

## Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.

### Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli  
FOGLIO DI ESERCIZI n. 2  
CAMMINI (FT 2, 5, 6, 7, 8)

---

ESERCIZIO 1 Un cammino soddisfa le relazioni  $y = x^2 - z$ ,  $z = y^2 + x^3$ , essendo la componente verticale della velocità  $z'$  costante eguale ad 1. Qual'è la sua velocità nel punto  $(1, -1, 2)$ ?

---

ESERCIZIO 2 Si consideri il cammino  $\gamma(t) = (t^2 + t, t^4 + t)$ . a- È regolare? È semplice?  
b- Per quale dei seguenti intervalli il sostegno della restrizione è localmente un grafico?  
 $[0; 1]$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(-\infty; 1)$ ,  $(-\infty; 0]$ ,  $(0; +\infty)$ .  
c- Per quali  $a, b$  l' unione tra il sostegno della sua restrizione per  $t \in ]0; 1]$ ,  
e  $\{(x, y) : \sqrt{y-2} - a\sqrt{x-2} + b = 0\}$  è il grafico di una funzione  $C^1$ ?

---

ESERCIZIO 3.1- Si consideri il sottoinsieme  $E$  di  $\mathbf{R}^3$  definito da  $yz + x = 1$  e  $xz - x = 1$ .

a) È limitato? È chiuso?

b.1) Si può trovare un cammino che abbia  $E$  come sostegno?

b.2) È localmente un grafico (una 1-varietà)?

c) Si determinino le sue proiezioni sugli assi coordinati.

3.2- Si studi l'intersezione dei grafici delle due funzioni  $u(x, y) = x + y^2$ ,  $v(x, y) = 2x^2 + 2y^4$ , mettendo in risalto: se tale intersezione è limitata in  $\mathbf{R}^3$ , e se esistono punti nell'intorno dei quali essa non è sostegno di una curva regolare.

---

ESERCIZIO 4 a- Si scriva l'equazione del piano ortogonale nel punto  $(0, 0, 1)$  al sostegno del cammino  $(t^2, \sin t^2, \cos t^2)$ .

b- Si calcolino le lunghezze del cammino e del suo sostegno per  $t \in [-2; 1]$ .

---

ESERCIZIO 5 Siano  $a \in \mathbf{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$ ,  $M(t)$  il cammino a valori matrici

$3 \times 3$  per cui  $\begin{cases} M'(t) = AM(t) \\ M(0) = Id \end{cases}$ . Ovvero le colonne  $M^1(t)$ ,  $M^2(t)$ ,  $M^3(t)$ , sono cammini

${}^t(x(t), y(t), z(t))$  che verificano il sistema  $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = ax(t) + y(t) + az(t) \end{cases} =: A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ ,

ed inoltre  $M^1(0) = {}^t(1, 0, 0)$ ,  $M^2(0) = {}^t(0, 1, 0)$ ,  $M^3(0) = {}^t(0, 0, 1)$ .

Per quali  $a \in \mathbf{R}$  il volume del tetraedro di spigoli  $M^1, M^2, M^3$  è infinitesimo per  $t \rightarrow +\infty$ ?

---

ESERCIZIO 6 [Anomalia] Dato un cammino piano  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a; b]$  derivabile con continuità, e non nullo (non passante per l'origine), si consideri il sistema di riferimento dipendente da  $t \in [a; b]$ : di origine  $\gamma(t)$ , ed assi il versore posizione  $\hat{r}(t) = \hat{r}(\gamma(t))$  e il suo ortogonale  $\hat{\phi}(t)$  in modo che  $\det(\hat{r}, \hat{\phi}) = 1$ .

a- Si calcoli la derivata di  $|\gamma(t)|$ .

b- [Impegnativo, cfr. FT8.5.1, 2] Si trovi, in termini delle funzioni  $\gamma$  e  $\gamma'$ , una funzione  $\Phi$  per cui  $\hat{r}(t) = (\cos \Phi(t), \sin \Phi(t))$ .

c - Che relazione essa ha con le coordinate polari, cfr. FT8.5.3?

d- Quando  $\gamma$  è equivalente ad un cammino  $\tilde{\gamma}(\varphi) = (f(\varphi) \cos \varphi, f(\varphi) \sin \varphi)$ ,  $\varphi \in Im\Phi$ ? Cfr. FT8.5.3.

e- Nel casi si esprima la lunghezza di  $\gamma$  come integrale in  $\varphi$ .

---

ESERCIZIO 7 a- Per  $a \in \mathbf{R}$  sia dato un cammino  $\gamma(\varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ , in termini della seguente relazione tra raggio e anomalia  $\varphi^a \rho = 1$ ,  $\varphi > 0$ . Si fissi  $\varphi_0 > 0$ .

- Per quali  $a \in \mathbf{R}$  il cammino interseca infinite volte il segmento  $[0; 1]$  sull'asse delle ascisse al variare di  $\varphi$  in  $(0; +\infty)$ ?

- Per quali  $a \in \mathbf{R}$  il cammino ha lunghezza finita per  $0 < \varphi \leq \varphi_0$ ?

- Per quali  $a \in \mathbf{R}$  il cammino ha lunghezza finita per  $\varphi \geq \varphi_0 > 0$ ?

b- Si calcoli la lunghezza del cammino definito in "coordinate polari" da  $e^\varphi \rho = 1$ ,  $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$ .

---

ESERCIZIO 8 a- Calcolare la lunghezza dell'elica con parametrizzazione regolare semplice  $(\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ .

b- Se la densità di massa lungo il sostegno è data da  $f(x, y, z) = 8 - z - xy$  si calcoli la massa e il centro di massa.

---

ESERCIZIO 9 Si consideri l'intersezione dei sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^3$  definite da  $z = x^2 + y^2$ ,  $x + y + z = 1$ . Si mostri che è il sostegno di un cammino  $\gamma$  trovando una parametrizzazione regolare. Quindi si calcoli l'integrale  $\int_{\gamma} |(2x + 1)^2 - (2y + 1)^2| ds$

---

ESERCIZIO 10 [Cfr. FT8.5] Si consideri in  $\mathbf{R}^2$  il campo vettoriale  $V = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ , ovvero considerando  $\hat{r}(x, y)$  il versore posizione,  $\hat{\theta}(x, y)$  quello ortogonale per cui  $\det(\hat{r}, \hat{\theta}) = 1$  e  $\rho(x, y)$  la distanza dall'origine,  $V = \frac{\hat{\theta}}{\rho}$ .

-Si calcoli  $\int_{E,T} V$  nei seguenti casi:  $E$  la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$  orientata

in senso antiorario da  $T(x, y) = \frac{1}{R}(-y, x)$ ,  $E$  il quadrato  $\max\{|x|, |y|\} = 1$  orientato "a tratti" in senso antiorario dai versori dei suoi lati.

- Si calcoli  $\int_{\gamma} V$  per:  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [12\pi; 38\pi]$ .

---

ESERCIZIO 11 Calcolare il lavoro del campo di forze

$$F = \left( \frac{x}{1 + x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

su una particella che si muova con legge oraria  $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, 1 - e^{-t})$ ,  $t \geq 0$ .

---

ESERCIZIO 12 a- Si descriva il sostegno di  $\gamma(t) = \begin{cases} x = \sin t \sin 2t \\ y = \sin t \cos 2t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ .

b- Si consideri la curva  $\Gamma$  data da  $\begin{cases} x = \sin t \sin 2t \\ y = \sin t \cos 2t \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ .

(i) Si calcoli l'integrale  $\int_{\Gamma} \sqrt{5 + 3(x^2 + y^2)} ds$ .

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo  $\Gamma$ , orientata nel verso delle  $t$  crescenti, dal campo

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 2 \right).$$

---

ESERCIZIO 13 Si consideri la curva  $\Gamma$  data da

$$\begin{cases} x = \sin t \cos 2t \\ y = \sin t \sin 2t \\ z = \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Si calcoli l'integrale  $\int_{\Gamma} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} ds$ .

- Si calcoli il lavoro compiuto lungo  $\Gamma$ , orientata nel verso delle  $t$  crescenti, dal campo

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

---

ESERCIZIO 14 Sia  $\Gamma$  il cammino piano descritto in coordinate polari,  $(r, \vartheta)$ , dall'equazione:

$$r = 6(1 + \cos \vartheta), \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi.$$

- Si scriva l'equazione della retta tangente a  $\Gamma$  nel punto  $(3(\sqrt{2} + 1), 3(\sqrt{2} + 1))$ .

- Si determini la lunghezza di  $\Gamma$ .

---

Esercizio 15 Sia  $\Gamma$  la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = \vartheta^2, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

orientata nel verso delle  $\vartheta$  crescenti.

(i) Si determini la lunghezza di  $\Gamma$ .

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo  $\Gamma$  dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

ESERCIZIO 16 Si integri il campo  $V = (x^3 + y^4, x^4 + y^3)$  sul cammino chiuso definito dall'equazione  $x^2 + 4y^2 = 4$  e percorso in senso antiorario.

ESERCIZIO 17 Per  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  con  $x^2 + y^2 \neq 0$ , si consideri il sistema ortonormale centrato in  $\mathbf{x}$ :  $\hat{r}(\mathbf{x})$  versore posizione,  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  tangente al “parallelo” in “senso antiorario”,  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$  tangente al “meridiano” verso “nord”.

Rispettivamente, in coordinate sferiche  $(r, \varphi, \vartheta) \in \mathbf{R}^+ \times [0; 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ :

$$\hat{r} = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta), \quad \hat{\phi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \hat{\theta} = (-\sin \vartheta \cos \varphi, -\sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta).$$

Dato  $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$  si assume che vi è un unico cammino definito su un opportuno intervallo

aperto  $I = \left(-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right)$  per cui: 
$$\begin{cases} \gamma'(t) = \cos \beta \hat{\phi}(\gamma(t)) + \sin \beta \hat{\theta}(\gamma(t)), & t \in I \\ \gamma(0) = (1, 0, 0), & \lim_{t \rightarrow \pm \frac{L}{2}^\mp} \gamma(t) = (0, 0, \pm 1) \end{cases}$$

(a)- Si mostri che  $\gamma(t)$  sta sulla sfera unitaria di  $\mathbf{R}^3$  (tranne i poli  $z^2 \neq 1$ ):  $\forall t \in I |\gamma(t)| = 1$ ;  
- si interpreti cinematicamente l'equazione (lossodromia).

(b) - Trovate le relazioni tra  $\vartheta', \varphi', \vartheta, \varphi, \beta$ , supponendo di usare la latitudine  $\vartheta$  come parametro, calcolare la lunghezza del cammino, e quindi determinare l'intervallo  $I$ .

- Parametrizzare rispetto alla latitudine. [Può servire:  $2 \int \frac{dw}{\cos w} = \log \frac{1 + \sin w}{1 - \sin w} + c$ ]

(c) - Integrare il campo piano solenoidale  $V(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$  lungo  $\gamma(t)$ , per  $t > 0$ .

- Si integri  $V$  anche sui cammini  $(\cos 2t, \sin 2t, t), (\cos 3t, \sin 3t, t), \dots$  per  $t \in [0; 2\pi]$ .

- Quanti “giri fa” la lossodromia attorno all'asse verticale per  $t > 0$ ?

ESERCIZIO 18 Dato  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ , si consideri il cammino regolare,  $2\pi$ -periodico, nello spazio 
$$\gamma_n(t) = (\cos t \cos nt, \cos t \sin nt, \sin t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

(a)- Si integri il campo solenoidale  $V(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$  lungo il cammino  $\gamma_n$  su  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

- Lo si integri sui cammini:

$$(\cos t, \sin t, t) \Big|_{[0; 2\pi]}, (\cos t, \sin t, t) \Big|_{[0; \pi]} \oplus (\cos t, 0, t) \Big|_{[\pi; 2\pi]} \text{ e } (1 + \cos t, \sin t, 2t) \Big|_{[0; \pi]}.$$

- Quanti “giri fa” attorno all'asse verticale  $\gamma_n(t)$  per  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ?

(b) - Provare che: per  $n \in \mathbf{N}$  dispari vi è simmetria rispetto al piano “orizzontale” definito da  $z = 0$ , per  $n \in \mathbf{N}$  pari simmetria centrale. [In entrambi i casi è utile osservare che cambia il segno della terza componente]

- Al variare di  $n \in \mathbf{N}$  si esplicitino le velocità di passaggio al “polo nord”  $(0, 0, 1)$ ,

- si determinino quindi i piani di simmetria ‘verticali’, della traiettoria del cammino, riferendosi al periodo  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ .

(c) - Mostrare che i punti di intersezione nel periodo  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$  sono sui piani di simmetria

verticale. Per  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  quanti sono i punti di autointersezione su  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ ?

- Per  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  si disegnano approssimativamente le proiezioni ortogonali delle traiettorie dei cammini  $\gamma_n$  su piano coordinato definito da  $z = 0$ .

SOLUZIONE ESERCIZIO 17. (a)- Poichè  $|\gamma(0)| = 1$  basta mostrare che  $|\gamma(t)|^2$  ha derivata nulla. Si ha  $\frac{d|\gamma(t)|^2}{dt} = 2\langle \gamma(t) \cdot \gamma'(t) \rangle = 0$  poichè  $\gamma(t) = |\gamma(t)| \hat{r}(\gamma(t)) \perp \hat{\theta}(\gamma(t)), \hat{\phi}(\gamma(t))$ .

- La velocità del cammino fa un angolo, in senso antiorario, costante  $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ , con il parallelo della posizione, orientato da “occidente ad oriente”:  $\lambda\omicron\xi\acute{o}\varsigma$  obliquo,  $\delta\rho\rho\mu\omicron\varsigma$  cammino.

(b) - La posizione  $\gamma(t)$  espressa in termine di coordinate sferiche,  $(1, \varphi(t), \vartheta(t))$ , è quindi:

$\gamma(t) = (\cos \vartheta(t) \cos \varphi(t), \cos \vartheta(t) \sin \varphi(t), \sin \vartheta(t))$ , derivando si ha

$$\gamma'(t) =$$

$$\varphi'(t) \cos \vartheta(t) (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t), 0) + \vartheta'(t) (-\sin \vartheta(t) \cos \varphi(t), -\sin \vartheta(t) \sin \varphi(t), \cos \vartheta(t)) =$$

$$= \varphi'(t) \cos \vartheta(t) \hat{\phi}(\gamma(t)) + \vartheta'(t) \hat{\theta}(\gamma(t))$$

usando  $\gamma'(t) = \cos \beta \hat{\phi}(\gamma(t)) + \sin \beta \hat{\theta}(\gamma(t))$  e le condizioni estreme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' \cos \theta = \cos \beta \\ \vartheta' = \sin \beta \\ \varphi(0) = \vartheta(0) = 0 \\ \vartheta(t) \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}, \quad t \rightarrow \pm \frac{L}{2} \end{array} \right.$$

per tanto  $\vartheta(t) = t \sin \beta > 0$ , quindi per la condizione limite  $L = \frac{\pi}{\sin \beta}$ , ed essendo  $t$  il parametro di lunghezza d'arco  $|\gamma'(t)| = 1$ , è la lunghezza cercata.

- Per quanto sopra si ha  $\varphi(t) = \cos \beta \int_0^t \frac{1}{\cos(s \sin \beta)} ds = \cot \beta \int_0^{\vartheta(t)} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta =$

$$= \frac{\cot \beta}{2} \log \frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta}: \text{ in coordinate sferiche, si esplicita } \tilde{\gamma}(\vartheta) =: \gamma \left( \frac{\vartheta}{\sin \beta} \right).$$

(c) - Usando le coordinate sferiche sul dominio  $V(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \hat{\phi}(\tilde{\gamma})$ .

Poichè  $\tilde{\gamma}'(\vartheta) = \frac{1}{\sin \beta} \gamma' \left( \frac{\vartheta}{\sin \beta} \right)$  e  $\gamma' = \cos \beta \hat{\phi}(\gamma) + \sin \beta \hat{\theta}(\gamma)$ , si ha  $\langle V(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\gamma}' \rangle = \frac{\cot \beta}{(\cos \vartheta)^2}$ .

Passando all'integrale

$$\int_{\tilde{\gamma}(0; \frac{\pi}{2})} V = \cot \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(\cos \vartheta)^2} = \cot \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin(\vartheta - \frac{\pi}{2})^2} = \cot \beta \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dz}{(\sin z)^2} = +\infty$$

- Integrando  $V$  sui cammini  $\kappa_n(t)(\cos nt, \sin nt, g(t)), \dots$  per  $t \in [0; 2\pi]$ , che hanno velocità

$$n \left( -\sin nt, \cos nt, \frac{g'(t)}{n} \right): \int_{\kappa_n} V = \int_0^{2\pi} n dt = 2\pi \cdot n,$$

- Quindi intuitivamente la lossodromia fa infiniti giri attorno all'asse verticale, per  $t \in (0; \frac{\pi}{2})$ , partendo da  $(1, 0, 0)$  e tendendo a  $(0, 0, 1)$ .

NOTA: in generale se  $\lambda(t) = (x, y, z)$ , è un cammino nello spazio cartesiano, che non passi per l'asse verticale, considerando la sua proiezione ortogonale su tale cilindro  $\hat{\lambda} =$

$$\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \text{ si ha } \int_{\lambda} V = \int_{\hat{\lambda}} V.$$