Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria
Vincenzo M. Tortorelli, Bozhidar Velichkov
FOGLIO DI TEORIA n. 0
INTRODUZIONE

Nel seguito si indicherà con FTn il "foglio di teoria n^o" degli appunti del corso.
Di norma alla fine di questi capitoli vi sono riferimenti ad alcuni manuali di uso comune.

1.1 Spazi tangenti e campi vettoriali - Uno dei principali obiettivi del corso è quello di dare almeno per sottoinsiemi degli spazi cartesiani $\mathbf{R}^m$, una buona nozione di *spazio tangente* e di *vettore applicato.*
- Per far questo si partirà dai sottoinsiemi che siano grafici di funzioni $f : \mathbf{R}^{m-k} \to \mathbf{R}^k$.

1.2 Approssimazione lineare La proprietà che le funzioni dovranno soddisfare a tal fine è quella di *essere approssimabili con polinomi di primo grado* nelle coordinate cioè con funzioni *lineari affini.*
Questa è l'estensione utile, a funzioni di più variabili, del concetto di derivata. In particolare per funzioni a *valori reali* ($k = 1$): dato $p = (p_1, \dots, p_{m-1})$, $x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in dom f$ deve esistere $L^{(p)} : \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}$ lineare, $L \sim (L_1, \dots, L_{m-1})$, per cui

$$f(x) = f(p) + L(x - p) + o(|x - p|_{\mathbf{R}^{m-1}}), \text{ per } |x - p|_{\mathbf{R}^{m-1}} \to 0,$$

ove $|x - p|_{\mathbf{R}^{m-1}} = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \cdots + (x_{m-1} - p_{m-1})^2}$ è l'usuale distanza euclidea.

Nel caso il piano $m - 1$ dimensionale tangente al grafico di f nel punto $(p, f(p))$ non sarà altro che

$$\text{il grafico di } L \text{ traslato in } (p, f(p)) \text{ di equazione nelle } x$$
$$x_m - f(p) = L_1^{(p)}(x_1 - p_1) + \cdots + L_{m-1}^{(p)}(x_{m-1} - p_{m-1}).$$

1.3 Luoghi di zeri ed immagini Con i teoremi delle *funzioni implicite* e del *rango* questa nozione viene estesa a sottoinsimi di $\mathbf{R}^m$ che non sono grafici di funzioni ma o *luoghi di zeri* di funzioni, o *immagini* di funzioni (forma parametrica).

1.4 Campi Quindi un campo di vettori tangente lungo un insieme C (vettore applicato in $p \in C$) sarà la scelta per ogni punto $p \in C$ di un elemento dello spazio tangente in p a C.

2.1 Prerequisiti Continuità, limiti e calcolo differenziale per funzioni reale di variabile reale, algebra lineare e segnatura delle matrici simmetriche.
- Un breve riassunto per la parte di algebra lineare e delle nozioni di immagine (forma paramterica), preimmagine, e grafico e' in FT1.
- Per forme bilineari, quadriche e prodotti scalari astratti una panoramica è esposta in FT4.

2.2 Concetti di preliminari. Si intodurrà la nozione astratta molto generale di *spazio metrico* che permette di capire nella loro essenza diverse proprietà delle funzioni $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$: *limitattezza, continuità* in particolare.
- Questo viene esposto prelminarmente in FT1, FT2, quindi in FT5 per funzioni di una variabile e successioni a valori in $\mathbf{R}^m$.
- Quindi in FT6, FT9 si estendono tali concetti in ambito generale per funzioni tra spazi metrici: limiti, continuità in generale per funzioni tra spazi metrici.

2.3 Curve. In FT1, FT5 appunto si introduconono le curve in $\mathbf{R}^m$, anche come esempio iniziale di funzioni tra spazi metrici.
- Si approndisce il loro studio in FT7 e FT8 ove si studieranno le nozioni di integrazione non orientata e quella di inetgrazione orientata lungo curve.