Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 5
FUNZIONI DI UNA VARIABILE E SUCCESSIONI
A VALORI IN SPAZI CARTESIANI

Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo (semiretta, retta, segmento), o semiretta intersecata $\mathbf{N}$, $f : I \to \mathbf{R}^m$
- $f(t) = (f_1(t), \dots f_m(t))$ se I è un intervallo,
- $f(n) = f_n = (f_{1,n}, \dots, f_{m,n})$ se $I \subseteq \mathbf{N}$: la funzione f non è altro che una *successione.*

Sottosuccessioni: una *sottosuccessione* f_{n_k} di una qualsiasi successione f_n è la composizione di f con una successione n_k divergente (crescente) di numeri naturali.

1 Limiti:

- si dice che $f(t) = (f_1(t), \dots f_m(t))$ tende al *vettore* $v = (v_1, \dots v_m) \in \mathbf{R}^m$, per $t \in I$ che tende a $s \in \overline{I}$ (intervallo chiuso), o $s = +\infty$, $s = -\infty$, in simboli

$$f(t) \to v,\ t \to s,\ t \in I, \text{ o } f(t) \underset{t\to s,\ t\in I}{\longrightarrow} v, \text{ o anche } \lim_{t\in I,\ t\to s} f(t) = v, \text{ se}$$
$$\lim_{t\in I,\ t\to s} d_{\mathbf{R}^m}(f(t), v) = \lim_{t\in I,\ t\to s} |f(t) - v|_{\mathbf{R}^m} = 0.$$

- Equivalentemente, per la 1) delle diseguaglianze per componenti in FT1-1, ogni funzione o successione *componente* $f_i(t)$, $f_{i,n}$, $1 \le i \le m$, converge all'omologa componente v_i di v.

Osservazione: - valgono le usuali regole dei limiti di funzioni e successioni a valori reali.
- • In particolare una *successione convergente* ha immagine *limitata.*
- • Trattando in $\mathbf{R}^m$ di *distanze vere* e proprie il limite se esiste è *unico.*

2 Chiusi e compatti per successioni

Chiusi per successioni: - un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^m$ si dice *chiuso per successioni* o *sequenzialmente chiuso*, se per ogni successione $f : I \to C$

se $f_n \to v \in \mathbf{R}^m,\ n \to \infty$ allora $v \in C$.

Compatti per successioni: - $C \subseteq \mathbf{R}^m$ è *compatto per successioni*, o *sequenzialmente compatto* se ogni successione $f : I \to C$, a valori in C, $f_n \in C$,

ha una sottosuccessione f_{n_k} convergente per $k \to \infty$ a un v *che sia elemento di* C.

Osservazione: • i sottoinsiemi chiusi di un seq. compatto sono seq. compatti.

Equivalenza tra chiusi e chiusi per successioni: $C \subseteq \mathbf{R}^m$ è chiuso (FT2) se e solo se è chiuso per successioni.

Dimostrazione. - Se C è chiuso il limite di una successione convergente di suoi elementi non può stare nel complementare $\mathbf{R}^m \setminus C$ che è aperto: ogni punto di $\mathbf{R}^m \setminus C$ ha un intorno disgiunto da C ovvero *non vi ci si può avvicinare con punti di* C.

- Viceversa se C è chiuso per successioni, dato $z \notin C$ del complementare, se ogni palla $B(z, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$, contenesse almeno un elemento x_n di C si avrebbe $d_m(x_n, z) \le \frac{1}{n}$, quindi: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \notin C$, diversamente da quanto assunto. Perciò per ogni $z \in \mathbf{R}^m \setminus C$ vi è una palla di centro z inclusa in $\mathbf{R}^m \setminus C$.

Corollario - la chiusura $\overline{E}$ di un insieme E (FT2) coincide con l'insieme dei limiti di successioni a valori in E: i punti *approssimabili* con punti di E .

- I punti di accumulazione per E (FT2) sono quelli approssimabili con successioni *non* definitivamente *costanti* di elementi di E.

Teorema di Bolzano Weiestrass (dimensione finita): un sottoinsieme di $\mathbf{R}^m$ è compatto per successioni se e solo se è *limitato ed anche chiuso per successioni.*

Dimostrazione . - È *sempre vero* che un compatto è chiuso e limitato. È chiuso: le sottosuccessioni hanno lo stesso limite della successione. È limitato: se no vi sarebbero $v_n \in C$ per cui $|v_n|_m \geq n \in \mathbf{N}$: tutte le sottosuccesioni di v_n sarebbero illimitate e non convergerebbero.
- *Per il viceversa* è necessaria la *dimensione finita*: data una successione $y_n \in C,\ n \in \mathbf{N}$, si usa per ogni successione componente $y_{i,n}$, che è limitata per la diseguagllianza $|y_i| \leq |y|_m$, il teorema per successioni a valori reali: *dopo m sottosuccesioni* si ha un limite, ed essendo C chiuso tale limite gli appartiene.

3 Curve e cammini in forma parametrica: nozioni di base

3.1 Continuità: - f si dice continua in $s \in I$ se lo sono le funzioni componenti.
- Per la diseguaglianza per componenti, FT2-1) ciò è vero se e solo se

$$\lim_{t\in I,\ d_{\mathbf{R}}(t,s)\to 0} d_{\mathbf{R}^m}(f(t), f(s)) = \lim_{t\in I,\ t\to s} |f(t) - f(s)|_{\mathbf{R}^m} = 0.$$

- Una funzione di una variabile continua in tutti i punti di I si dice *curva parametrica*, o *cammino*. Può esser interpretata come *legge oraria*. L'immagine si dirà *sostegno* o *traiettoria*.
Osservazione: valgono le usuali regole proprietà delle funzioni continue a valori reali con *l'eccezione della proprietà del valore intermedio* che si traduce nel dire che l'immagine continua di un intervallo è "tutta di un pezzo", cfr. connessi.

Teorema di Weiestrass 1: l'immagine continua di un seq. compatto è seq. compatta.
Dimostrazione. Sia f continua su D compatto. Sia $y_n = f(x_n) \in D,\ n \in \mathbf{N}$ una successione in $\mathrm{Im}_D f$. Per ipotesi vi sono $c \in D$ e $x_{n_k} \in D,\ k \in \mathbf{N}$ per cui $x_{n_k} \to c,\ k \to \infty$. Per continuità di f si ha $y_{n_k} \to f(c) \in \mathrm{Im}_D f$.
Curve chiuse: - Un cammino f definito su un segmento chiuso $I = [a; b]$ si dice *chiuso* se $f(a) = f(b)$.
Curve semplici: - Un cammino f si dice *semplice* se è iniettivo tranne al più per l'eguaglianza tra i valori agli eventuali due estremi dell'intervallo. Nel caso si dirà cammino *semplice chiuso*.
Curve essenzialmente semplici: - sarà detto un cammino $f : I \to \mathbf{R}^m$, nel caso in cui $\{t \in I : \exists s \in I\ s \neq t\ f(s) = f(t)\}$ è finito.

3.2 Derivabilità: f si dice derivabile in $s \in I$ se lo sono le funzioni componenti (FT1-2). Nel caso si indica con $\dfrac{df}{dt}(s)$ o $f'(s)$ il vettore che ha come componenti le derivate in s delle funzioni componenti di f. Tale *vettore* si dirà *derivata* di f in s.
- Considerando f come legge oraria $f'(s)$ rappresenta la velocità all'istante s in $f(s)$.
- Per la diseguaglianza per componenti FT1-1-1) ciò è vero se e solo se vale la proprietà di *approssimazione lineare al primo ordine*:

$$\lim_{t\to s} \left| \frac{f(t) - f(s) - (t-s)f'(s)}{t-s} \right|_{\mathbf{R}^m} = 0, \text{ cioè } f(t) = f(s)(t-s) + f'(s)(t-s) + o(t-s; t, s)$$

Osservazione: valgono le usuali regole proprietà delle funzioni derivabili: linearità della derivata, derivate di prodotti (scalari e vettoriali) etc. .

Versori tangenti: se vi è la derivata di f in s ed è un vettore *non nullo*, il versore (vettore unitario) $\dfrac{f'(s)}{|f'(s)|_{\mathbf{R}^m}}$ si dirà *versore tangente all'immagine di f all'istante s* (nel punto $f(s)$).

Osservazione: la giustificazione di tale definizione è che *l'incremento vettoriale* $f(t) - f(s)$ ("spostamento"che individua la "corda" sull'immagine di f tra il punto $f(s)$ e il punto $f(t)$), rinormalizzato dividendo per $t - s$, tende per $t \to s$, a $f'(s)$.
Questi *se non nullo identifica una ben precisa direzione orientata.*
Quindi un versore tangente dà informazioni *anche sul "verso di percorrenza (orientazione)"* dell'immagine di f nell'istante s.

Osservazione: - se f non fosse iniettiva ($f(s) = f(u)$, $s \neq u \in I$) vi potrebbero essere diversi versori tangenti all'immagine di f nel punto $f(s) = f(u)$ nei diversi istanti s, u (es. 2).
- Analoghi fenomeni (o "peggiori") si hanno se $f(s) = \lim_{n\to\infty} f(t_n)$ per qualche successione $t_n \in I$, $n \in \mathbf{N}$ *non convergente* ad un elemento di I. Si veda l'esempio 1 nel caso I fosse la retta o una semiretta o $\mathbf{N}$, e se t_n fosse *divergente*. La regolarità forte esclude tali fenomeni:

3.3 Cammini regolari: - un cammino n f si dice *regolare (debolmente)* su un intervallo I se è derivabile su tutto I, con il vettore "velocità" f' continua in tutti i punti di I, e mai nullo *tranne al più gli eventuali estremi* di I.
- Se f *non* è chiuso e $I = [a; b] \subseteq \mathbf{R}$ è un segmento chiuso si dice *regolare in senso forte* se $f' \neq 0$ su tutto $[a; b]$.
- Se f è chiuso e $I = [a; b] \subseteq \mathbf{R}$ è chiuso si dice *regolare in senso forte come curva chiusa* se non solo $f' \neq 0$ su tutto $[a; b]$ ma *anche i versori tangenti* negli istanti a, $b \in \mathbf{R}$ sono *eguali.*

Esempio 1: $f(t) = \left(te^{-t}, t^2e^{-t}\right)$: $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,0) = f(0)$, $\dfrac{f'(t)}{|f'(t)|} \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,-1) \neq \dfrac{f'(0)}{|f'(0)|} = (1,0)$.

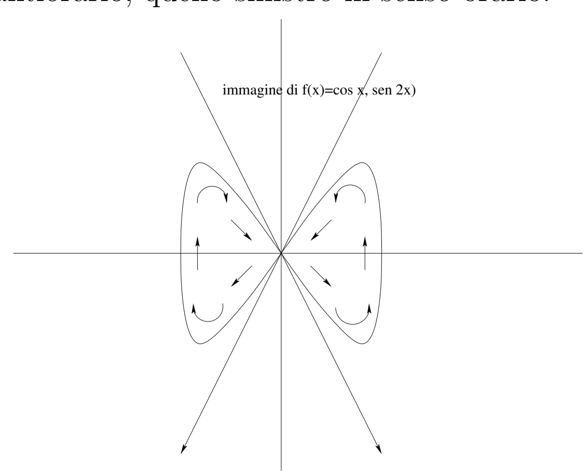
Osservazione: - per un cammino chiuso f su $I = [a; b]$, a, $b \in \mathbf{R}$, solo (debolmente) regolare si potrebbero avere (se pur f fosse semplice chiuso) strani comportamenti in $f(a) = f(b)$, come per cammini non chiusi su intervalli non chiusi o illimitati.
- Se $f'(a)$ e $f'(b)$ fossero entrambi non nulli e diversi potrebbero avere punti angolosi (due versori tangenti non allineati), cuspidi (due versori tangenti allineati ma di verso opposto).
- Se $f'(a)$ o $f'(b)$ fosse nullo si potrebbero avere infiniti avvolgimenti o oscillazioni avvicinandosi a $f(a) = f(b)$: non sarebbe ben definito, nemmeno al limite, il versore tangente (es.3).

Rette tangenti: se esiste $f'(s)$ ed è un vettore *non nullo*, si dirà quindi *retta tangente all'immagine di f all'istante s (nel punto $f(s)$)*, la retta in forma *parametrica* data dall'immagine della funzione lineare affine

$$r(\tau) = f(s) + \tau f'(s), \ \tau \in \mathbf{R}.$$

Potrebbero esserci più rette tangenti nel punto $f(s)$ nei diversi istanti $t \neq s$ in cui la traiettoria passa in $f(s) = f(t)$ ma $f'(s) \neq f'(t)$. Analogamente per t che tende ad un estermo dell'intervallo: $f(t) \to f(s)$ ma $f'(t) \to v \neq f'(s)$.

Esempi: 2 - per esempio si consideri $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $f'(t) = (-\sin t, 2\cos 2t)$ mai nulla, $s = \frac{\pi}{2} \neq u = \frac{3}{2}\pi$. Si ha: $f(\frac{\pi}{2}) = (0,0) = f(\frac{3}{2}\pi)$, $f'(\frac{\pi}{2}) = (-1,-1) \neq f'(\frac{3}{2}\pi) = (1,-1)$, che rispettivamente individuano i versori tangenti di argomento $\frac{5}{4}\pi$ ed $\frac{7}{4}\pi$.
In effetti l'immagine di f su I è a forma di "otto" orizzontale centrato in $(0,0)$: il "lobo" destro percorso in senso antiorario, quello sinistro in senso orario:



3 - Si consideri $f(t) = t^3(\cos\frac{1}{t}, \sin\frac{1}{t}, 1)$, $t \in (0;\pi]$, $f(0) = (0,0,0)$.
Tale funzone è continua e derivabile con derivata continua (derivata di un prodotto: scalare per vettore):

$$f'(t) = 3t^2(\cos\tfrac{1}{t}, \sin\tfrac{1}{t}, 1) + t(\sin\tfrac{1}{t}, -\cos\tfrac{1}{t}, 0),\ f'(0) = (0,0,0).$$

La sua immagine è contenuta nel cono definito da $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \geq 0$, e per $t \to 0^+$ *gira infinite volte avvicinandosi dall'origine.* Per $t = 0$ *non è individuata alcuna retta tangente.*

3.4 Integrabilià: f si dice integrabile (secondo Riemann, rispettivamente assolutamente integrabile in senso improprio) sull'intervallo I se rispettivamente lo sono le funzioni componenti. Nel caso con $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ si indica il vettore che ha come componenti gli integrali su I delle funzioni componenti, e lo si dirà integrale di f su I: $\displaystyle\int_I f(t)dt = \left(\int_I f_1(t)dt, \ldots, \int_I f_m(t)dt\right)$.
Gli enunciati seguenti si deducono direttamente da quelli per funzioni a valori in $\mathbf{R}$.

Linearità dell'integrale vettoriale: Se f e g sono integrabili sull'intervallo I, $\lambda \in \mathbf{R}$, allora tale è la funzione $f + \lambda g$ e $\displaystyle\int_I (f(t) + \lambda g(t))\,dt \ = \ \int_I f(t)\,dt \ + \ \lambda\int_I g(t)\,dt$

Additività dell'integrale: Se f è integrabile sugli intervalli I e J con parti interne disgiunte allora $\displaystyle\int_{I\cup J} f(t)\,dt \ = \ \int_I f(t)\,dt \ + \ \int_J f(t)\,dt.$

Teorema fondamentale del calcolo per cammni e integrazione per parti:
Se f è continua sull'intervallo I a valori in $\mathbf{R}^m$ e $a \in I$ allora la funzione vettoriale integrale $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(s)ds$ è derivabile in ogni punto di I e ha come derivata $f(t)$.
Quindi se $f,\ g : I \to \mathbf{R}^m$ sono funzioni derivabili sull'intervallo I con derivate continue, $a,\ b \in I$ si ha $\displaystyle\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a)$, $\displaystyle\int_a^b \langle f'(s)\cdot g(s)\rangle ds = \langle f\cdot g\rangle]_a^b \ - \ \int_a^b \langle f(s)\cdot g'(s)\rangle ds$,

Diseguaglianza triangolare per gli integrali: Se $f : I \to \mathbf{R}^m$ è integrabile su I si ha:

$$\left|\int_I f(t)dt\right|_{\mathbf{R}^m} \ \leq \ \int_I |f(t)|_{\mathbf{R}^m}\,dt.$$

Dimostrazione: Per il corollario alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (FT1-1):

$$\left|\int_I f(t)dt\right|_{\mathbf{R}^m} = \max_{v:|v|_{\mathbf{R}^m}=1} \langle \int_I f(t)dt\cdot v\rangle = \text{per linearità dell'integrale} = \max_{v:|v|_{\mathbf{R}^m}=1} \int_I \langle f(t)\cdot v\rangle\,dt \leq$$

fissato $t \in I$ applicando a $\langle f(t)\cdot v\rangle$ la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (FT1-1)

$$\leq \max_{v:|v|_{E,m}=1} \int_I |f(t)|_{\mathbf{R}^m}|v|_{\mathbf{R}^m}dt = \max_{v:|v|_{\mathbf{R}^m}=1} \int_I |f(t)|_{\mathbf{R}^m}dt = \int_I |f(t)|_{\mathbf{R}^m}dt.$$

4 Proprietà metrica della tangenza:

per una funzione vettoriale di una variabile derivabile $t \mapsto f(t)$, se per un valore del parametro z si ha $f'(z) \neq 0$ allora *l'immagine* di un intervallo sufficientemente *piccolo* attorno a z ha tangente nel punto $f(z)$ data dall'immagine del cammino lineare $s \mapsto f(z) + sf'(z)$: poichè vi è derivabilità $f(t) - f(z) = f'(z)(t-z) + \varepsilon(t,z)$ con $|\varepsilon|/|t-z| \to 0$ per $t \to z$.
Quindi il rapporto tra la distanza di un punto dell'immagine dalla sua proiezione ortogonale sulla retta in questione, e la distanza da $f(z)$ è infinitesimo per $t \to z$
(usare la diseguaglianza triangolare per il denominatore nella forma $|u+\varepsilon|_m \geq |u|_m - |\varepsilon|_m$):

$$\frac{\left|f(t) - \left(\left\langle (f(t)-f(z))\cdot \frac{f'(z)}{|f'(z)|_m}\right\rangle \frac{f'(z)}{|f'(z)|_m} + f(z)\right)\right|_m}{|f(t)-f(z)|_m} = \frac{\left|\varepsilon - \left\langle \varepsilon\cdot\frac{f'(z)}{|f'(z)|_m}\right\rangle\frac{f'(z)}{|f'(z)|_m}\right|_m}{|f'(z)(t-z)+\varepsilon|_m} \leq \frac{2|\varepsilon|_m}{|f'(z)(t-z)+\varepsilon|_m}$$

Cioè, rispetto a $|t-s|$, è indifferente approssimare $f(z)$ con $f(t)$ piuttosto che con la sua proiezione ortogonale sulla retta tangente all'istante z.

- Se invece in un punto $f(y)$ "ci si ferma" ("velocità " nulla $f'(y)=0$) in effetti si può ripartire con inclinazione diversa:

Esempio 4: $f(t)=(t^3,|t|t^2)$, $t=y=0$, la cui immagine è il grafico del modulo che non ha una sola tangente in $(0,0)$.

- D'altronde un cammino può ripassare con diversa inclinazione per punti ove è "già " passato, per questo il vettore derivata nonnullo dà la tangente solo dell'immagine di un segmento abbastanza piccolo.
Si veda l'esempio 2 dell' "otto": $f(t)=(\cos t,\sin 2t)$:
"passa" da $(0,0)$ sia per $t=y_1=\pi/2$ che per $t=y_2=3\pi/2$ ma con velocità sghembe, e quindi vi sono due rette tangenti diverse.

- Per un cammino regolare semplice (derivabile con derivata sempre nonnulla ed iniettivo) vi è quindi tangente in ogni punto dell'immagine.

Esempio 5: il *grafico* di una funzione di una variabile $x\mapsto g(x)$ derivabile, può essere visto come *immagne* del un cammino vettoriale

$$t\mapsto f(t)=(t,g(t))\ \text{(cfr. FT1-4)}$$

che è sempre iniettivo e con vettore derivata

$$f'(t)=(1,g'(t))$$

sempre nonnullo.

Altri esempi

Esempio 6: trovare una parametrizzazione $q(t)$ semplice del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$:
primo lato $t(1,0)$, $0\le t\le 1$, secondo lato $(1,0)+(t-1)(0,1), 1\le t\le 2$, terzo lato $(1,1)-(t-2)(1,0), 2\le t\le 3$, quarto lato $(0,1)-(t-4)(0,1), 3\le t\le 4$.
Se nei vertici si sceglie una delle due velocità, si ottiene una funzione vettoriale discontinua negli istanti di passaggio per i vertici.

Esempio 7: trovare una parametrizzazione C^1 del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$:
- si cerca $Q(s)=q(t(s))$, $0\le s\le 4$ con $t(s)$ crescente, $C^1[0;4]$, e che sia una bigezione di ciascuno dei quattro sottointervalli $[n;n+1]$, $0\le n\le 3$.
- Negli istanti S di passaggio per i vertici V essendoci angoli dovrà esistere $Q'(S)=(0,0)$.
Poichè q è derivabila a destra e a sinistra anche Q lo è, e si ha $Q'^{\pm}(S)=q'^{\pm}(t(S))t'(S)$.
Quindi per quanto riguarda il primo lato si deve imporre $t'(0)=t'(1)=0$.
- Si puo' scegliere per esempio $t(s)=\frac{1-coss\pi}{2}$, $0\le s\le 1$.
Sugli altri lati si procede in modo analogo.

Esempio 8, esercizio: confrontare le velocità agli istanti iniziali e finali, e il modo di percorrere il sostegno, dei cammini ($cos(2\pi e^t),\sin(2\pi e^t)$), $0\le t\le\log 6$, $(\cos s,\sin s)$, $2\pi\le s\le 12\pi$.
Quale dei due è chiuso-regolare?

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] cap.4.34,41, 42 pagg.155-164, pag. 190 (Lemma formula (41.1)), pagg.192-194.

[B] cap. VI Teo. VI.43 pag. 301; cap. VII.2,3 Esem. VII.16 pagg.336-337, pagg. 338-342; cap V.1,2,3 pagg.227-239.

[F] cap.2.22 pagg.108-110; cap 3.38 pagg. 176-179; cap. 4.43 pag. 228(Lemma formule (43.13) e (43.14)); cap.6.60 pagg.311-319.