

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.

Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 4

LIMITI E CONTINUITÀ

NEGLI SPAZI CARTESIANI (FT2, 5, 6, 9)

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n. 1 Calcolare, nel caso esista : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^4 + y^2}$.

ESERCIZIO n. 2 Calcolare, nel caso esista: $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ 2x^2 \geq y \geq x^2}} xy - x^2 + y^2$.

• ESERCIZIO n. 3 Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2 + y^2}$.

• ESERCIZIO n. 4 Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}}$.

• ESERCIZIO n. 5 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$.

2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$.

3. $\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \lambda_1 \\ \exists \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \lambda_2 \\ \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lambda_3 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

ESERCIZIO n. 6 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}; \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}; x^2 \log(x^2 + y^2); \frac{x \sin y}{y \sin x}; \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}; \frac{\sin(x|y|)}{x^2 + |y|}; \frac{e^{x^2 y} - x \sin(xy) - 1}{(x^2 + y^2)^2} : (x, y) \rightarrow (0, 0);$$

$$\frac{x + y}{3x + 2y}; \frac{x^3 + y^2}{x^2 y^2}; \frac{x^3 + y^2}{x^3 + y^3}; \frac{y^2 + x + y}{x^2 + x + y}; \bullet \frac{x^2 y^2}{|x|^\alpha + |y|^\alpha} : (x, y) \rightarrow (0, 0);$$

$$\frac{y}{x^2 - y} : (x, y) \rightarrow (0, 0); \frac{y}{x^2 - y} : (x, y) \rightarrow (0, 0);$$

$$x - y^2 : x^2 + y^2 \rightarrow \infty; x - y^2 : x^2 + y^2 \xrightarrow{2y^2 \leq x} \infty; \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 + 2xy} : x^2 + y^2 \rightarrow \infty;$$

$$\frac{x^2 y + x^2 z + y^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{xy + xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^4 + y^4 + z^4}; x^4 + y^4 - xyz - z^2 y; x^4 + y^4 + z^4 - xyz : x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow +\infty;$$

$$\frac{\log xy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} : (x, y) \rightarrow (1, 1); \bullet \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^4}, \bullet \frac{x^\alpha + y^\beta}{x^2 + y^4} : (x, y) \rightarrow (0, 0), \alpha, \beta > 0.$$

ESERCIZIO n. 7 Si studi la continuità delle funzioni: $\bullet f(x, y) = \int_0^y g(t, x) dt, g \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2);$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3} e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}; \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - \sin xy}{x^6+y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 8 Si dica se la seguenti funzioni assumono valore massimo o assumono valore minimo sui domini rispettivamente specificati:

a- $f(x, y) = \int_{\sqrt{\log(1+y^4)}}^{x^2} e^{t^2} dt, \quad D = \{|x|, |y| \leq 1\}$

b- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+4y^2} + x, & xy > 0 \\ xy + x, & xy \leq 0 \end{cases}, \quad D = \{0 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1\}.$

\bullet c- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad D = \{(z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0, z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0\}$

\bullet ESERCIZIO n. 9 Si consideri la funzione $F(x, y) = \begin{cases} \int_0^{y^2} \frac{\sin \frac{t}{x^2}}{1+t^2} dt & x \neq 0 \\ 0 & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \\ & x = 0 \end{cases}$

- Si mostri che F è continua per $x \neq 0$.

- Integrando per parti si mostri che F è continua anche per $x = 0$.

ESERCIZIO n. 10 Si considerino l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 - (x-y)^2 = 1\}$ e la funzione $f(x, y) = (x - 3y)^2$.

- Si provi che $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x, y) = +\infty$.

- Si mostri che f assume valore minimo su E e si calcoli tale valore.