Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 2
IL LINGUAGGIO DEGLI SPAZI CON DISTANZA
FUNZIONI BILINERI, PRODOTTI SCALARI, NORME
INTORNI, APERTI, CHIUSI, FRONTIERA.

Proprietà assiomatiche dei prodotti scalari $\langle x \cdot y \rangle$:

s1) *non negatività o essere semidefinita positiva:* $\langle x \cdot x \rangle \geq 0$,

s2) *distributività o bilinearità:* $\langle (x + \lambda u) \cdot (y + \mu v) \rangle = \langle x \cdot y \rangle + \lambda \langle u \cdot y \rangle + \mu \langle x \cdot v \rangle + \lambda\mu \langle u \cdot v \rangle$, per $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$,

s3) *commutatività o simmetria:* $\langle x \cdot y \rangle = \langle y \cdot x \rangle$,

s4) *non degenere:* $\langle x \cdot x \rangle = 0 \iff x = \underline{0}$.

Proprietà assiomatiche delle norme $||v||$:

n1) *non negatività norma:* $||v|| \geq 0$,

n2) 1-*omogeneità (Talete):* $||\lambda v|| = |\lambda|\,||v||\ ,\quad \lambda \in \mathbf{R}$,

n3) *diseguaglianza triangolare norma:* $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$,

n4) *non degenere:* $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$;

Relazioni tra norma e prodotto scalare e proprietà che le caratterizzano:

sn1) $||v||^2 = \langle v \cdot v \rangle$,

sn2) $||v + w||^2 \ - \ ||v - w||^2 \ = \ 4\langle v \cdot w \rangle$,

sn3) *eguaglianza parallelogramma:* $||v + w||^2 \ + \ ||v - w||^2 \ = \ 2||v||^2 \ + \ 2||w||^2$;

sng1) *Interpretazione geometrica del prodotto scalare euclideo:* $\langle A \cdot B \rangle_{E,M} = |A|_{E,M} |B|_{E,M} \cos \widehat{A 0_{\mathbf{R}^M} B}$.

Proprietà assiomatiche delle distanze d:

d1) *non negatività distanza:* $d(A, B) \geq 0$,

d2) *diseguaglianza triangolare:* $d(A, B) \leq d(A, C) \ + \ d(C, B)$,

d3) *simmetria :* $d(A, B) = d(B, A)$,

d4) *non degenere:* $d(A, B) = 0 \iff A = B$;

Proprietà della distanza in relazione a quelle della norma:

nd1) 1-*omogeneità (Talete):* $d(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d(A, B), \quad \lambda \in \mathbf{R}$,

nd2) *invarianza per traslazione:* $d(A + C, B + C) = d(A, B)$.

1 Spazi Metrici e distanze.

1.1 Spazi pseudo-metrici e pseudo-distanze: sia F un *qualsiasi* insieme, $d : F \times F \to \mathbf{R}$ che verifichi $d1$), $d2$), $d3$) in FT1-1, si dirà *pseudodistanza* su F, e (F, d) *spazio pseudo metrico.*
Spazi metrici: se inoltre d soddisfa $d4$), si dirà *distanza* su F, ed (F, d) *spazio metrico.*

Distanza punto insieme. Se d è una pseudo-distanza su F, $C \subseteq F$ si definisce la distanza di un punto $x \in F$ da C il numero $dist(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$.

Definizione - Si dice **palla aperta** di centro $p \in F$ e raggio $r > 0$ il sottoinsieme dei punti di F che distano meno di r da p: $B(p, r) = \{x \in F : d(x, p) < r\}$.

- Si dice la **palla chiusa** il sottoinsieme dei punti di F che distano al più r da p:
$\overline{B}(p,r) = \{x \in F : d(x,p) \leq r\}$.
Definizione- Si dice che $A \subseteq F$ è **limitato** se è *contenuto in qualche palla.*
- Si dice che $f : D \in F$ è **limitata** se la sua *immagine è limitata.*

Esempi: 0- in $\mathbf{R}^M$ le seguenti funzioni reali definite su $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^M$ sono distanze: $d_2(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_M-y_M)^2}$ (distanza euclidea), $d_1(\vec{x},\vec{y}) = |x_1-y_1|+\cdots+|x_M-y_M|$, $d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_M-y_M|\}$ (distanza uniforme). Le rispettive palle di raggio r sono rispettivamente palle euclidee di raggio r, 2^M-edri di diagonali parallele agli assi e lunghe $2r$, M-cubi con lati paralleli agli assi lunghi $2r$ (tutti con stesso centro). Si nota che sono distanze invarianti per traslazione: $d(\vec{x}+\vec{z},\vec{y}+\vec{z}) = d(\vec{x},\vec{y})$.

Per provare che sono distanzae basta provare la diseguaglianza triangolare. Per la distanza euclidea sia è stao provato in FT1.1. Per La distanza d_1 è immediata essendo vera per ogni addendo, poichè la diseguaglianza triangolare è vera per il mdoulo di numeri reali. Per la distanza uniforme, per invarianza per traslazione basta mostrarlo per la distanza da $\vec{0}$, usando il fatto che il massimo di una somma di due funzioni (le due M-ple che danno il valori assoluti delle differenze delle coordinate) è non maggiore della somma dei massimi:

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = d_\infty(\vec{x}-\vec{y},\vec{0}) = \max_i\{|x_i-y_i|\} \leq \max_i\{|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\} \leq$$
$$\leq \max_i\{|x_i-z_i|\} + \max_i\{|z_i-y_i|\} = d_\infty(\vec{x},\vec{z}) + d_\infty(\vec{y},\vec{z}).$$

Le diseguaglianze per componenti provate in FT1.1

1) $$\max_{1\leq i\leq M}|x_i| \;\leq\; |\vec{x}|_{\mathbf{R}^M} \;\leq\; \sqrt{M}\max_{1\leq i\leq M}|x_i|.$$

2) $$\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{i=1}^{M}|x_i| \;\leq |\vec{x}|_{\mathbf{R}^M} \;\leq\; \sum_{i=1}^{M}|x_i|.$$

si interpretano geometricamente nell'ordine dicendo che (a parità di centro):
la palla di raggio r è contenuta nel cubo di lato $2r$, il cubo di lato $\frac{2}{\sqrt{M}}r$ è contenuto nella palla di raggio r, la palla di raggio r è contenuta nel 2^M-edro di diagonali $2\sqrt{M}$, e il 2^M-edro di diagonali $2r$ nella palla di raggio r.

1- già per sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ si possono fornire diverse strutture da spazio metrico.
- Per una circonferenza $S \subseteq \mathbf{R}^2$ di raggio R, è definita una distanza $d_S : S\times S \to [0; R\cdot\pi]$. Per P, $Q \in S$, sia $\phi \in [0;\pi]$ l'angolo al centro, si definisce la distanza *geodetica*

la "lunghezza minima" tra quelle degli archi di curve che congiungono P e Q.

nel caso $\quad d_S(P,Q) = R\cdot\phi,$

- D'altronde la distanza euclidea di $\mathbf{R}^2$ ristretta ad $S\times S$ è anch'essa una distanza su S, la lunghezza della corda che congiunge i due punti sulla circonferenza, che è diversa da d_S:

$$d_{\mathbf{R}^2\cap S}(P,Q) = |P-Q|_{\mathbf{R}^2} = 2\cdot R\cdot\sin\tfrac{\phi}{2}.$$

-Si ha direttamente la diseguaglianza $\quad |P-Q|_{\mathbf{R}^2} \leq d_S(P,Q)$,
inoltre, per concavità di $f(x) = \sin x$ in $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $d_S(P,Q) = R\cdot\phi \leq R\cdot\pi\sin\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2}|P-Q|_{\mathbf{R}^2}$.
Le due diverse distanze *si controllano l'una con l'altra*: ogni "palla" di raggio ρ di d_S è contenuta nella palla di stesso raggio di $d_{\mathbf{R}^2\cap S}$, e contiene la palla di $d_{\mathbf{R}^2\cap S}$ di raggio $\frac{2}{\pi}\cdot\rho$.

2- Non sempre due distanze possono controllarsi a vicenda.
a- Per una spirale attorno a $(0;0)$ definita in coordinate polari da $r(\phi+1)=1$, $\phi \geq 0$, di lunghezza infinita (comunque sia definita la lunghezza, quella dell'arco di curva per $\phi \in [2h\pi;(2h+1)\pi]$ è maggiore di quella del segmento congiungente i due punti di intersezione con l'asse orizzontale, quindi di $\frac{1}{2h\pi+1}$):
la "distanza geodetica" lungo questa curva non è controllata da quella euclidea.
b- Un esempio più importante: si consideri $C[0;1]$, lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo chiuso e limitato $[0;1]$. Per la diseguaglianza triangolare in $\mathbf{R}$, al fatto che l'estremo superiore di una somma è non maggiore della somma degli estremi superiori, e alla linearità degli integrali, le seguenti sono distanze su $C[0;1]$:

$$\text{per } f,\, g \in C[0;1]: \qquad d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0;1]} |f(x)-g(x)|, \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx\ .$$

- Si ha sempre $d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g)$.
- Ma per nessuna costante C si può avere per tutte le $f,\, g \in C[0;1]$ $d_\infty(f,g) \leq C \cdot d_1(f,g)$.
Infatti fissata $C>0$ prendendo come g la funzione nulla e come f la funzione lineare a tratti $C - C^2x \geq 0$ per $x \in [0;1/C]$, nulla altrimenti, con grafico su $[0;1]$ triangolare, si ha:

$$\max_{x\in[0;1]} C - Cx = C > \frac{C}{2} = C \cdot \text{ (area triangolo di altezza } C \text{ e base } \frac{1}{C}\ ) = C \cdot \int_0^{\frac{1}{C}} (C - C^2x)\,dx.$$

Definizione di distanza uniforme tra funzioni limitate cfr. FT6.1, 6.3
Si considera $\mathcal{B}(D,M)$ l'insieme delle funzioni *limitate* di dominio D a valori nello spazio metrico (M,d). Si definisce la **distanza uniforme** su $\mathcal{B}$ come segue: $f,\, g \in \mathcal{B}$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in D} d(f(x), f(y))$$

Definizione di pseudo distanza integrale tra funzioni FT6.1, 6.3.
Si considera $\mathcal{I} = RL^1(I,\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni *assolutamente integrabili in senso genearlizzato* definite sull'intervallo I a valori in $\mathbf{R}$. Per $f,\, g \in \mathcal{I}$

$$d_1(f,g) = \int_I |f(x)-g(x)|\,dx$$

definisce una *pseudo distanza* su $\mathcal{I}$ detta (pseudo)**distanza integrale**.

Definizione: convergenza di successioni a valori in uno psazio metrico. Cfr. FT 5.1, 6.1, 6.2.3. Siano: (M,d) uno spazio (pseudo)-metrico, $a : \mathbf{N} \to M$ successione, ed $\ell \in M$.
Si dice che a converge a ℓ relativamente alla distanza d, per n che tende ad infinito, se
per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ per cui per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha $d(a_n, \ell) \leq \varepsilon$, cioè

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n,\ell) = 0.$$

Si scriverà $d-\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, o $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Esempi: 1.1 convergenza di punti nel piano cartesiano: $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^2$, $a_n = (x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2$, $M = \mathbf{R}^2$, d la distanza euclidea, $\ell = (x_\infty, y_\infty) \in \mathbf{R}^2$. a_n converge per la distanza euclidea ad ℓ se e solo se: $(x_n - x_\infty)^2 + (y-n-y_\infty)^2 \longrightarrow\!\!\to 0$, per $n \to \infty$.
Per le diseguaglianze per componenti (FT1.1) ciò avviene se e solo se vi è convergenza per le due distanze d_∞ e d_1 introdotte nell'esempio 0.
2.1 $a : \mathbf{N} \to C[0;1] = M$, $a_n = f_n \in C[0;1]$, d la distanza uniforme, $\ell = f \in C[0;1]$. Si ha che f_n converge relativamente alla distanza uniforme ad f per $n \to \infty$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} \max_{[x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
Definizione: convergenza uniforme se una successione di funzioni limitate converge ad una funzione limitata relativamente alla distanza uniforme si dirà che vi è con*vergenza uniforme*, cfr. FT6.2.3.

Proposizione, distanze su prodotti cartesiani: se $d_1, \dots, d_m$ sono distanze rispettivamente sugli insiemi $E_1, \dots, E_m$ allora le seguenti sono distanze su $E_1 \times \cdots \times E_m$:

$$d_{\times_1}((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_m(x_m, y_m),$$

$$d_{\times_\infty}((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_m(x_m, y_m)\},$$

$$d_{\times_2}((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, y_m))^2},$$

$$\text{inoltre} \qquad \frac{d_{\times_1}}{\sqrt{M}} \le d_{\times_2} \le d_{\times_1}, \qquad d_{\times_\infty} \le d_{\times_2} \le \sqrt{M} d_{\times_\infty}.$$

Dimostrazione: per $d_{\times_1}$ e $d_{\times_1}$ la verifica delle proprietà d1, d2, d3, d4 è immediata.
Analogamente la verifica di d1, d3 e d4 per $d_{\times_2}$.
Rimane da provare la diseguaglianza triangolare per $d_{\times_2}$. Si prova usando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz con i vettori di $\mathbf{R}^m$ dati da $(d_1(x_1, z_1), \dots d_m(x_m, z_m))$ e $(d_1(y_1, z_1), \dots d_m(y_m, z_m))$:

$$(d_1(x_1, z_1) d_1(y_1, z_1) + \cdots + d_m(x_m, z_m) d_m(y_m, z_m)) \le$$
$$\le \sqrt{(d_1(x_1, z_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, z_m))^2} \sqrt{(d_1(z_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(z_m, y_m))^2}$$

d'altra parte

$$(d_1(x_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, y_m))^2 \le$$
$$\le (d_1(x_1, z_1) + d_1(y_1, z_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, z_m) + d_1(y_m, z_m))^2 \le$$
$$\le (d_1(x_1, z_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, z_m))^2 + (d_1(z_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(z_m, y_m))^2 +$$
$$+2 \left(d_1(x_1, z_1) d_1(y_1, z_1) + \cdots + d_m(x_m, z_m) d_m(y_m, z_m)\right)$$

quindi

$$(d_1(x_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, y_m))^2 \le$$
$$\le (d_1(x_1, z_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, z_m))^2 + (d_1(z_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(z_m, y_m))^2 +$$
$$+2 \sqrt{(d_1(x_1, z_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, z_m))^2} \sqrt{(d_1(z_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(z_m, y_m))^2} =$$
$$= \left(\sqrt{(d_1(x_1, z_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, z_m))^2} + \sqrt{(d_1(z_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(z_m, y_m))^2} \right)^2.$$

1.2 Norme e seminorme.

Seminorme: *F spazio vettoriale*, $\nu : F \to \mathbf{R}$ che verifica $n1$), $n2$), $n3$) in FT1-1, si dice *seminorma su F*.
Norme: se verifica anche $n4$) si dirà *norma sullo spazio vettoriale F*, ed *F spazio normato*.
Norme di operatori lineari: se $L : U \to V$ è lineare tra due spazi normati $\|L\| =: \sup\limits_{v \neq \vec{0}_U} \dfrac{|Lv|_V}{|v|_U}$ definisce una norma sullo spazio vettoriale degli operatori lineari da U a V.

Proposizione. Per operatori lineari tra spazi normati $U \xrightarrow{L} V \xrightarrow{\Lambda} W$ si ha $\|\Lambda L\| \le \|\Lambda\| \, \|L\|$.
Infatti per definizione: $|\Lambda L u|_W \le \|\Lambda\| |Lu|_V \le \|\Lambda\| \|L\| |u|_U$.

Lemma cfr. FT1-1 $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le h}}$: $\qquad \|L\| \;=:\; \sup\limits_{v \neq \vec{0}} \dfrac{|Lv|_{\mathbf{R}^k}}{|v|_{\mathbf{R}^h}} \;\le\; |L|_{\mathbf{R}^{\mathbf{hk}}}.$

Distanze indotte da norme: - data una (semi)norma $\nu(u) = |u|$ su uno spazio vettoriale F la $d_\nu(u, v) = |u - v|$ definisce una (pseudo)- distanza su F.
- Tale (pseudo)-distanza verifica inoltre $nd1$) e d $nd2$).
- Viceversa data una dstanza d su uno *spazio vettoriale* F, che soddisfi $nd1$) in FT1-1 e d $nd2$) la $\mu_d(u) = |u|_d = d(u, \vec{0}_F)$ è una norma.
- Si ha inoltre $|u|_{d_\nu} = \nu(u)$ e $d_{\mu_d}(u, v) = d(u, v)$.
Tali asserti sono di verifica immediata poichè da $n3$) segue $d2$) come già dimostrato.

Norma uniforme di funzioni limitate a valori in uno spazio vettoriale normato
- Si considera $\mathcal{B}(D, V)$ lo spazio vettoriale delle funzioni *limitate* di dominio D a valori nello spazio vettoriale normato $(V, |\cdot|_V)$. Per $f \in \mathcal{B}$ $\quad |f|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|_V$
definisce una norma su $\mathcal{B}$ detta **norma uniforme**. La distanza da essa indotta è la distanza uniforme relativa alla distanza sul codominio V indotta dalla norma $|\cdot|_V$.
In particolare $|\vec{x}|_{\ell^\infty} =: d_\infty(\vec{x}, \vec{0})$ è una norm ache induce la distanza uniforme in $\mathbf{R}^M$.

Definizione di seminorma integrale.
Si considera $\mathcal{I} = RL^1(I, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni *assolutamente integrabili in senso genearlizzato* definite sull'intervallo I a valori in $\mathbf{R}$. Per $f \in \mathcal{I}$ $\quad |f|_{L^1(I)} = \int_I |f(x)|\, dx$
definisce una *seminorma* su $\mathcal{I}$ detta **seminorma integrale**. La pseudodistanza da essa indotta è quella integrale.
- Se $I = [a; b]$, la seminorma integrale *ristretta* a $C[a; b] \times C[a, b]$ è una *norma*.
In analogia $|\vec{x}_{\ell^1} =: d_1(\vec{x}, \vec{0})$ è una norma ch in $\mathbf{R}^M$ che induce la distanza d_1.
Esempio 3.1: *non tutte le distanze derivano da norme*, si consideri $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $d(x, y) = \arctan|x - y|$. Essa è una distanza, cfr. FE1 esercizio 3. Non può derivare da una norma sia perchè non è invariante per traslazioni si perchè è limitata.

1.3 Prodotti scalari, cfr FT4. Sia V uno spazio vettoriale reale.
Prodotti scalari: una funzione da $V \times V$ in $\mathbf{R}$ che verifica $s1$), $s2$), $s3$), cioè: reale, semidefinita positiva e simmetrica, si dice *prodotto scalare semidefinito*, se anche $s4$) *prodotto scalare.*
- I prodotti scalari sovente verranno indicati con $\langle u \cdot v \rangle$.
Norme indotte da prodotti scalari: - se $x \cdot y$ è un prodotto scalare semidefinito allora $\sqrt{x \cdot x}$ è una seminorma.
- Inoltre tale seminorma soddisfa $sn2$), $sn3$)(eguaglianza del parallelogramma).
- Se poi vale $s4$) è una norma.
Dimostarzione: - per il prodotto in questione vale la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz per cui si usano sole le tre proprietà soprascritte (la $s4$) serve solo per caratterizzare l'eguaglianza). Pertanto la diseguaglianza triangolare $n3$) per $\sqrt{x \cdot x}$ segue come corollario già mostrato. Gli altri punti sono immediati basta usare le regole di distributività dei prodotti.
Teorema 1: Se una norma verifica l'eguaglianza del paralleogramma $sn3$) allora deriva dal prodotto scalare definito tramite $sn2$). *Dimostrazione omessa.*
Esempi: 3- la norma uniforme e la norma integrale non derivano da un prodotto scalare: siano $f(x) = 1$, $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $f(x) = 0$, $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, e $g(x) = 1 - f(x)$, per queste funzioni non è verificata l'eguaglianza del parallelogramma, $|f + g| = |f - g| = 1$:

$$|f + g|_\infty = |f - g|_\infty = 1,\ |f|_\infty = |g|_\infty = 1,\ 1^2 + 1^2 = 2 \neq 4 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2;$$

$$|f + g|_1 = \int_0^1 1\, dx = 1,\ |f|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 1\, dx = |g|_1 = \frac{1}{2},\ 1^2 + 1^2 = 2 \neq 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Il prodotto scalare semidefinito integrale $L^2(I)$: Si consideri l'insieme $RL^2(I, \mathbf{R})$ delle funzioni definite su un intervallo I, anche illimitato o aperto, Riemann integrabili sugli intervalli limitati e chiusi contenuti in I, il cui modulo al quadrato abbia integrale su I, eventualmente improprio, finito.

- Per prima cosa si osserva che è uno spazio vettoriale: infatti se f e g sono Riemann integrabili su qualche intervallo chiuso e limitato tale e è la loro somma;
inoltre avendosi $2|fg| \leq f^2 + g^2$ si ha $(f+g)^2 \leq 2f^2 + 2g^2$, per cui anche $|f+g|$ ha quadrato con integrale su I, eventualmente improprio, convergente.
- In particolare

$$\langle f \cdot g\rangle =_{\text{def}} \int_I f(x)g(x)\,dx$$

è ben definito su $RL^2 \times RL^2$, è bilineare, simmetrico e semidefinto positivo. La seminorma e la pseudodistanza da esso indotte sono:

$$|f|_{L^2(I)} =_{\text{def}} \sqrt{\int_I |f(x)|^2\,dx}, \qquad d_{L^2(I)}(f,g)_{\text{def}} = |f-g|_{L^2(I)} = \sqrt{\int_I |f(x)-g(x)|^2\,dx},$$

e si dicono rispettivamente seminorma L^2 e pseudodistanza L^2.
- Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz in tale ambito si ha la forma integrale di tale diseguaglianza:

$$\left|\int_I f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_I |f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_I |g(x)|^2\,dx}.$$

- Restringendosi a $\underline{C(I) \cap RL^2(I) =}$ si hanno in effetti: un *prodotto scalare, una norma ed una distanza.*

<u>Osservazione:</u> a tutti gli effetti come la *norma uniforme* sullo spazio delle funzioni limitate estende la norma su $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^N$) data da $|(x,y)|_{\ell^\infty} =_{\text{def}} \max\{|x|,|y|\}$, e la *norma integrale* estende la norma $|(x,y)|_{\ell^1} =_{\text{def}} |x|+|y|$, analogamente il prodotto scalare semidefinito L^2 su RL^2 estende il prodotto scalare euclideo $\langle (x,y)\cdot(a,b)\rangle = xa+yb$, quindi le relative norma e distanza quelle usuali. Per tale motivo la norma e la distanza euclidee si dicono anche norma e distanza $\ell^2(\mathbf{R}^2)$. Analogamente per gli $\mathbf{R}^N$.

<u>Osservazione:</u> - su $C([-\pi;\pi])$ l'analogo della base canonica di $\mathbf{R}^N$ ortonormale per il prodotto scalare usuale, è dato dalla successione di funzioni

$$e_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_{2n}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ n \geq 1,\ e_{2n+1}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n \geq 0,$$

che è ortonormale per il prodotto scalare L^2.

<u>Esercizio 1:</u> - calcolare $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2\,dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2\,dx.$

- Mostrare che $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin hx\,\cos kx\,dx = 0.$

- Mostrare che per $h \neq k$ anche $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin hx\,\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos hx\,\cos kx\,dx = 0.$

- Data una funzione $f \in C^1(\mathbf{R})$, che sia 2π-periodica con la sua derivata, i suoi valori si possono esprimere per serie nel seguente modo: $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f \cdot e_n\rangle_{L^2} e_n(x) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\, nx\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt + \sin\, nx\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)$$

è la così detta *serie di Fourier* di f.

Norme notevoli sugli spazi di successioni Una via intermedia tra le norme ℓ^1, euclidea, ed ℓ^∞ negli spazi cartesiani e le corrispettiva seminorma integrale, seminorma L^2 e norma uniforme, sono alcune norme su spazi vettoriali di successioni:

- sullo spazio vettoriale delle successioni limitate la norma uniforme si dice anche norma ℓ^∞;
- sul sottospazio vettoriale delle successioni $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la cui serie è assolutamente convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$, che si indica con $\ell^1(\mathbf{N})$, la somma della serie è una norma, e si dice appunto *norma* ℓ^1:

$$|\mathbf{x}|_{\ell^1} =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|;$$

- se invece si considera l'insieme delle successioni $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ con serie dei moduli al quadrato convergente $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$, si deduce, analogamente a quanto mostrato nel paragrafo precedente:
- - tale insieme è un sottospazio vettoriale di quello delle successioni che si indica con $\ell^2(\mathbf{N})$,
- - $\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle_{\ell^2} =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ è un *prodotto scalare* su tale spazio, - - la norma e la distanza indotte si diranno norma e distanza ℓ^2 e la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ha la forma seguente:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n\right|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2\right).$$

2.1 Intorni, aperti, chiusi

Nota: - si danno le definizioni generali: la nozione di spazio metrico, in specie la diseguaglianza triangolare, permette di estendere l'euristica in $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ in situazioni generali.
- Molti metodi per riconsocere insiemi aperti, chiusi, frontiere etc. sono basati sulla convergenza di successioni FT6-2 e sulle preimmagini di funzioni continue: cfr. FT6-4.

Intorni: dati $x \in F$, (F, d) pseudo-metrico, si dice che $U \subseteq F$ è *intorno di x* (rispetto a d) se contiene una palla di centro x e raggio *non nullo.* Intersezione *finita* di intorni di x è ancora un intorno di x. Un soprainsieme di un intorno di x è un intorno di x.
Aperti: $E \subseteq F$ è *aperto* (rispetto a d in F) se e solo se è intorno di ogni suo punto.
Chiusi: $C \subseteq F$ si dice chiuso per la d in F se il suo complementare $F \setminus C$ è aperto.
Osservazione. - *Unione anche infinita* di insiemi aperti è aperta,
l' *intersezione finita* di aperti è aperta. Per le leggi insiemistiche di De Morgan:
- *intersezione anche infinita* di insiemi chiusi è chiusa, l'*unione finita* di chiusi è chiusa.
- Il sottinsieme vuoto $\emptyset \subseteq F$ e lo stesso F sono *sia aperti che chiusi* in F per d.
Parte interna. - L'unione delle palle aperte contenute in un sottoinsieme E si dice *parte interna* (rispetto a d) di E: si indica con E^o.
- È l'unione degli aperti contenuti in E: è quindi il *più grande* (rispetto all'inclusione) *aperto contenuto* in E. Un insieme è aperto se e solo se coincide con il suo interno.
Chiusura. - Con *chiusura* di E, $\overline{E}$, si intende l'intersezione degli insiemi chiusi che contengono E.
- È il *più piccolo* (rispetto all'inclusione tra insiemi) *chiuso che contiene E.* Un insieme è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura.

Osservazione: per lel leggi di De Morgan, il complementare della chiusura di un insieme E è la parte interna del complementare ${}^c\bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq E}} C = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq {}^cE}} A = ({}^cE)^o$, e la chiusura del complementare il complementare dell'interno: $\quad F \setminus \overline{E} = (F \setminus E)^o, \quad F \setminus (E^o) = \overline{(F \setminus E)}.$
- Quindi $\overline{E}$ coincide con *l'insieme dei punti che in ogni intorno contengono punti di E*: infatti i punti che non hanno tale proprietà sono quelli di $(F \setminus E)^o = F \setminus \overline{E}$.

Osservazione: - per la diseguaglianze triangolare $B(c, r)$ è aperto: se $p = d(y, c) < r$ allora $B(y, r-p) \subseteq B(c, r)$: se $d(z, y) < r - p$ si ha $d(z, c) \leq d(z, y) + d(y, c) < r$.
- similmente $\overline{B}(c, r)$ è chiuso, cioè il suo complementare $\{y : \ d(y, c) > r\}$ è aperto:
$B(y, d(c, y) - r) \subseteq {}^cB(c, r)$: se $d(y, z) < d(y, c) - r$ allora $d(z, c) \geq d(y, c) - d(y, z) > r$.

Osservazione: - si ha $\overline{\{x\}} = \{y : \ d(y, x) = 0\}$. Infatti, come sopra, per la diseguaglianzea triangolare, il complementare di quest'ultimo insieme $\{y : \ d(y, x) > 0\}$ è aperto: quindi tale insieme è chiuso. In secondo luogo se $x \in C = \overline{C}$ e $d(y, x) = 0$ essendo $F \setminus C$ aperto se $y \notin C$ vi sarebbe $r > 0$ per cui $B(y, r) \cap C = \emptyset$, ma d'altra parte $x \in B(y, r) \cap C$.
• Se d è una *distanza* si ha $\overline{\{x\}} = \{x\}$: i sottoinsiemi *finiti sono chiusi per una distanza.*
Esercizio 2: se $A \subseteq \mathbf{R}^M$, $B \subseteq \mathbf{R}^N$ sono aperti allora $A \times B \subseteq \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^M$ lo è.

Frontiera. - L'intersezione $\overline{E} \cap \overline{(F \setminus E)}$ della chiusura di E con la chiusura del complementare di E si dice *frontiera* di E e si indica con ∂E, o con $\mathcal{F}E$. La frontiera è quindi un *chiuso.*
- $\mathcal{F}\mathcal{F}E = \mathcal{F}E$. Inoltre la frontiera di E coincide con l'insieme dei punti che in ogni intorno hanno sia punti di E che del suo complementare $F \setminus E$.

Osservazione: $\qquad \overline{E} = E^o \cup \partial E. \qquad$ Infatti $E^o \cup \partial E = E^o \cup \big(\overline{E} \cap F \setminus (E)^o\big) = \overline{E} \cap F = \overline{E}.$
Osservazione: Pur essendo d una distanza, non è sempre vero che $\overline{B}(c, r)$ sia uguale a $\overline{B(c, r)}$.
In generale $\overline{B}(c, r) \supseteq \overline{B(c, r)}$.

Esempi: 1- per la *distanza discreta*, $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = 1$ $x \neq y$, su un insieme F *con più di un elemento*: $B(c,1) = \{c\}$ è sia aperto che chiuso (cfr. supra) e coincide con la sua chiusura, ma $\overline{B}(c,1) = F$.

2- Per distanze *associate a seminorme* vale invece $\overline{B}(c,r) = \overline{B(c,r)}$:

se $d(c,x) = |x-c| \leq r$ i punti del segmento da c ad x: $(1-t)c + tx$, $0 < t < 1$, distano da c meno di r, e da x hanno distanza arbitrariamente piccola. Quindi x non può essere interno al complementare di $B(c,r)$: cioè deve appartenere a $\overline{B(c,r)}$.
3- Una palla aperta di $\mathbf{R}^2$, $B = \{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$, è un aperto. La sua frontiera è la circonferenza che la delimita $S = \{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$, infatti se $p \in S$ sulla semiretta da $(a;b)$ a p vi son punti arbitrariamente vicini a p, sia di B che di $\mathbf{R}^2 \setminus B$. Quindi le circonferenze essendo frontiere sono chiusi.
4- - se I è un intervallo aperto, $f : I \to \mathbf{R}$ è continua, i suoi sopragrafico e sottografico stretti son aperti in $\mathbf{R}^2$. Infatti se $(x,y) \in$ $\mathrm{Graf}_I^{>} f$, cioè $x \in I$ e $y > f(x)$, si considera $r > 0$ per cui $[x-r; x+r] \subseteq I$ e, per continuità (permanenza del segno di $y - f(t)$), $M = \max\limits_{[x-r;x+r]} f < y$.
La palla di centro (x,y) e raggio minore sia di r che di $y - M$ è interamente contenuta nel sopragrafico stetto. Analogamnete per il sotto grafico stretto.
- - Similmente se I è un intervallo chiuso $f : I \to \mathbf{R}$ è continua, i suoi sopragrafico e sottografico sono chiusi in $\mathbf{R}^2$.
5- Se si considera lo spazio metrico $\mathcal{B}$, dato dalle funzioni $f : [0;1] \to \mathbf{R}$ *limitate* con la *distanza uniforme*, la palla di centro $g \in \mathcal{B}$ e raggio $r > 0$ è fatto da quelle funzioni f il cui grafico è contenuto

nel "tubo" di raggio r attorno al grafico di g:
$$\{(x,y) \in [0;1] \times \mathbf{R} : g(x) - r < y < g(x) + r\}.$$

Proposizione a - ogni aperto non vuoto di $\mathbf{R}$ contine infiniti numeri razionali.
b - Gli aperti non vuoti di $\mathbf{R}$ sono unione al più numerabile di intervalli a perti a due a due disgiunti.
Dimostrazione: a) sia $x \in A \subseteq \mathbf{R}$, A aperto. Quindi vi è $r > 0$ per cui $(x-r; x+r) = B_r(x) \subseteq A$. Ma in un intervallo vi son infiniti numeri razionali.
b) - Poichè A è aperto e non vuoto contiene degli intervalli.
- Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ degli intervalli I tali che $I \subseteq A$, e per ogni altro intervallo J se $J \supsetneq I$ allora $J \not\subseteq A$.
- - Vi sono intervalli di tal tipo: infatti dato un qualsiasi intervallo $H \subseteq A$ si consideri l'unione di tutti gli intevalli che contengono H e son contenuti in A: è un intervallo contenuto in A che non può esser ulteriormente esteso in A.
- - Un intervallo di tal tipo deve essere aperto: se avesse uno degli estremi questo apparterrebbe ad A che è aperto, quindi A conterrebbe anche un intervallo centrato in tale estermo, la cui unione con I sarebbe un intervallo contenuto in A.
- - Analogamente due intervalli di tal fatta devono esser disgiunti: altrimenti la loro unione sarebbe un intervallo contenuto in A.
- L'unione degli intervalli $I \in \mathcal{F}$ deve essere tutto A: infatti dato $x \in A$ essendo A aperto vi è un intervallo $H \subseteq A$ centrato in x, e tale H (vedi sopra) è contenuto in uno di tali I.
- La famiglia $\mathcal{F}$ di tali I può essere numerata:
- - infatti ogni I contiene almeno un numero razionale,
- - i numeri razionali possono esser visti come immagine di una successione iniettiva $\{q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$;
- - dato $I \in \mathcal{F}$ si considera $N(I) = \min\{n \in \mathbf{N} : q_n \in I\}$:
essendo due intervalli di $\mathcal{F}$ disgiunti $N : \mathcal{F} \to \mathbf{N}$ è iniettiva, quindi numerando secondo ordine gli $N(I) \in \mathbf{N}$ si ottiene una numerazione di $\mathcal{F}$.

2.2 Punti aderenti, di accumulazione ed isolati

Aderente. Un punto $x \in F$ si dice *aderente ad* $E \subseteq F$ (rispetto a d) se ogni suo intorno ha intersezione non vuota con E.
Accumulazione. Un punto $x \in F$ si dice *di accumulazione per* $E \subseteq F$ se ogni suo intorno ha intersezione non vuota con $E \setminus \{x\}$.
Isolato. Un punto $x \in F$ si dice *isolato in* $E \subseteq F$ se $x \in E$ e ha un intorno la cui intersezione con $E \setminus \{x\}$ è vuota.
<u>Osservazione:</u> - ogni punto di accumulazione per E è un punto aderente ad E;
- un punto aderente ad E o è isolato in E o è di accumulazione per E.
<u>Osservazione:</u> - $\overline{E}$ è quindi l'insieme dei punti aderenti ad E.
- $\overline{E}$ è l'unione tra l'insieme dei punti isolati in E e l'insieme dei punti di accumulazione per E.

2.3 Aperti o chiusi relativi e distanza indotta.

- Dati $p \in D \subseteq G$, d distanza su G, si dice che $A \subseteq D$ è *intorno di* p *relativamente a* D se vi è $U \subseteq G$ intorno di p per cui $A = U \cap D$. Di conseguenza si definiscono gli aperti, i chiusi, e le frontiere di sottoinsiemi di D relativi a D.
- La *distanza indotta* su D non è altro che la *restrizione a* $D \times D$ della distanza di G: essa è una distanza su D.
Quindi A è un intorno relativo a D di un punto $p \in D$ se e solo se contiene l'intersezione di D con una palla di centro p (palla relativa): $A \supseteq D \cap B(p, r)$ per qualche $r > 0$.

Osservazione: visto quanto esposto nell'esempio 1 del primo paragrafo, tra le due distanze, quella geodetica d_S e quella euclidea $d_{\mathbf{R}^2 \cap S}$, su una circonefernza S di raggio R, sussistono le diseguaglianze

$$|P - Q|_{\mathbf{R}^2} \leq d_S(P, Q) \leq \tfrac{\pi}{2}|P - Q|_{\mathbf{R}^2}.$$

Quindi da tali diseguaglianze ogni intorno di P per una distanza è contenuto in un intorno di P per l'altra distanza.

Pertanto questa situazione mostra che pur essendo due distanze differenti, ma *controllate* (almeno per raggi piccoli) una dall'altra:
gli aperti, chiusi etc. rispetto ad ognuna delle due distanze *coincidono* pur essendo le distanze diverse.

Distanze equivalenti: due (pseudo)-distanze d, d' su un insieme M,
-si dicono **metricamente equivalenti** se vi sono due numeri

$$0 < c \leq C \text{ per cui } \underline{\forall\, x,\, y \in M} \quad cd(x, y) \leq d'(x, y) \leq Cd(x, y).$$

In altri termini $B_d(x, \frac{r}{C}) \subseteq B'_d(x, r) \subseteq B(x, \frac{r}{c})$.

- Si dicono **topologicamente equivalenti** se danno *gli stessi intorni*: ovvero
ogni palla dell'una contiene una palla dell'altra di egual centro e viceversa.
Equivalentemente hanno stessi aperti e chiusi.

<u>Esempio 6:</u> - $d'(x, y) = |\text{artan}x - \text{artan}y|$, x, $y \in \mathbf{R}$, definisce una distanza su $\mathbf{R}$.
- Essa è topologicamente equivalente alla distanza euclidea di $|x - y|$ su $\mathbf{R}$.
- Essa non è metricamente equivalente a quella euclidea poiche $d'(x, y) \leq \pi$.
Infatti per ogni $c > 0$

$$\text{per i punti } x = 0 \text{ e } y = \tfrac{2}{c}\pi \text{ si ha } c|x - y| = 2\pi > \pi \geq d'(x, y).$$

<u>Esempio 7:</u> grazie alla diseguaglianza per componenti, le distanze $d_{\times_1}$, $d_{\times_\infty}$, $d_{\times_2}$, introdotte su $E_1 \times \cdots \times E_m$ a fine del paragrafo 1.1, sono tutte distanze metricamente equivalenti.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;
[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;
[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

SPAZI ASTRATTI: METRICI, VETTORIALI NORMATI, CON PRODOTTO SCALARE:

B] cap. IV.3 pagg.178-180; cap.IV.3 Esem.(IV.88)pagg. 210-211 (funzioni trigonometriche e prodotto scalare L2); cap. VII par. da 1 a 5 pagg. 331-348, in particolare distanze L1 ed uniforme nel piano pag.332, per funzioni continue pag. 333-334 e distanza L2.

F] cap. 1.8 formule da (8.10) a (8.12) pagg.53-53; cap.2 pagg 75-120 in particolare: formula (15.6) pag. 83, distanza uniforme per funzioni continue Esem. 4 pag. 79, distanze Lp negli spazi cartesiani pagg.96-97.

FS] cap.2.8,9, 19 pagg.35-42, pagg.81-82.

B] cap.III.3, 7 pagg. 108-111, pagg. 127-137; cap IV.2, 3 pagg. 170-184; cap. V.6, 7 pagg. 247-252.

F] cap.2.14, 17, 19 Esem. 3 pagg. 78-79, pagg. 89-93, pagg. 96-97; cap.3.25 pagg.121-123.