Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 3

SPAZI METRICI, NORMATI E PRODOTTI SCALARI (FT 2, 5, 6, 9)

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n.1 a - Si verifichi che le funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$: $|(x,y)|_{\ell^1} = |x| + |y|$, $|(x,y)|_{\ell^\infty} = \max\{|x|,|y|\}$ sono delle norme.
b - Si trovi la minima distanza del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dai punti del grafico (t, t^2), $t \in \mathbf{R}$ rispettivamente rispetto alle norme: euclidea (cfr. es. 2.a, FE 1), ℓ^1, ℓ^∞.

• ESERCIZIO n.2 Trovare la distanza di $(0, \ldots 0) \in \mathbf{R}^d$ dall'insieme definito da $|x_1| + \ldots |x_d| = 1$, $x \in \mathbf{R}^d$.

ESERCIZIO n.3 La funzione $\dfrac{1}{(t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{3}{2}})|t-1|^{\frac{2}{3}}}$ ha norma $L^2(0;+\infty)$ finita?

ESERCIZIO n.4 Trovare una funzione assolutamente integrabile in $(0;+\infty)$ ma con norma $L^2(0;+\infty)$ infinita [usare funzioni costanti a tratti].

• ESERCIZIO n.5 Trovare una funzione $y = f(x)$ con norma $L^2(0;+\infty)$ finita, e con infiniti asintoti verticali $x = t_n$, $n \in \mathbf{N}$, e $t_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ [La si cerchi non negativa e continua negli intervalli $(t_n; t_{n+1})$].

ESERCIZIO n.6 Trovare le distanze indotte dal prodotto scalare di $L^2(-\pi;\pi)$ tra la funzione $f(t) = t$ e, rispettivamente, le funzioni $\varphi_n(t) = \cos nt$, $\psi_n(t) = \sin nt$.

ESERCIZIO n.7 a) Trovare la minima distanza rispetto alla norma uniforme su $[-\pi;\pi]$ della funzione $f(t) = \sin t$ dall'insieme funzioni costanti.
b) Trovare la minima distanza della funzione $f(t) = t^2$ dall'insieme delle funzioni costanti, rispetto sia alla distanza $L^1(-\pi;\pi)$, che a quella uniforme su $[-\pi;\pi]$.

ESERCIZIO n.8 Trovare la minima distanza $L^2(-\pi;\pi)$ della funzione $f(t) = t^2$ dalle funzioni $g(t) = at + b$, al variare di $a,\ b$ in $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO n.9 a- Siano $f_n(x) = x^n$, $x \in [0;1]$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Dato $x \in [0;1]$ si calcoli $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) =_{\text{def}} f(x)$. Vi è convergenza ad f rispetto alla norma uniforme: $|f_n - f|_\infty \to 0$? Rispetto alla norma integrale: $|f_n - f|_{L^1} \to 0$?
b- Siano $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $f_n(x) = n^a$, $x \in [n; n+1)$, nulle altrimenti. Dato $x \in [0;1]$ si calcoli $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) =_{\text{def}} f(x)$. Per quali a vi è convergenza rispetto alla norma uniforme?
c - Siano $f_n(x) = \min\{\dfrac{1}{\sqrt{x}}, n\}$, $x \in (0;1]$, $n \in \mathbf{N}$. Dato $x \in (0;1]$ si calcoli $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) =_{\text{def}} f(x)$. Vi è convergenza ad f rispetto alla norma uniforme? Rispetto alla norma integrale? Rispetto all norma L^2: $|f_n - f|_{L^2} \to 0$?

ESERCIZIO n.10 Siano $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, $x \in [0;2]$, $n \in \mathbf{N}$.
a- Dato $x \in [0;2]$ si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) =_{\text{def}} f(x)$.
b- La successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente ad f su $[0;2]$ (cioè rispetto alla norma uniforme)?
c- Converge per la distanza integrale (cioè rispetto alla norma L^1)?

ESERCIZIO n.11 Per $x \in (0;1)$ si definiscono $\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = (f_n(x))^x \quad n \geq 1 \end{cases}$
a- Si provi che fissato $0 < x < 1$ le successioni numeriche $f_n(x)$ sono crescenti.
b - Se ne calcoli il loro limite $f(x)$ per $n \to +\infty$.
c - Si mostri che $f_n(x) = x^{(x^n)}$ e si studi se vi è convergenza per la norma uniforme: $|f_n - f|_\infty \to 0$?

ESERCIZIO n.12 Si studino le convergenze puntuale ad x fissato, uniforme e rispetto alla norma integrale L^1, delle seguenti successioni di funzioni nei domini specificati (cfr. FT6.2.3.2, FT9.1.1 teorema 3.3)
$f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, $x \geq 0$; $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x \geq 0$; $f_n(x) = e^{-(x^n)}$, $x \geq 0$; $f_n(x) = e^{-(x^n)}$, $x \in \mathbf{R}$;
• $f_n(x) = \left(\dfrac{1}{n} + (\sin x)^2\right)^n$, $x \in [0;2\pi]$.

ESERCIZIO n.13 Siano $f_n(x,y) = \dfrac{2^n(x+y)}{1+2^n(x^2+y^2)}$, $0 \leq x,\ y,\ 1 \leq x^2+y^2$, $n \in \mathbf{N}$.
a- Fissato $(x,y) \in [0;+\infty) \times [0;+\infty) \setminus B((0,0),1) = D$, si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x,y) =_{\text{def}} f(x,y)$.
b- Si studi la convergenza uniforme su D di f_n di f: $\lim_{n\to+\infty} \sup_D |f_n(x,y) - f(x,y)| = 0$? (Si studi la convergenza uniforme di $f_n(x,0)$ a $f(x,0)$ per $x \geq 1$)

ESERCIZIO n.14 La successione di funzioni $S_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{4^k + x^2}$ converge, per $N \to +\infty$, rispetto alla norma uniforme (cfr. FT9.1.5 convergenza totale)? Rispetto a quella integrale $L^1(0;+\infty)$?

ESERCIZIO n.15 Si studino le convergenze puntuale ad x fissato, e rispetto alla distanza uniforme, nei domini specificati, per $N \to +\infty$ delle successioni di funzioni S_N, $N \in \mathbf{N}$ (cfr. FT6.2.3.2, FT9.1.1 teorema 3.3, FT9.1.5 convergenza totale):
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sin\frac{x}{2^n}$, $x \in [0;2\pi]$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n|\sin x|^n$, $x \in [0;2\pi]$; $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n$, $x \geq 1$;
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} [\, \text{artan}(nx+n) - \text{artan}\,(nx)]$, $x \geq 0$; • $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x^n + y^n + ny}$, $x^2+y^2 \geq 1$, $x,\ y > 0$.

ESERCIZIO n.16 Si mostri che il rapporto tra la norma $f \mapsto \max_{[a;b]} |f|$ e $f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ non può essere limitato al variare di f (le distanze indotte non sono equivalenti).

• ESERCIZIO n.17 [L^2 con densità] a) Sia f una funzione assolutamente integrabile in senso improprio su $(0;1)$.

Si mostri che $\mathcal{B}(\varphi,\psi) = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)f(t)dt$ è ben definito ed è un prodotto scalare degenere sullo spazio vettoriale delle funzioni $C([0;1])$.
b) Si mostri con un esempio che può esser degenere.
c) Si trovi una condizione sufficiente sulla densità f per cui sia non degenere.

ESERCIZIO n.18 Siano $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $\rho : X \times X \to R^+$, $\delta : Y \times Y \to \mathbf{R}^+$, distanze sull'insieme X e sull'insieme Y. Si discuta quale delle seguenti funzioni è ancora una distanza.

$d_1(a,b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$; • $d_2(a,b) = \operatorname{artan}(d(a,b))$ $[cfr.\ es.3,\ foglio\ n.1]$;

$d_3(a,b) = \min\{d(a,b),1\}$;

$d_4((a,\alpha),(b,\beta)) = \max\{d(a,b);\delta(\alpha,\beta)\}$; $d_5((a,\alpha),(b,\beta)) = (d(a,b)^2 + \delta(\alpha,\beta)^2)^{\frac{1}{2}}$;

•$d_6(a,b) = \Psi(d(a,b))$, Ψ concava, non negativa, nulla in 0 ; $d_7(a,b) = \chi_{]0;+\infty[}(d(a,b))$.

(Con χ_A si indica la funzione che vale 1 su A e 0 sul complementare di A.)

ESERCIZIO n.19 Siano V e W due spazi normati con norme $|\cdot|_V$ e $|\cdot|_W$. Data una funzione lineare $L : V \to W$ si definisce: $\|L\| =_{def} \sup_{v\in V\setminus(0)} \frac{|Lv|_W}{|v|_V}$.

a- Si Provi che se V e W hanno dimensione finita allora $\|A\|$ è sempre finito.

b- Si provino comunque le seguenti eguaglianze

$$\|L\| = \sup_{|v|_V=1} |Lv|_W = \sup_{0<|v|_V\le 1} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{0<|v|_V\le 1} |Lv|_W.$$

c- Quindi si provi che le funzioni lineari L da V in W per cui $\|L\|$ è finita formano uno spazio vettoriale, e che $\|\cdot\|$ è una norma su tale spazio.

ESERCIZIO n.20 Si calcolino le norme, definite nel precedente esercizio, delle seguenti funzioni lineari:

$L(x,y) = ax + by$; $L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n$, ${}^tAA = I$;

$L(f) = \int_0^1 f(y)dy \in \mathbf{R} = W$, $f \in C([0;1]) = V, |f|_C = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$;

$L(f) = \int_0^x f(y)dy \in C([0;1]) = W, f \in C([0;1]) = V = W$, $|f|_C = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$.

ESERCIZIO n.21 a- Se A è una matrice $n\times n$ si provi, con la notazione dei precedenti esercizi, che $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$. Si mostri che non sempre $\|A\|^2 = \|A^2\|$.

b-Se si identifica una matrice $n \times n$ con un vettore di $\mathbf{R}^{n^2}$ sussiste qualche diseguaglianza tra $\|A\|$ l'usuale norma euclidea $|A|_{n^2}$, indipendentemente da A?