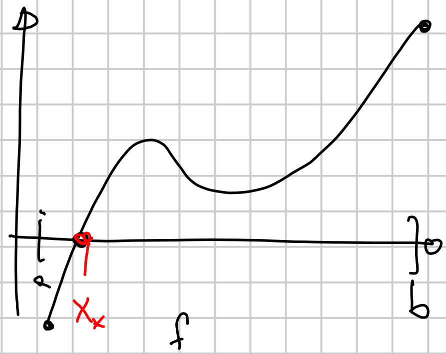
RICERCA DI ZERI

Note Title 2021-10-04



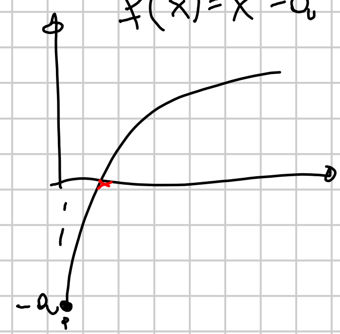
$f(x_*) = 0$

$[a,b]$ intervallo di separazione se $f(a)f(b) < 0$

Se $[a,b]$ int. sep. e $f \in C^0([a,b])$ allora esiste $x_* \in (a,b)$ t.c. $f(x_*) = 0$

ES Calcolare $\sqrt[n]{a}$ $\Leftrightarrow$ trovare il punto x_* t.c. $x_*^n - a = 0$

$f(x) = x^n - a$

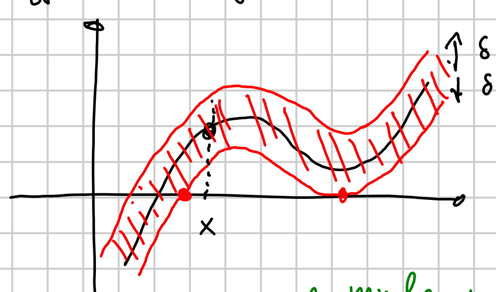


Condizionamento del problema:

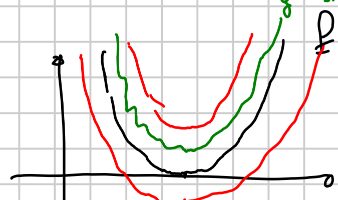
come cambia x_* se cambiamo leggermente f ?

Immagino di avere a disposizione non f, ma g t.c.

$$|g(x) - f(x)| \leq \delta$$



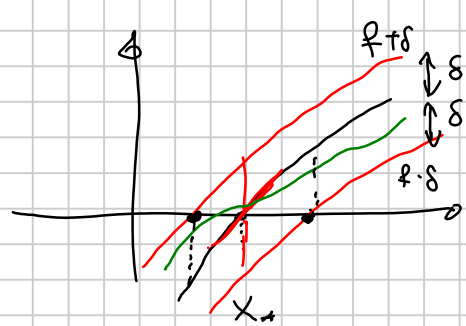
g non ha uno zero!



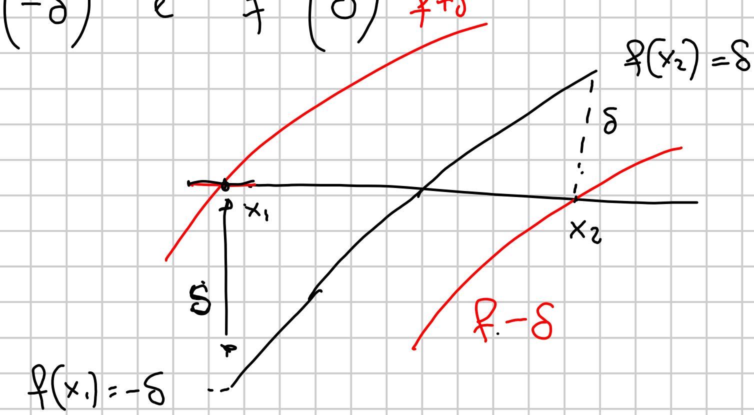
Supponiamo $f'(x_*) \neq 0$ $\quad f \in C^1([a,b])$

$\Rightarrow f$ invertibile in un intorno di x_*

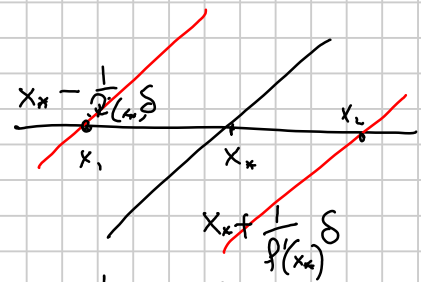
se g è compresa tra $f+\delta$ e $f-\delta$, allora uno zero di g in questo intorno



sarà compreso tra $f^{-1}(-\delta)$ e $f^{-1}(\delta)$



$$f^{-1}(\delta) = \underbrace{f^{-1}(0)}_{= x_*} + \delta \underbrace{\left(f^{-1}\right)'}_{= \frac{1}{f'(x_*)}}(0) + O(\delta^2)$$

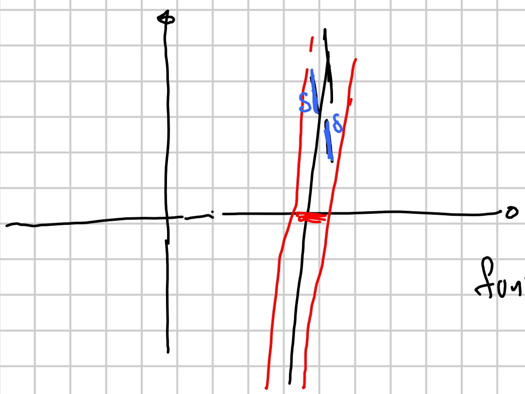


$$f^{-1}(\delta) \doteq x_* + \frac{1}{f'(x_*)}\delta \qquad \Big| \qquad f^{-1}(-\delta) \doteq x_* - \frac{1}{f'(x_*)}\delta$$

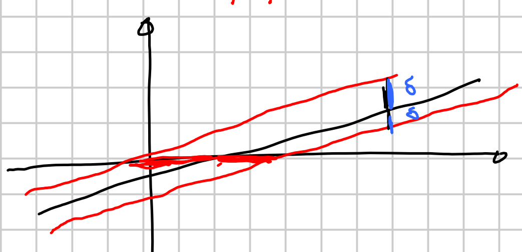
Se $\tilde{x}_*$ è uno zero di g,

$$|\tilde{x}_* - x_*| \lesssim \max\left(|x_1 - x_*|, |x_2 - x_*|\right) \doteq \frac{1}{|f'(x_*)|}\delta$$

↑ il valore assoluto si ottiene studiando anche il caso in cui f è decrescente



funzione "ripida" ⇒ intervallo piccolo sull'asse x



funzione "piatta" ⇒ intervallo grande sull'asse x

Metodo di bisezione

Ipotesi: $f \in C^0([a,b])$ $\qquad$ $[a,b]$ intervallo di separazione

$$f(a)\,f(b) < 0$$

⇒ esiste $x_* \in (a,b)$ zero di f, $f(x_*) = 0$

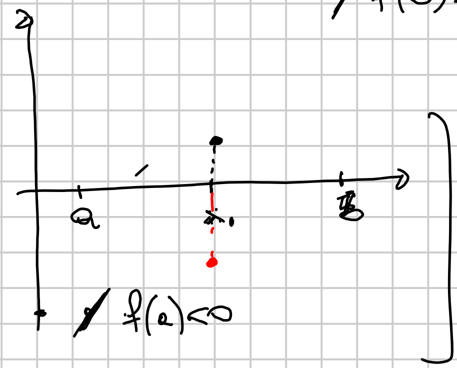
$a = a_1 \qquad b = b_1$

$x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

Esempio

Se $f(x_1) > 0$, $[a, x_1]$ int. separazione

Se $f(x_1) < 0$, $[x_1, b]$ int. separazione.



In generale, se $f(a) f(x_1) < 0 \Rightarrow [a, x_1]$ int. sep.

se $f(a) f(x_1) > 0$, $f(x_1) f(b) < 0 \Rightarrow [x_1, b]$ int. separazione

se $f(a) f(x_1) = 0$, visto che $f(a) f(b) < 0 \Rightarrow f(x_1) = 0$, ho trovato la soluzione

$a_1 = a, \; b_1 = b$

per $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

$x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$

se $f(a_k) f(x_k) = 0$, mi fermo, x_k soluzione

se $f(a_k) f(x_k) < 0$,