Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.

Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 9

COMPLETEZZA E CONTINUITÀ,

SECONDA PARTE

1 Successioni di Cauchy e completezza

1.1 Successioni di Cauchy: - una successione $x : \mathbf{N} \to E$, E munito della distanza d, si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon$ vi è un $N \in \mathbf{N}$ per cui per ogni $h,\ k \geq N$ si ha $d(x_h, x_k) \leq \varepsilon$, ovvero:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{h,\ k\geq N} d(x_h, x_k) = 0.$$

Osservazione: - si può pensare ad una successione di Cauchy come a una successioni di misure sempre più *"affidabili"*, sempre più *precise*.

- Due distanze *metricamente equivalenti* hanno le *stesse successioni di Cauchy*.

Totale limitatezza: - un insieme E si dice *totalmente limitata* per d se fissato un qualsiasi raggio $\varepsilon > 0$, piccolo, E è contenuto nell'*unione di un numero finito di palle con quel raggio*.

Teorema 1. 1- Le successioni convergenti sono di Cauchy.

2- Una successione di Cauchy con una sottosuccessione convergente converge al limite di questa.

3- Una successione di Cauchy è limitata anzi ha immagine *totalmente limitata*.

Dimostrazione: 1, 2- seguono dalla diseguaglianza triangolare $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x)+d(x_m, x)$, $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x)$.

3- Da un certo indice in poi i valori della successione $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sono tutti contenuti, in una stessa palla $B(x_N, \varepsilon)$.

- - I rimanenti sono in numero finito $x_1, \ldots x_{N-1}$.

- - Tutti i valori della successione son contenti nell'unione $B(x_N, \varepsilon)\cup B(x_1, \varepsilon)\cup\cdots\cup B(x_{N-1}, \varepsilon)$.

1.2 Completezza. - Un insieme E è *completo* con la distanza d se e solo se ogni successione di Cauchy a valori in E *converge* a qualche elemento di E.

Esempi: 1- $\mathbf{N}$ con la distanza usuale è completo. $\mathbf{R}$ è completo con la distanza euclidea per costruzione. $\mathbf{Q}$ non è completo con la distanza euclidea.

2- Il prodotto finito di spazi metrici completi con la distanza prodotto è completo. Basta mostralo per due spazi metrici (E, d) ed (F, D): la distanza sul prodotto $E \times F$ è $d_\times((e, f), (g, h)) = \sqrt{[d(e, g)]^2 + [D(f, h)]^2}$. Se una successione di coppie $(x_n, y_n) \in E \times F$, $n \in \mathbf{N}$ è di Cauchy per $d_\times$ per le diseguaglianze per componenti, le singole successioni x_n, y_n, $n \in \mathbf{N}$ lo sono rispetto a d e rispetto a D. Quindi per ipotesi vi sono $x \in E$ ed $y \in F$ per cui $d(x_n, x) \to 0$ e $D(y_n, y) \to 0$. Quindi $d_\times((x_n, y_n), (x, y)) \to 0$. Quindi $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{C}$ sono completi.

- Lo spazio delle funzioni assolutamente integrabili in senso improprio alla Riemann-Cauchy con la seminorma integrale *non è* completo. Un'indicazione: sia q_n una numerazione dei numeri razionali $\mathbf{Q}$, si indichi con χ_A la funzione caratteristica di A che vale 1 su A e 0 ald di fuori di A. La successione di funzioni "incriminata" è $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{(q_k-\frac{1}{2^{k+1}};q_k+\frac{1}{2^{k+1}})}$.

Teorema 2: caratterizzazioni

1- Se E è completo per d, un sottoinsieme F di E è completo per d se e solo se è chiuso in E.

2 - Un insieme E è sequenzialmente compatto per una distanza d se e solo se

a- è *completo e totalmente limitato* se e solo se

b- *ogni famiglia di aperti* la cui unione lo contiene, ha una sottofamiglia *finita* con tale proprietà.

Dimostrazione: 1- sia F chiuso in E: se $x_n \in F$ è di Cauchy converge a $x \in E$ per ipotesi di completezza di E. D'altronde se F è chiuso, quindi chiuso per successioni, si ha $x \in F$ e quindi F con la distanza ristretta ad $F \times F$ è completo.
- - Viceversa: se $x_n \in F$ converge a $x \in E$ è di Cauchy in E quindi in F per cui per completezza di F converge a $y \in F$. Per unicità del limite $x = y \in F$.
2a- Sia E seq. compatto.
- - Sia x_n di Cauchy. Per compattezza ha una sottosuccessione convergente, quindi la successione converge allo stesso limite della sottosuccessione. Quindi E è completo.
- - Per assurdo si mostra che è totalemente limitato: se vi esistesse $r > 0$ per cui per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x_1, \ldots x_n \in E$ fosse $E \not\subseteq B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r)$, cioè vi fosse $z \in E$ e $d(z, x_i) \geq r$, $1 \leq i \leq n$, allora si costruisce induttivamente una successione tale che:
- - z_0 qualsiasi elemento di E,
- - $z_{n+1} \in E$ per cui $d(z_n, z_1), \ldots d(z_n, z_{n-1}) \geq r$.
Tale successione non può avere sottosuccessioni convergenti poichè non può avere sottosuccessioni di Cauchy $d(z_m, z_n) \geq r > 0$.
- Viceversa sia E totalmente limitato e completo, e sia $x_n \in E$.
- - Per totale limitatezza si trova una sottosuccessione di Cauchy.
- - - Infatti: data una successione y_n per ogni $h \in \mathbf{N}$, $h \geq 1$ posto $\varepsilon = \frac{1}{h}$ vi è un numero finito di palle di raggio $1/h$ che ricopre E, quindi vi è almeno una palla di raggio $1/h$ che contiene *infinti valori* di y_n, cioè per ogni $h \in \mathbf{N}$, $h \geq 1$ si trova una sottosuccesione y_{k_n} per cui $d(y_{k_n}, y_{k_m}) \leq \frac{1}{h}$.
- - - Partendo da (x_n) si ottiene una sottosussccessione $x^1 = (x^1_n)$ con valori che distano meno di 1, ed induttivamente applicando l'argomento a $x^h = (x^h_n)$ si ottiene una sua sottosuccessione $x^{h+1} = (x^{h+1}_n)$, e quindi sottosuccessione di tutte le precedenti $x^{h-1}, \ldots, x^1$, (x_n), con valori che distano tra loro meno di $\frac{1}{h+1}$. - - - La sottosuccessione di Cauchy cercata è quella "digonale": x^n_n, poichè se $n > m$ si ha che x^n_n è un valore di x^m per cui $d(x^n_n, x^m_m) \leq \frac{1}{m}$.
- - Per completezza si conclude.
2b- Dimostrazione omessa.

Teorema 3 Siano (E, d), (F, D) spazi metrici. Si denotino con $\mathcal{B}((E, d), (F, D))$ l'insieme delle funzioni *limitate*, con $C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D))$ quello delle funzioni *continue e limitate*.
1) - Se una successione di funzioni limitate $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy per la distanza uniforme è *equilimitata* cioè limitata rispetto alla distanza uniforme: denotando con $f^{(z)}$ per $z \in F$ la funzione costante $f(x) = z$, $x \in E$

$$\forall z \in F : \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} d_{Unif}(f_n, f^{(z)}) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{x\in E} D(f_n(x), z).$$

- Quindi se converge uniformemente la funzione limite è limitata.
2) Se una successione di funzioni continue $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy per la distanza uniforme è *equicontinua*: dato $x \in E$ si ha $\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{y\in B_d(x,r)} D(f_n(x), f_n(y)) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$

3) $C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D))$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio metrico $\mathcal{B}((E, d), (F, D))$ con la distanza uniforme. Equivalentemente la funzione *limite uniforme di funzioni continue è continua.*
4) Lo spazio metrico delle funzioni limitate, $(\mathcal{B}(A, (F, D)), d_{Unif})$, con la distanza uniforme, definite su un qualsiasi insieme A a *valori* in un spazio metrico *completo* (F, D) è completo.

Corollario: se (F, D) è completo lo è anche lo spazio metrico $(C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D)), d_{Unif})$.

Dimostrazione: 1) - è un'applicazione del teorema 1.3.
- Se $d_{Unif}(g, f_n) \to 0$ allora $d_{Unif}(g, f_n)$ è limitata, cioè $\sup_n d_{Unif}(g, f_n) \leq R < +\infty$. Inoltre, dal primo punto si ha che dato $z \in F$ $\sup_n d_{Unif}(f_n, f^{(z)}) \leq M < +\infty$. Quindi per la diseguaglianza triangolare

$$d_{Unif}(g, f^{(z)}) \leq d_{Unif}(g, f_n) + d_{Unif}(f^z, f_n) \leq R + M < +\infty.$$

2) Sia $f_n,\ n \in \mathbf{N}$ è una successione di funzioni continue di Cauchy uniformemente, cioè per la distanza uniforme: dato ε vi è N per cui se $n,\ m \geq N$

$$d_{Unif}(f_n, f_m) = \sup_{x \in E} D(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

Dato $x \in E$ per $n \geq N$ si ha:

$$D(f_n(x), f_n(y)) \leq D(f_n(x), f_N(x)) + D(f_n(y), f_N(y)) + D(f_N(x), f_N(y)) \leq 2\varepsilon + D(f_N(x), f_N(y)),$$

quindi per continuità delle prime N funzioni vi è $r > 0$ per cui per tutti i $k \leq N$ se $d(x, y) \leq r$ allora $D(f_k(x), f_k(y)) \leq \varepsilon$. Ne segue: per ogni $n \in \mathbf{N}$ per tali y si ha $D(f_n(x), f_n(y)) \leq 3\varepsilon$.

3) - $f_n\ n \in \mathbf{N}$ è una successione di funzioni continue che converge uniformemente ad una funzione f: cioè per la distanza uniforme.
- Va provata la continuià di f: dato $x \in E$ per diseguaglianza triangolare per ogni $n,\ y$:

$$D(f(x), f(y)) \leq D(f_n(x), f(x)) + D(f_n(y), f(y)) + D(f_n(x), f_n(y)) \leq 2d_{Unif}(f_n, f) + D(f_n(x), f_n(y)).$$

Essendo f_n di Cauchy uniformemente, poichè convergente uniformemente, per il punto 2 si ha: dato $\varepsilon > 0$ vi è $r > 0$ non dipendente da n per cui $\sup\limits_{d(x,y) \leq r} \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} D(f_n(y), f_n(x)) \leq \varepsilon$. Ergo per $d(x, y) < r$:

$$D(f(x), f(y)) \leq 2d_{Unif}(f_n, f) + 3\varepsilon, \quad \text{per } n \to \infty\text{: se } d(x, y) < r \text{ allora } D(f(x), f(y)) \leq 3\varepsilon.$$

4) Data una $f_n,\ n \in \mathbf{N}$ successione di funzioni limitate, definite su A a valori nello spazio metrico completo (F, D), che sia di Cauchy uniformemente: dato $\varepsilon >$ vi è $M_\varepsilon \in \mathbf{N}$ per cui se $m,\ n \geq M$

$$D(f_n(x), f_m(x)) \leq \sup_{x \in A} D(f_n(x), f_m(x)) = d_{Unif}(f_n, f_m) \leq \varepsilon;$$

i) ne segue per completezza di (F, D) che esite il limite puntuale: per ogni $x \in A$ vi è $g(x) \in F$ per cui $D(f_n(x), g(x)) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

ii) Inoltre l'insieme delle f_n è limitato per la distanza uniforme (punto 1 del teorema): cioè è una famiglia di funzioni uniformemente limitata in (F, D): per qualche $z \in F$ ed $R \in \mathbf{R}$ si ha $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \sup\limits_{x \in A} D(f_n(x), z) \leq R$. Ne segue che la funzione limite puntuale g è limitata:

$$D(g(x), z) \leq D(f_n(x), g(x)) + D(f_n(x), z) \leq D(f_n(x), g(x)) + R \xrightarrow[n \to \infty]{} R.$$

iii) ne segue altresì la convergenza uniforme delle f_n a g: per $m \geq M_\varepsilon$ e $n \geq M_\varepsilon$:

$$D(g(x), f_m(x)) \leq D(g(x), f_n(x)) + D(f_n(x), f_m(x)) \leq D(g(x), f_n(x)) + \varepsilon \xrightarrow[n \to \infty]{} \varepsilon,$$

quindi per ogni $m \geq M$, $x \in E$, si ha $D(g(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$, cioè:

per ogni $m \geq M$, si ha $d_\infty(f, f_m) = \sup\limits_{x \in E} D(g(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$.

1.3 Contrazioni: se $f : E \to E$, E con distanza d, e vi è $L \in (0;1)$, $0 < L < 1$ per cui $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$, f si dice *contrazione in* E.

Teorema delle contrazioni 4: se f è una contrazione in E allora:

1- per ogni $p \in E$ la successione di elementi di E: $x_0(p) = p$, $x_1 = f(p)$, $x_{n+1}(p) = f(x_n(p))$ $(n \in \mathbf{N})$ è di Cauchy.

- La stima dell'acuratezza si esplicita: $d(x_n, x_m) \leq d(f(p), p)\dfrac{L^m}{1-L}$, $n \geq m$

2- Se (E, d) è anche *completo* per d allora x_n è convergente a un punto $\lambda(p)$ di E.

3- Tale limite non dipende dal dato iniziale p ed è *l'unico punto fisso* di f: $f(\lambda) = \lambda$.

Dimostrazione:
1) - $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq Ld(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq L^n d(x_1, x_0) = L^n d(f(p), p)$.

- Se $n > m$, $n = m + k + 1$, si ha

$d(x_n, x_m) = d(x_{m+k+1}, x_m) \leq d(x_{m+k+1}, x_{m+k}) + d(x_{m+k}, x_{m+k-1}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \leq$

$\leq (L^{k+m} + \cdots + L^m)d(f(p), p) = d(f(p), p)\displaystyle\sum_{h=m}^{n-1} L^h = d(f(p), p)\frac{L^m}{1-L}$.

2) Se $d(f(p), p) = 0$ allora $p = f(p)$ è un punto fisso. Alrimenti $d(f(p), p) > 0$.

Se m è tale che $L^m \leq \varepsilon\dfrac{1-L}{d(f(p), p)}$, cioè, essendo L, $1 - L < 1$, $m \geq \dfrac{\log \varepsilon \frac{1-L}{d(f(p),p)}}{\log L} =: M_\varepsilon$, si ottiene che per $n \geq m \geq M$ è $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$.
Quindi (x_n) è di Cauchy in (E, D) completo per cui ha limite $\lambda(p) \in E$: $d(x_n, \lambda(p)) \to 0$.
Si avrebbe
$d(\lambda(p), f(\lambda(p))) \leq d(\lambda(p), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f(\lambda(p))) = d(\lambda(p), x_{n+1}) + d(f(x_n), f(\lambda(p)))$.
Per continuità di f e definizione di $\lambda(p)$ per $n \to \infty$ si ottiene : $d(\lambda(p), f(\lambda(p))) \leq 0$. Quindi $f(\lambda(p)) = \lambda(p)$, cioè $\lambda(p)$ è un punto fisso.

3) Dati due dati iniziali diversi p, q, per gli eventuali due limiti si ha usando due volte la diseguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} d(\lambda(p), \lambda(q)) &\leq d(\lambda(p), x_n(p)) + d(x_n(p), x_n(q)) + d(x_n(q), \lambda(q)) \leq \\ &\leq d(\lambda(p), x_n(p)) + L^n d(p, q) + d(x_n(q), \lambda(q)) \to 0 \text{ per } n \to \infty, \end{aligned}$$

cioè $d(\lambda(p), \lambda(q)) \leq 0$, essendo in uno spazio metrico $\lambda(p) = \lambda(q)$.

In particolare se $p = \mu$ e $q = \nu$ sono punti fissi le successioni da essi generati sono costanti per cui $\mu = \lambda(\mu) = \lambda(\nu) = \nu$.

1.4 Uniforme continuità e successioni di Cauchy. Se una funzione è uniformemente continua allora *trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.*
Dimostrazione: Se $f : (D, d) \to (F, d')$ è uniformemente continua

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall u \in D \ \forall x \in D : \ 0 < d(x, u) \leq \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon$$

se $x_N, \ n \in N$ è di Cauchy nel dominio di f $\forall \delta > 0 \ \exists N > 0 \ \forall n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq \delta$
allora interpolando δ con N $\qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, \ n \geq \Longrightarrow d'(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon.$
<u>Osservazione:</u> il viceversa non è vero: $f(x) = x^2$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ non è uniformemente continua ma è continua. Ma in $\mathbf{R}$, completo, le successioni di Cauchy e quelle convergenti coincido. Per continutà f trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy,

Estensione di funzioni uniformemente continue. Se $f : D \to (F, d')$, $D \subseteq E$, (E, d) , (F, d') spazi metrici ed (F, d') *completo*, e f è *uniformemente continua* allora esiste *un'unica estensione continua* di f a $\overline{D}$, e risulta uniformemente continua.
Dimostrazione: - se $x \in \overline{D}$ vi è $x_n \in D$ con $x_n \to x$ per d. Essa è di Cauchy per d quindi $f(x_n)$ è di Cauchy per d', e per completezza di (Y, d') vi è $u \in F$ e $f(x_n) \to u$. Tale valore risulta indipendente dalla successione x_n che approssima x.
- - Infatti per un'altra $z_n \in D$ con $z_n \to x$ per d, vi è $v \in F$ per cui $f(z_n) \to v$ per d'.
- - D'altronde convergendo allo stesso limite per ogni $\delta > 0$ vi è m per ogni $n \geq m$
$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, x) + d(x, z_n) \leq 2\delta$.
- - Per uniforme continuità di f dato $\varepsilon > 0$ vi è $\delta > 0$ per cui se $d(a, b) \leq 2\delta$, a, $b \in D$, si ha $d'(f(a), f(b)) \leq \varepsilon$
- - Quindi
$d'(u, v) \leq d'(u, f(x_n)) + d'(f(z_n), v) + d'(f(x_n), f(z_n)) \leq d'(u, f(x_n)) + d'(f(z_n), v) + \varepsilon \to \varepsilon$
per $n \to \infty$, quindi $d'(u, v) = 0$, essendo lo spazio metrico $u = v$.
- Si pone $F(x) = u$: essa estende f per costruzione, con egual argomento si prova che è uniformemente continua su $\overline{D}$. Se poi g è un'estensione continua di f a $\overline{D}$, per $x \in \overline{D}$ $x_n \in D$ con $x_n \to x$, si ha $g(x_n) \to g(x)$, e $g(x_n) = f(x_n) \to F(x)$. Per unicità del limite in spazi metrici si conclude.
Limiti uniformi di funzioni uniformemente continue. il limite uniforme di funzioni uniformemente continue è uniformemente continuo.

Dimostrazione: siano $f_n : E \to F$, $n \in \mathbf{N}$, *uniformemente continue* tra (E, d) ed (F, D) spazi metrici. Sia $fE \to F$ il loro limite uniforme: $d_{Unif}(f_n, f) = \sup_{x \in E} D(f_n(x), f(x)) \to 0$.

- $$\begin{aligned} D(f(x), f(y)) &\leq D(f(x), f_n(x)) + D(f_n(x), f_n(y)) + D(f_n(y), f(y)) \leq \\ &\leq 2d_{Unif}(f_n, f) + D(f_n(x), f_n(y)). \end{aligned}$$

- Dato $\varepsilon > 0$:
- - per convergenza uniforme sia N per cui $2d_{Unif}(f_N, f) \leq \varepsilon$,
- - per uniforme continuità di f_N sia $r = r_N > 0$ per cui $d(x, y) \leq r \ \Rightarrow \ D(f_N(x), f_N(y)) \leq \varepsilon$.

$$\text{Quindi dato } \varepsilon > 0 \text{ per tale } r \text{ si ha } \sup_{(x,y),\, d(x,y) \leq r} D(f(x), f(y)) \leq 3\varepsilon.$$

Corollario: l'insieme delle funzioni uniformemente continue limitate con la distanza uniforme è un sottoinsime chiuso delle funzioni continue limitate.

1.5 Spazi di Banach. Uno spazio vettoriale completo per la distanza indotta da una norma si dice di Banach per la norma in questione.

Usando la completezza, lo stesso argomento con cui si dimostra che una *serie di numeri reali assolutamente convergente è convergente* prova il seguente criterio di convergenza di serie in norma per spazi di Banach:

Convergenza totale - In un spazio vettoriale V con norma $\|\cdot\|$, data una successione di "addendi" $v_n \in V$, $n \in \mathbf{N}$ se la serie di numeri non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|$ è finita allora la successione delle somme parziali $S_N =: \sum_{n=0}^{N} v_n \in V$ per la diseguaglianza triangolare è di Cauchy per la norma.

- Quindi se B è uno spazio di Banach per la norma $\|\cdot\|$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty$ allora vi è il limite $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \in B$.

1.6 Spazi di Hilbert. sono gli spazi con *prodotto scalare, completi* per le distanze indotte.

Osservazione: - gli esempi fondamentali di spazi di Hilbert sono gli spazi cartesiani $\mathbf{R}^m$ muniti del prodotto scalare euclideo dato dalla somma delle coordinate omologhe.

- Lo spazio delle successioni complesse (x_n) per cui $\sum_n |x_n|^2 < +\infty$ con il prodotto scalare $\langle x \cdot y \rangle_{\ell^2} =_{def} \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, è uno spazio di Hilbert, rendendolo la distanza associata completo.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

SPAZI ASTRATTI: METRICI, VETTORIALI NORMATI, CON PRODOTTO SCALARE:

[B] cap. IV.3 pagg.178-180; cap.IV.3 Esem.(IV.88) pagg. 210-211 (funzioni trigonometriche); cap. VII par. da 1 a 5 pagg. 331-348, in particolare distanze L1 ed uniforme nel piano pag.3332, per funzioni continue pag. 333-334.

[F] cap. 1.8 formule da (8.10) a (8.12) pagg.53-53; cap.2 pagg 75-120 in particolare: formula (15.6) pag. 83, distanza uniforme per funzioni continue Esem. 4 pag. 79, distanze Lp negli spazi cartesiani pagg.96-97.