,

il sottoinsieme di C i cui elementi sono i valori che f assume su H:

$$\{v \in C : \exists u \in H \ v = f(u)\}.$$

Tale insieme si indica con $f(H)$, $\mathrm{Im}_H f$, e se $H = D$ spesso semplicemente con Imf.

Funzioni limitate: una funzione $f : D \to \mathbf{R}^M$ si dice **limitata** se la sua immagine è un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^M$.

Surgettività: se $H \subseteq D$, $A \subseteq C$, quando $A \subseteq \mathrm{Im}_H f$ la funzione si dice *surgettiva* su A da H, ovvero: l'equazione $f(u) = v$ ha, *per ogni* $v \in A$, *almeno* una soluzione $u \in H$.

Definizione. Se $A \subseteq C$ è dato come immagine di $f : D \to C$, si dice descritto in forma **parametrica**.

Esempi: 1- $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $A = \mathrm{Im} f$ è il quarto di circonferenza (unitaria di centro $(0,0)$), nel primo quadrante.

2- $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos 4t, \sin 4t)$, $A = \mathrm{Im} f$ è l'intera circonferenza.

3- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (3\cos t + 1, 4\sin t - 2)$, $A = \mathrm{Im} f$ è l'ellisse di centro $(1, -2)$ e assi paralleli a quelli cartesiani lunghi 6 e 8: $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 16(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 9 \cdot 16 = 144\}$.

4- $f : [-\pi; \pi] \to \mathbf{R}^3$, $f(t) = (1,2,3) + (4\sin t, 5\sin t, 6\sin t) = (1+4\sin t, 2+5\sin t, 3+6\sin t)$, $A = \mathrm{Im} f$ è il segmento (percorso indietro, avanti, indietro a partire e finire con $(1,2,3)$ per $t = -\pi, \ \pi$) tra $(-3,-3,-3)$ (per $t = -\frac{\pi}{2}$) a $(5,7,9)$ (per $t = \frac{\pi}{2}$).

5- $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, $A = \mathrm{Im} f$ è il cono circolare retto di vertice $(0,0,0)$ ottenuto ruotando il grafico di $z = g(x) = |x|$ attorno all'asse verticale di equazioni $x = 0, \ y = 0$. Questo cono A è a sua volta il grafico della funzione $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $G(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2}) = \sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)|$.

Definizione. Per funzioni di più variabili reali $D \subseteq \mathbf{R}^M$ a valori in spazi cartesiani, $C = \mathbf{R}^m$, l'immagine, considerata per le sue proprietà geometriche, viene anche chiamata **sostegno**.

Definizione. - Una funzione f di una variabile reale ($D \subseteq \mathbf{R}$, $f(t) = (f_1(t), \dots f_m(t))$), con *funzioni componenti continue*, definite su di un intervallo D, si dirà anche

curva parametrizzata o **cammino**.

- Pensando f come *legge oraria*, il suo sostegno si dirà *traiettoria*.

- Se le f_i sono derivabili e il vettore $f'(t) =: (f_1'(t), \dots f_m'(t))$ è **non nullo** la retta affine $f(t) + sf'(t)$ parametrizza da $s \in \mathbf{R}$ si dirà **retta tangente alla curva all'istante** t.

Esempio 6: nell' esempio 3 l'ellisse A è percorsa da f infinite volte in senso antiorario.

Caso di parametrizzazioni lineari affini:- Nel caso in cui $H = D = \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$, $M \le m$, L di rango massimo M, la funzione $f(x_1, \dots x_M) = (f_1(x_1, \dots x_M), \dots, f_m(x_1, \dots x_M))$

$$f(x) = Lx + b, \ f_i(x_1, \dots x_M) = \sum_{j=1}^{M} L_i^j x_j \ + \ b_i, \ 1 \le i \le m,$$

è *lineare affine* e *l'immagine* di f è un *sottospazio affine* di $\mathbf{R}^m$.

-Giacitura: Se $b_i = 0$ per ogni $1 \le i \le m$ tale immagine, il *range* di L, è un sottospazio vettoriale che si dice **giacitura** dei sottospazi affini del precedente tipo ad essa paralleli.
Una base è data dalle colonne linearmente *indipendenti* della matrice L di coefficienti $L_i^j, \ 1 \le j \le M, \ 1 \le i \le m$. La dimensione si dice *rango* di f.

Segmenti parametrici orientati: - Un *segmento* (orientato) di estremi $P=(p_1,\dots,p_m)$, $Q=(q_1,\dots,q_m)\in\mathbf{R}^m$ quindi *può* semplicemente essere individuato in forma parametrica dall'immagine della restrizione ad un intervallo, e.g. $[0;1]$, della funzione affine $f:[0;1]\to\mathbf{R}^m$ (come esemplficato, esempio 4, può essere individuato in modo meno diretto)

$$f(t)=(Q-P)t+P=\mathbf{tQ}+(\mathbf{1}-\mathbf{t})\mathbf{P}=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ \vdots \\ f_m(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} tq_1+(1-t)p_1\\ \vdots \\ tq_m+(1-t)p_m\end{pmatrix}\ \mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\mathbf{1}.$$

Si indica con $[\overrightarrow{P;Q}]$.

Parallelepipedi M-dimensionali orientati in $\mathbf{R}^m$: - Nel caso in cui f è affine con dominio *solo* l'ipercubo di $\mathbf{R}^M$ ovvero $D=[0;1]^M$, e codominio $\mathbf{R}^m$

$$f(x)=P+Ax,\ 0\le x_i\le 1$$

$x=(x_1,\dots,x_M)\in D$, $P=(p_1,\dots,p_m)\in\mathbf{R}^m$, A matrice $m\times M$, di colonne $(A^1\dots A^M)$ *linearmente indipendenti* (quindi $M\le m$),

l'immagine determina il *parellelepipedo orientato* M-dimensionale in $\mathbf{R}^m$ con spigoli paralleli alle colonne, di vertici $P,\ P+A^1,\dots,P+A^M,\ P+A^1+A^2,\ P+A^1+A^3\dots,P+A^1+A^M,\dots$ $\dots,P+A^1+A^2+\dots+A^M$. Ovvero i punti di $\mathbf{R}^m$ del tipo:

$$P+x_1A^1+\dots+x_MA^M\ ,\quad 0\le x_1,\dots,x_M\le 1,\ (i.e.\,(x_1,\dots,x_M)\in D).$$

- In particolare il *rettangolo cartesiano N-dimensionale* in $\mathbf{R}^N$ ($N=m=M$), con spigoli paralleli agli assi, prodotto cartesiano $S_1\times\dots\times S_N$ di N segmenti $S_j\subset\mathbf{R}$ (ciascuno con o senza qualche estremo), cioè con "facce" $N-1$ dimensionali parallele ai piani $N-1$ dimensionali coordinati è di tipo simile.

Indicando con $e_,\dots,e_N$ la base canonica di $\mathbf{R}^N$, dati $P=a=(a_1,\dots,a_N)\in\mathbf{R}^N$, $b=(b_1,\dots,b_N)\in\mathbf{R}^N$:

$[a_1;b_1)\times(a_2;b_2)\times\dots\times[a_N;b_N]=\{x\in\mathbf{R}^N: a_1\le x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2,\dots,a_N\le x_N\le b_N\}=$

$$=a\ +\ \begin{pmatrix} b_1-a_1 & 0 & \dots 0\\ 0 & b_2-a_2 & \dots 0\\ & \vdots & \\ 0 & \dots & b_N-a_N\end{pmatrix}[0;1)\times(0;1)\times\dots\times[0;1]=$$

$=\{a+x_1(b_1-a_1)e_1+\dots+x_N(b_N-a_N)e_N\ ,\quad 0\le x_1<1,\ 0<x_2<1,\dots,\ 0\le x_N\le 1\}.$

Tetreadri: - Analogamente per $M\le m$ si ha la fomula paramterica di un *tetraedro* M dimensionale (per $M=2$ un *triangolo*, e $M=1$ un *segmento*) in $\mathbf{R}^m$ di vertici $0_{\mathbf{R}^m}$, $A^1,\dots A^M$

$$x_1A^1+\dots+x_MA^M\ ,\quad 0\le x_1,\dots x_M,\ x_1+\dots+x_M\le 1.$$

Definizione di convesso: - un sottoinsieme C, eventualmente vuoto, di uno spazio vettoriale si dice **convesso** se dati $P,\ Q\in C$ allora il segmento che li congiunge sta tutto in C:

$$\text{per ogni } P,\ Q\in C,\ 0\le t\le 1,\ \text{si ha } \mathbf{tQ}+(\mathbf{1}-\mathbf{t})\mathbf{P}\in C.$$

-Il **sostegno affine** di un insieme convesso è il sottospazio affine generato dal convesso.

Esempi: 7- i sottospazi affini sono convessi.

8- le immagini di parallelepipedi orientati sono convessi.

9- intersezioni di convessi è convessa.

10- il sottoinsieme del piano circoscritto dell'ellisse $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: 16(x-1)^2+9(y+2)^2=144\}$ dell'esempio 3, è individuato dalla *diseguaglianza* $16(x-1)^2+9(y+2)^2\le 144$ ed è un convesso.

11- Se $f:I\to\mathbf{R}$, $I\subseteq\mathbf{R}$ intervallo, è una funzione convessa, allora il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ definito dalla *diseguaglianza* $f(x)\le y,\ x\in I$ (sopragrafico di f) è un convesso.

3) Preimmagine, insieme di livello, sopralivello, sottolivello: se $f : D \to C$ è una funzione e $F \subseteq C$, si dice *preimmagine* di F per f il sottoinsieme di D di tutti gli elementi il cui valore tramite f è in F: $\underline{\{u \in D : f(u) \in F\}}$. Tale insieme si indica con $f^{-1}(F)$.
Osservazione: per l'uso di quest'ultima notazione è bene aver un minimo di *cautela*: sia perchè non è detto che f sia invertibile, sia perchè si omette di specificare il dominio D preso in considerazione (f potrebbe essere espressa da formule che hanno significato anche fuori di D).
Definizione. Se $B \subseteq D = \mathbf{R}^m$ è dato come preimmagine di una funzione a valori in $\mathbf{R}^M$ si dice descritto in forma **cartesiana**.

Esempi: 1- $f : [0; +\infty) \times [0; +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$,
$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in [0; +\infty) \times [0; +\infty) : x^2 + y^2 = 1\}$ quarto di circonferenza unitaria e centro $(0, 0)$ nel primo quadrante.
2-$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è la circonferenza.
3-$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \dfrac{1}{9}(x - 1)^2 + \dfrac{1}{16}(y + 2)^2$,
$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{9}(x - 1)^2 + \frac{1}{16}(y + 2)^2 = 1\}$ è l'ellisse di centro $(1, -2)$ e assi paralleli a quelli cartesiani lunghi 6 e 8.
4-$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$,
$B = f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2\}$ è il *doppio* cono circolare retto di vertice l'origine.
5- Il cono semplice con $z \geq 0$ è $B = \phi^{-1}(\{0\})$, ove $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\phi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$.
6-$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y, z) = (-30x + 12y + 10z, 15x + 12y - 20z)$,
$f^{-1}(\{(24, -21)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ -30x + 12y + 10z = 24,\ 15x + 12y - 20z = -21\}$ è la retta intersezione dei due piani definiti da $-30x + 12y + 10z = 24$, $15x + 12y - 20z = -21$.E' quella passante dai punti (per esempio) $(-3, -3, -3)$ e $(5, 7, 9)$.
7- $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, come nell'esempio 2,
$f^{-1}((-2; 9)) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -2 < x^2 + y^2 < 9\} = f^{-1}([0; 9)) = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 < 9\} = f^{-1}((-\infty; 9)) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 9\}$, è il cerchio "pieno" di centro $(0, 0)$, raggio 3 delimitato dalla circonferenza di stessi centro e raggio, e privato della stessa.
8- $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$,
$f^{-1}([1; 9)) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 9\}$ è la corona cicolare di centro l'origine e raggi 1 e 3, delimitata dalle corrispondenti cironferenze, privato di quella di raggio maggiore ma comprendente quella di raggio minore.
9- $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $g(x, y, z) = 8x + 10y + 12z$,
$g^{-1}([-90; 218]) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -90 \leq 8x + 10y + 12z \leq 218\}$, è l'intersezione dei due semispazi definiti dalle due diseguaglianze: $8x + 10y + 12z \geq -90$, $8x + 10y + 12z \leq 218$.
10- Il segmento S della retta nell'esempio 6, $f^{-1}(\{24, -21\})$, con i detti estremi $(-3, -3, -3)$ e $(5, 7, 9)$, deve esser specificato con ulteriori *diseguaglianze*, *e.g.*: $-90 \leq 8x+10y+12z \leq 218$. Quindi, usando le notazioni di es. 6 e 9, S è definito come $f^{-1}(\{24, -21\}) \cap g^{-1}([-90; 218])$, ovvero vedendolo come preimmagine di un'unica funzione ma a valori in $\mathbf{R}^3$, $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita con le precedenti due $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ e $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
$G(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, yz, z)) = (-30x + 12y + 10z, 15x + 12y - 20z, 8x + 10y + 12z)$
$F^{-1}(\{24\} \times \{-21\} \times [-90; 218]) = S$.
Definizione Fibra, insiemi di livello, luogo di zeri - Per $f : D \to C$, nel caso in cui $F = \{v\}$, $v \in C$, la preimmagine $f^{-1}(\{v\}))$ di un elemento si dice anche **fibra** su v di f in D.
- Se $C = \mathbf{R}^m$, più propriamente se $C = \overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$, la fibra su v si dice anche *insieme di livello* v di f in D. Si può usare tale dizione per fibre di funzioni qualsiasi.
- Se C è uno *spazio vettoriale* l'insieme di livello 0_C si chiamerà **luogo di zeri** di f.
- Se $C = \mathbf{R}^m$, $v = (v_1, \dots v_m) \in \mathbf{R}^m$, la fibra su v di una funzione $f = (f_1, \dots, f_m)$ su D è

l'*insieme delle soluzioni* u in D del sistema, in generale *non lineare*: $\begin{cases} f_1(u) & = & v_1 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ f_m(u) & = & v_m \\ u \in D & & \end{cases}$

Definizione Sopra e sotto livelli: - Se $C = \overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$ le preimmagini delle *semirette limitate superiormente* con estremo $[-\infty; v]$: $\{u \in D : f(u) \leq v\}$, si dicono **sottolivelli** di f (in D). Le preimmagini $\{u \in D : f(u) < v\}$, delle semirette limitate superiormente senza estremo $[-\infty; v)$, si dicono *sottolivelli stretti* di f.
- Analogamente i **sopralivelli** sono le preimmagini di *semirette limitate inferiormente.*
- Similmente si parlerà anche di *intralivelli* per le intersezioni tra un sopralivello e un sottolivello: cioè le *preimmagini di segmenti.*

Iniettività: se per ogni $v \in C$, la fibra $f^{-1}(\{v\})$ è vuota o ha un solo elemento la funzione si dice *iniettiva* su D, cioè: $f(u) = v$ ha, *per ogni* $v \in C$, al *più* una soluzione $u \in D$.
Funzione vuota: con *funzione vuota* si intende l'unica funzione con dominio $\emptyset$.
Restrizioni Dati $f : D \to C$, ed H insieme: si dice *restrizione di f ad H* la funzione con dominio $H \cap D$ ed ivi coincidente con f. Si indica con $f_{|_H}$.
Esempio: concreti esempi di insiemi di livello sono le linee altimetriche nei diversi tipi di carte geografiche e topografiche: nel caso $D \subset \mathbf{R}^2$ è l'insieme delle coordinate geografiche di una certa zona, $f(x, y)$ la quota del punto di coordinate (x, y).

Caso di funzioni lineari: - Nel caso $D = \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$, $f(x_1, \ldots x_M) = (f_1(x_1, \ldots x_M), \ldots, f_m(x_1, \ldots x_M))$ è *lineare* la fibra su $0_{\mathbf{R}^m} = (0, \ldots m\text{-volte} \ldots 0) \in \mathbf{R}^m$ di f si chiama anche *nucleo* o *Kernel* di f, ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^M$. Sono quindi luoghi di zeri di m *polinomi omogenei* di *primo grado* in M variabili. Tale nucleo coincide con la *giacitura* dei sottospazi affini dati dai livelli $f^{-1}(\{v\})$, $v \in \mathbf{R}^m$. Si ricorda in tali casi la formula di *dimensione*: $\mathbf{M} = \dim \mathrm{Dom}\mathbf{f} \;=\; \dim \mathrm{Im}\mathbf{f} + \dim \mathrm{Ker}\mathbf{f}$.
- I sopralivelli (sottolivelli) di una funzione lineare a valori reali sono *semispazi affini*, quindi *convessi.* Il sottospazio affine del livello, contenuto o meno nel semispazio, si dice **supporto**.
- Un sistema di diseguaglianze per funzioni lineari individua un'intersezione di semispazi affini, quindi un *convesso*, *contenente o meno* le porzioni dei relativi sottospazi di supporto che lo confinano, a secondo che le diseguaglianze "indipendenti" siano *strette o meno.*
- Segmenti: Come esemplificato un segmento in $\mathbf{R}^m$ *può* essere specificato da:
i- il livello di una funzione lineare *surgettiva* a valori in $\mathbf{R}^{m-1}$ ovvero dalle soluzioni di una sistema lineare non omogeneo in m incognite ed $m-1$ equazioni *indipendenti*, che individuano la *retta di sostegno* del segmento (formula della dimensione);
ii- da due diseguaglianze per una funzione lineare in m variabili (polinomio di primo grado nelle m variabili) che individuano il segmento su tale retta.
- Parallelepipedi M dimensionali in $\mathbf{R}^m$: possono essere individuati da:
i- il livello il livello di una funzione lineare *surgettiva* a valori in $\mathbf{R}^{m-M}$ ovvero dalle soluzioni di una sistema lineare non omogeneo in m incognite ed $m - M$ equazioni *indipendenti*, che individuano il *sottospazio affine M dimensionale di sostegno* del parallelepipedo;
ii-*coppie* di diseguaglianze per M funzioni lineari indipendenti che "inscatolano" la zona.
- Tetraedri M dimensionali in $\mathbf{R}^m$: analogamente:
i- si determina il sostegno che deve essere un sottospazio affine di dimensione M e quindi
ii- si usano coppie di diseguaglianze per M funzioni lineari indipendenti e una diseguaglianza per un'ultima funzione lineare, tutte fra loro indipendenti.

4) Grafici: se $f : D \to C$ è una funzione definita su D a valori in C si dice *grafico* di f su D il **sottoinsieme di** $D \times C$ (insieme delle coppie ordinate con prima componente in D e seconda in C) la cui seconda componente è il valore di f sulla prima componente:

$$\{(u,v) \in D \times C : \; v = f(u)\}, \text{ che si indica con } \mathrm{Graf}_D f.$$

- Il grafico di $f : D \to C$ può esser sempre visto come **immagine** della funzione "grafico" $g : D \to D \times C$: $g(u) = (u, f(u))$. Si dice che il grafico è dato in *forma parametrica*.

- Se C è uno spazio vettoriale il grafico di $f : D \to C$ può essere visto come **luogo di zeri** di $F : D \times C \to C$: $F(u,v) = v - f(u)$. Si dice che il grafico è dato in *forma cartesiana*.

<u>Osservazione:</u> molto spesso è comodo identificare $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^m$ con $\mathbf{R}^{M+m}$:
$((u_1, \dots u_M), (v_1 \dots v_m)) \sim (u_1, \dots u_M, v_1, \dots v_m)$. Pertanto se $D \subseteq \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$ si identifica il grafico di f con un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{M+m}$.
Se $D = \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$, ed f è lineare, $\mathrm{Graf} f$ si identifica con un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^{M+m}$:

$$\mathrm{dimGraf}\, f = \mathrm{dimDom}\, f = M.$$

In molti casi poi è comodo usare altre identificazioni di $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^m$ con $\mathbf{R}^{M+m}$. Per esempio $((u_1, \dots u_M), (v_1 \dots v_m)) \sim (v_1, \dots v_m, u_1, \dots u_M)$. Nel caso il grafico si vede come sottoinsieme di $C \times D$ piuttosto che di $D \times C$. Altre identificazioni elementari si ottengo permutando le componenti.

<u>Osservazione:</u> il grafico della restrizione di $f : D \to C$ ad un insieme H, $\mathrm{Graf} f_{|H}$, non è altro che $\mathrm{Graf}_{H \cap D} f$, cioè l'intersezione del grafico di f su D con la colonna di sezione H: $\mathrm{Graf}_D f \cap H \times C$.

<u>Esempio:</u> per esempio se $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(y,z) = 4 - 2y - 3z$, il grafico si identifica con il piano $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = f(y,z)\}$. Tale piano in $\mathbf{R}^3$ è definito da $x + 2y + 3z - 4 = 0$.
- Esso è dato in forma *cartesiana* come preimmagine di $0 \in \mathbf{R}$ della funzione reale affine $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $F(x,y,z) = x + 2y + 3z - 4$.
- È descritto in forma *parametrica* dall'immagine di
$g(s,t) = (s + 5t + 1, s - t, 1 - s - t) = s(1,1,-1) + t(5,-1,-1) + (1,0,1)$, $(s,t) \in \mathbf{R}^2$
essendo $((1,1,-1),(5,-1,-1))$ una base scelta a caso della *giacitura* del piano, cioè il sottospazio vettoriale definito dall'equazione omogenea $x + 2y + 3z = 0$, e $(1,0,1)$ un qualsiasi punto appartenente al piano di partenza.

Sopra e sotto grafici: - se $f : D \to \mathbf{R}$ è una funzione definita su D a valori reali si dice *sopra grafico*, [*sotto grafico*] di f su D il sottoinsieme di $D \times \mathbf{R}$:

$$\{(u,v) \in D \times \mathbf{R} : \; v \geq f(u)\} \subseteq D \times \mathbf{R}, \text{ e si indica con } \mathrm{Graf}^{\geq}{}_D f\ .$$

$$[\{(u,v) \in D \times \mathbf{R} : \; v \leq f(u)\}, \text{ e si indica con } \mathrm{Graf}^{\leq}{}_D f.]$$

- Si dirà *intragrafico* tra due funzioni f, g, a valori reali aventi egual dominio D, il sottoinsieme di $D \times \mathbf{R}$ compreso tra i due grafici:

$$\{(u,v) \in D \times \mathbf{R} : \; g(u) \leq v \leq f(u)\} \cup \{(u,v) \in D \times \mathbf{R} : \; f(u) \leq v \leq g(u)\} =$$
$$= G^{\geq} g \cap G^{\leq} f \;\cup\; G^{\geq} f \cap G^{\leq} g\ .$$

- Si diranno rispettivamente *sopragrafico negativo e sottografico positivo* gli insiemi

$\{(u,v) \in D \times \mathbf{R} : \; f(u) \leq v \leq 0\}$, $\{(u,v) \in D \times \mathbf{R} : \; 0 \leq v \leq f(u)\}$, indicati rispettivamente con $\mathrm{Graf}^{\geq,-} f$ e $\mathrm{Graf}^{\leq,+} f$, specificando il dominio in caso di ambiguità.
- Si diranno *strette* le analoghe nozioni definite invece con le diseguaglianze strette.

5) Coordinate polari, cilindriche e sferiche.

Coordinate polari: - $f(r,\phi)=(r\cos\phi, r\sin\phi):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$.

- Restringendosi a $(0;+\infty)\times[0;2\pi)$ si ottiene una *bigezione* tra tale striscia e $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\begin{cases} x(r,\phi)=r\cos\phi \\ y(r,\phi)=r\sin\phi \end{cases},$$

che dà un cambiamento di coordinate.

- Le linee coordinate $r=$ costante sono le circonferenze centrate nell'origine;
- e le linee coordinate $\phi=$ costante sono le semirette di vertice l'origine (private di esso).
- In particolare $r=r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, e,
- *nel primo quadrante* $x>0$, $y\geq 0$, $\phi=\operatorname{artan}\frac{y}{x}$: ivi $f^{-1}(x,y)=(r(x,y),\phi(x,y))=(\sqrt{x^2+y^2},\operatorname{artan}\frac{y}{x})$, differendo $\phi(x,y)$ negli altri quadranti per una costante:

$$\phi(x,y)=\begin{cases} \operatorname{artan}\frac{y}{x} & y\geq 0,\ x>0 \\ \frac{\pi}{2} & y>0,\ x=0 \\ \operatorname{artan}\frac{y}{x}+\pi & x<0 \\ \frac{3}{2}\pi & y<0,\ x=0 \\ \operatorname{artan}\frac{y}{x}+2\pi & y<0,\ x>0 \end{cases} \quad \text{(argomento naturale)} =$$

$$=\begin{cases} \pi-2\operatorname{artan}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}-x} & (x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\} \\ 0 & y=0,\ x>0 \end{cases},$$

per giusficare la seconda eguaglianza si usano le formule per la tangente dell'angolo dimezzato $\tan\dfrac{t}{2}=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$. Infatti $\dfrac{t}{2}=:\dfrac{\phi(x,y)-\pi}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ per (x,y) non appartenente al semisasse delle ascisse positive. Pertanto:

$$\frac{\phi(x,y)-\pi}{2}=\operatorname{artan}\tan\frac{\phi(x,y)-\pi}{2}=\operatorname{artan}\frac{\sin(\phi-\pi)}{1+\cos(\phi-\pi)}=\operatorname{artan}\frac{-\sin\phi}{1-\cos\phi}=$$

$$=-\operatorname{artan}\frac{r\sin\phi}{r-r\cos\phi}=-\operatorname{artan}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}-x}.$$

- Si adotta la notazione

$$\widehat{r}=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix},\ \widehat{\phi}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix},\ \vec{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{(posizione)}.$$

- Come vettori applicati in (x,y) la coppia $(\widehat{r},\widehat{\phi})$ è un sistema di riferimento "locale" ortonomale, orientato come la base canonica $\det\left(\widehat{r}\mid\widehat{\phi}\right)=1>0$: rispettivamente danno la direzione normale alla circonferenza nel suo punto (x,y), e quella tangente "orientata in senso antiorario" alla stessa in (x,y).

Esempi: - in coordinate polari la circonferenza di equazione $x^2+y^2=9$ ha equazione $r=3$;
- in coordinate polari la circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x+2y=4$ ha equazione $r^2+2r(sin\phi-2\cos\phi)=4$;
- in coordinate polari la retta di equazione $-2x+y=0$ ha equazione $\tan\phi=2$.

Coordinate cilindriche: - si tratta delle coordinate polari sui piani orizzontali, $z=$costante. La terza coordinata rimane quella cartesiana:

$$f:(0;+\infty)\times[0;2\pi)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3,\ f(r,\phi,z)=(r\cos\phi,r\sin\phi,z),\ \begin{cases} x(r,\phi,z)=&r\cos\phi\\ y(r,\phi,z)=&r\sin\phi\\ z(r,\phi,z)=&z\end{cases},$$

che è una bigezione con $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,z):z\in\mathbf{R}\}$.

- La superficie coordinata $r=$ costante è una superficie cilindrica retta di sezioni "orizzontali" ciconferenze di centri $(0,0,z)$ e raggio r, con asse $x=y=0$;
- e la superficie coordinata $\phi=$ costante è un sempiano "verticale" con supporto, da esso disgiunto, l'asse $x=y=0$.
Esempi: - in coordinate cilindriche la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ ha equazione $z^2+r^2=1$;
- in coordinate cilindriche la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare di π, attorno all'asse verticale, l'iperbole di equazioni $x^2-z^2=1$, $y=0$ ha equazione $r^2-z^2=1$;
- in generale dato un grafico, rispetto alla varibile z, nel piano $y=0$ quindi di equazioni $x=g(z)$, $y=0$, l'equazione, in coordinate cilindriche, della superficie ottenuta facendolo ruotare di 2π attorno all'asse verticale è $r=|g(z)|$.

Coordinate sferiche "geografiche":

$$\text{-}\ f(r,\phi,\theta)=(r\cos\theta\cos\phi,r\cos\theta\sin\phi,r\sin\theta):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3.$$

- Restringendosi a $(0;+\infty)\times(-\pi;\pi]\times\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ si hanno le coordinate sferiche " geografiche":

$$\text{la bigezione } f:(0;+\infty)\times(-\pi;\pi]\times\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,z):z\in\mathbf{R}\},$$

$$\begin{cases} x(r,\phi,\theta)=&r\cos\theta\cos\phi\\ y(r,\phi,\theta)=&r\cos\theta\sin\phi\\ z(r,\phi,\theta)=&r\sin\theta\end{cases}.$$

- La superficie coordinata $r=$ costante è una sfera $S((0,0,0),r)=S(r)$ centrata in $(0,0,0)$ di raggio r, senza i poli sull'asse $x=y=0$;
- la superficie coordinata $\phi=$ costante (*longitudine*) è un sempiano "verticale" con supporto, da esso disgiunto, l'asse $x=y=0$,
le sue intersezioni con sfere centrate nell'origine son i semicerchi *meridiani*;
- la superficie coordinata $\theta=$ costante (*latitudine*) è una superficie conica unilatera con vertice in $(0,0,0)$ e di esso privata,
le sue intersezioni con sfere centrate nell'origine son i cerchi *paralleli*.

- Si adottano le notazioni seguenti: $p=(x,y,z)$; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=r\cos\theta;\qquad \widehat{p}=\widehat{r}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{pmatrix},$$

versore direzione dall'origine normale alla sfera unitaria in $\widehat{p}$;

$$\widehat{\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

versore di latitudine “orizzontale” in “senso antiorario” e
tangente alla sfera unitaria e alla circonferenza del “parallelo” in $\widehat{p}$;

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} -\dfrac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

rispettivamente $\widehat{\rho}$ il versore “orizzontale” ortogonale al precedente, e $\widehat{\theta}$ il versore di longitudine “verticale” da “sud a nord” e tangente alla sfera unitaria e alla circonferenza massima del “meridiano” in $\widehat{p}$.

- Come vettori applicati in $\widehat{p}$ i versori mutuamente ortogonali nell'ordine $(\widehat{r}, \widehat{\phi}, \widehat{\theta})$ individuano una base ortonormale locale, orientata come la base canonica di $\mathbf{R}^3$: $\det(\widehat{r} \mid \widehat{\phi} \mid \widehat{\theta}) = 1 > 0$.

Esempio: la funzione *proiezione stereografica* dal punto $N(0,0,1)$ “polo nord”, al piano coordinato di equazione $z = 0$ “piano equatoriale” , $\sigma : S(1) \setminus \{N\} \to \{(x,y,0)\}$, è ottenuta intersecando con tale piano la retta per N ed un punto generico$P \in S(1)$, $P \neq N$. In coordinate sferiche $P = (1, \phi, \theta)$, mantenendo la “longitudine” ϕ, per similitudine tra i triangoli di vertici N, P, $(0,0,\sin\theta)$ e N, $\sigma(P), (0,0,0)$, si ha $\sigma(P) = \left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\cos\phi, \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\sin\phi, 0\right)$.

** Esercizio. *(Coordinate sferiche “geografiche” in $\mathbf{R}^N$)* Per $N \geq 2$ si generalizzano sia le coordinate polari che le sferiche

$$f(r,\theta_1) = (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$f(r,\theta_1,\theta_2) = (r\cos\theta_2\cos\theta_1, r\cos\theta_2\sin\theta_1, r\sin\theta_2) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,$$

come segue:

$$\mathbf{G} : [0,\infty[\, \times [-\pi,\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]^{N-2} \to \mathbf{R}^N: \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{G}(r,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{N-1}) = r\,\hat{\mathbf{r}}_N = r\,(\cos\vartheta_{N-1}\hat{\mathbf{r}}_{N-1}, \sin\vartheta_{N-1}) \\ \\ \hat{\mathbf{r}}_{k+2} = (\cos\vartheta_{k+1}\hat{\mathbf{r}}_{k+1}, \sin\vartheta_{k+1}),\ 0 < k \leq N-2 \\ \\ \hat{\mathbf{r}}_2 = (\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1) \end{cases}$$

$$\text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_N = \quad r\sin\vartheta_{N-1} \\ x_{N-1} = r\cos\vartheta_{N-1}\sin\vartheta_{N-2} \\ x_{N-3} = r\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\sin\vartheta_{N-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_3 = \quad r\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\cos\vartheta_{N-1}\ldots\ldots\cos\vartheta_3\sin\vartheta_2 \\ x_2 = \quad r\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\cos\vartheta_3\cos\vartheta_2\sin\vartheta_1 \\ x_1 = \quad r\cos\vartheta_{N-1}\cos\vartheta_{N-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\cos\vartheta_3\cos\vartheta_2\cos\vartheta_1 \end{cases}$$

i- Si ha che $\mathbf{G}$ è surgettiva su $\mathbf{R}^N$. *ii*- Si ha che $\mathbf{G}$ è iniettiva da $(0,\infty[\,\times(-\pi,\pi]\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{N-2}$ (ovvero dato $\mathbf{x}$ si ha che ϑ_h è individuato univocamente se $\vartheta_{h+1},\ldots\vartheta_{N-1} \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$).
iii- Che immagine ha tale restrizione di $\mathbf{G}$?

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

Ripasso sulla nozione astratta di funzione, funzioni lineari. Distanza euclidea, norma e prodotto scalare: Cauchy-Schwarz. Limitati. Intorni, aperti e chiusi.

[FS] cap.2.8,9, 19 pagg.35-42, pagg.81-82.

[B]cap.III.3, 7 pagg. 108-111, pagg. 127-137; cap IV.2, 3 pagg. 170-184; cap. V.6, 7 pagg. 247-252.

[F] cap.2.14, 17, 19 Esem. 3 pagg. 78-79, pagg. 89-93, pagg. 96-97; cap.3.25 pagg.121-123.