Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 1

STUDI ELEMENTARI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI
A VALORI IN SPAZI CARTESIANI (FT 1, 5, 10, 12, 13)

ESERCIZIO n.1 Si studi l'immagine delle seguenti funzioni:

$t \in \mathbf{R} \mapsto (\sin 2t, \cos 2t)$, $\quad t \in \mathbf{R} \mapsto (t^2, t^3)$, $\quad t \in \mathbf{R} \mapsto (2\cos t, 3\sin 2t + 1)$

$t \in \left[-\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right] \mapsto (t\cos t, t\sin t)$, $\quad t \in \mathbf{R} \mapsto (\sin t, \sin t, \sin t)$, $\quad t \in \mathbf{R} \mapsto (\cos t, \sin t, t)$,

$t \in [2; 3[\mapsto (t+1, 2t+3, 3t+4)$, $\quad (s,t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (s, t, s+t)$, $\quad (s,t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (s, t, s^2+t^2)$.

ESERCIZIO n. 2 a) Si trovi la minima distanza del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dal grafico (t, t^2), $t \in \mathbf{R}$.
b) Si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto sulla sfera unitaria di centro l'origine della funzione distanza dalla retta (in forma parametrica) $t(1,2,3) + (4,5,6)$, $t \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 3 Si provi, per $x,\ y \geq 0$, che $\arctan(x+y) \leq \arctan x + \arctan y$.

ESERCIZIO n. 4 Per le seguenti funzioni si disegnino gli insiemi di livello
$\{(x,y) : f(x,y) = 1\}$, $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = 1\}$.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; b) $f(x,y) = |x| + |y|$;

c) $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$; d) $f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p > 1$;

e) $f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p \in]0;1[$; f) $f(x,y,z) = |x| + |y| + |z|$;

g) $f(x,y) = \log(e \cdot \mathrm{artan}(x^2 + y^2 - 4))$.

ESERCIZIO n.5 Si disegnino in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ :\ f(x,y) = f(a,b)\ \}$, al variare di f e di (a,b) nei casi seguenti:

$x^2 - y^2$, $(2,-1)$; $y^3 - x^2$, $(0,0)$; $(y - x^2)^2 - x^4$, $(0,0)$; $\frac{x-y}{x+y}$, $(1,1)$; $\cos\frac{x}{y}$, $(\pi, 4)$;
e^{xy}, $(2,0)$; $\frac{x}{x^2+y^2}$, $(1,2)$.

ESERCIZIO n. 6 Si disegnino in modo approssimativo i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$\{(x,y,z) :\ 2 = 3x + 5y + 7z\}$;

$\{(x,y,z) :\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 121\}$; $\{(x,y,z) :\ (2x-10)^2 + 9y^2 + z^2 \geq 111\}$;

$\{(x,y,z) :\ z = x^2 + y^2\}$; $\{(x,y,z) : x^2 - y^2 = z\}$;

$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$; $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq -1\}$;

$\{(x,y,z) :\ x^2 - y^2 = z^2\}$; $\{(x,y,z) :\ z^2 = x^2 + y^2\}$;

$\{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 5 = 0\}$; $\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} = \cosh z\}$;

$\{(x,y,z) :\ |x| + |y| + |z| = 1\}$; $\{(x,y,z) :\ \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\ \}$.

ESERCIZIO n. 7 Determinare e rappresentare graficamente il dominio di definizione D delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+21y^2-10xy}{x+4y}}$, $f:D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$; b) $f(x,y,z)=\log\frac{x^2+y^2-1}{x+y+z}$, $f:D\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$;
c) $f(x,y,z)=\left(\operatorname{artan}\frac{x+y-z}{y(x^2-4)},\operatorname{arsin}(x^2-y^2-z^2)\right)$ $f:D\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$.
d) $f(t)=(\cos 2t+2\cos t, 2\sin t, \sin 2t)$, $f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$

ESERCIZIO n. 8 a) Quale delle funzioni del precedente esercizio è limitata?

b) Quale è iniettiva? c) Quale surgettiva?

ESERCIZIO n. 9 Si dia un'idea saliente del comportamento dei grafici delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y)=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y$, b) $g(x,y)=(f(x,y))^4$, c) $h(x,y)=xy^2$.

ESERCIZIO n. 10 Trovare una parametrizzazione per l'intersezione dei grafici delle funzioni $f(x,y)=3-x^2-2y^2$ e $g(x,y)=x^2+y^2$, (cioè trovare una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^3$ che abbia come immagine tale intersezione).

ESERCIZIO n. 11 a) si trovi, come luogo di zeri, la retta tangente all'insieme definito dell'equazione $x^2+y^2=2$ nel punto $(1,1)$.
b) si trovino le equazioni della retta tangente alla parabola nello spazio definita da $x=y$ e $z=2x^2$.
c) Si trovi, come luogo di zeri, il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ nel punto $(1,1,2)$.

ESERCIZIO n.12 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ sul dominio definito da $|x|+|y|\le 1$.

ESERCIZIO n. 13 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x,y)=\log(x+y)$ sul cerchio di centro l'origine e raggio 2.

ESERCIZIO n. 14 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x,y,z)=|x-yz|$ sul cubo $[0,1]^3=\{(x,y,z): 0\le x,\ y,\ z\le 1\}$.

ESERCIZIO n. 15 Data $f(x,y,z)=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))=:(x^3,y^3,z^3)$

a) La funzione è bigettiva da $\mathbf{R}^3$ in sé. Se nel sistema di coordinate usuale un punto corrisponde a $(1,2,3)$ quali sono le coordinate nel sistema non lineare (X,Y,Z)?
b) Si consideri la legge oraria $\gamma(t)=t(4,5,6)$ (retta parametrica) nell'usuale sistema di coordinate. Qual'è la velocità nel nuovo sistema di coordinate?
c) Si consideri il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto dalla forza F espressa nelle coordinate (X,Y,Z) dalla terna costante $(1,2,3)$ su una generica traiettoria di legge oraria, espressa sempre in questo sistema di coordinate da $A(t)=(U(t),V(t),W(t))$ $t\in[0;1]$:

$$\mathcal{L}=\int_0^1\langle F\cdot A'\rangle\,dt=\int_0^1[U'(t)+2V'(t)+3W'(t)]\,dt.$$

Come si esprime nelle coordinate usuali questa forza F, in funzione del tempo, lungo la stessa traettoria, ora espressa dalla terna $a(t)=(u(t),v(t),w(t))$?

ESERCIZIO n. 16 Si considerino le due leggi orarie $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ e $\beta(t) = (\cos t, 2\sin t, 3t)$. Calcolare la derivata rispetto a t (velocità) della legge oraria $\alpha(t) \times \beta(t)$.

ESERCIZIO n. 17 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (x^3 - y, y^3 + x)$, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

a) Si verifichi che f è iniettiva e surgettiva.

b) Si disegnino i generici insiemi di livello delle funzioni X ed Y componenti della funzione vettoriale f.

ESERCIZIO n. 18 a- La funzione $f(x, y) = \binom{x-yx}{2xy}$ da $\mathbf{R}^2$ in se è iniettiva? È surgettiva?

b- Sia $f(x, y) = \binom{x^2+y^2}{2xy} = (u, v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$ (si consideri la simmetria rispetto alle due bisettrici).

ESERCIZIO n. 19 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (y - x^2, y - e^{2x} - 2x)$

a) Si disegnino gli insiemi di livello di $X - Y$. b) La funzione è bigettiva da $\mathbf{R}^2$ in sé?
