Ricerca di zeri: trovare $x_* \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_*) = 0$

Metodi di punto fisso: $f(x_*) = 0 \iff x_* = \Phi(x_*)$

Localmente convergente se $|\Phi'(x_*)| < 1$

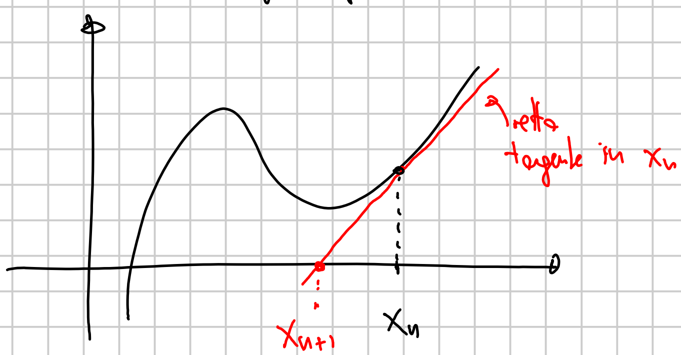
Convergente su un intervallo $I = [x_* - \rho, x_* + \rho]$ se $|\Phi'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$.

Convergenza lineare: $\frac{e_{n+1}}{e_n} \to \boxed{|\Phi'(x_*)|} < 1$

Metodo di Newton

Richiede di essere in grado di calcolare non solo $f(x)$, ma anche la sua derivata $f'(x)$ (e quindi $f \in C^1([a,b])$)

Idea: ad ogni passo calcolo uno zero della retta tangente a f in x_n



"in piccolo", la funzione non si discosta dalla retta tangente

In formule:

equazione della retta tangente:

passa per $(x_n, f(x_n))$ e ha derivata $f'(x_n)$

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \iff y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Impongo che passi per $(x_{n+1}, 0)$:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \iff \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Metodo di Newton:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

pto fisso:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \end{cases} \qquad n=0,1,2,\dots$$

Se la succ. converge a x_*, allora

$$x_* = \lim x_{n+1} = \lim x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_* - \frac{f(x_*)}{f'(x_*)} \Rightarrow f(x_*)=0$$

Il metodo di Newton è un metodo di pto fisso con $\Phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Teo: Sia $f \in C^2([a,b])$, $x_* \in (a,b)$ t.c. $f(x_*)=0$ $\boxed{\text{e } f'(x_*) \neq 0}$

Allora, esiste $I = [x_* - \rho, x_* + \rho]$ tale che per ogni $x_0 \in I$ si ha

$$\begin{cases} f(x_n) \in I & n=0,1,2,\dots \\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_* \end{cases}$$

Dim: Basta dimostrare che $|\Phi'(x_*)| < 1$, poi utilizzo l'osservazione fatta la lezione scorsa.

Innanzitutto, noto che $f'(x_*) \neq 0 \Rightarrow$ esiste un intervallo $I' = [x_* - \rho', x_* + \rho']$ tale che $f'(x) \neq 0$ su tutto I', per continuità di $f'(x)$

Ora posso calcolare per $x \in I'$

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f''(x) f(x)}{[f'(x)]^2} =$$

$$= \frac{\cancel{[f'(x)]^2} - \cancel{[f'(x)]^2} + f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\Phi'(x_*) = \frac{f''(x_*)f(x_*)}{[f'(x_*)]^2} = \boxed{0} \qquad |\Phi'(x_*)| < 1$$

Dalla volta scorsa, quindi so che riesco a trovare $I = [x_* - \rho, x_* + \rho] \subseteq I'$ tale che $|\Phi'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow$ vale il teo. del punto fisso, che dice che le successioni $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \end{cases}$

soddisfano

$$\begin{cases} x_n \in I & n=0,1,2,\dots \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_* \end{cases}$$

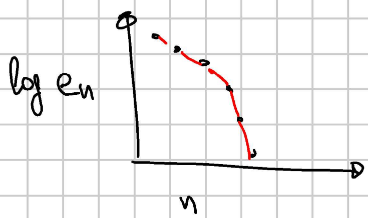
Svantaggi:

- richiede calcolare ad ogni passo sia la f che la f'
  $\Rightarrow$ costo computazionale per passo più alto
- convergenza garantita solo se x_0 sufficientemente vicino a x_*
  (difficile da calcolare questo)

Vantaggi:

- converge (nella maggior parte dei casi) più velocemente degli altri metodi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = |\Phi'(x_*)| = 0$$ $\Rightarrow$ in un grafico in scala logaritmica,



i punti e_n tendono ad una retta verticale
$\Rightarrow$ convergenza più veloce che una successione geometrica.

Convergenza quadratica del metodo:

Teo: Supponiamo $f \in C^2([a,b])$, $x_* \in (a,b)$ t.c. $f(x_*) = 0$
e $\boxed{f'(x_*) = 0}$. Allora, $\quad (e_n = |x_n - x_*|)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = c \in [0,\infty)$$ (il limite esiste ed è finito)

Dim: Facciamo uno sviluppo di Taylor di f centrato in x_n con resto di Lagrange

$$f(x_n+h) = f(x_n) + f'(x_n)\,h + \frac{f''(\xi_n)}{2} h^2$$

per un certo punto ξ_n compreso tra x_n e x_n+h

$$0 = f(x_*) = f(x_n) + f'(x_n)(x_* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_* - x_n)^2$$

Dividiamo per $f'(x_n)$

$$0 = \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{-x_{n+1}} + \underbrace{x_* - x_n} + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_* - x_n)^2$$

$$\frac{x_{n+1} - x_*}{(x_* - x_n)^2} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f''(\xi_n)|}{|2f'(x_n)|} = \frac{|f''(x_*)|}{|2f'(x_*)|} \in [0, \infty)$$

So già che $x_n \to x_*$, cioè $|x_n - x_*| \to 0$

Quindi $|2f'(x_n)| \to |2f'(x_*)|$ (per continuità di $|2f'(x)|$)

ξ_n compreso tra x_n e x_* $\Rightarrow$ $\underset{\downarrow\, 0}{0} \leq |\xi_n - x_*| \leq \underset{\downarrow\, 0}{|x_n - x_*|}$

allora $\xi_n \to x_*$ per il teorema dei carabinieri.

$|f''(\xi_n)| \to |f''(x_*)|$ per continuità di $|f''(x)|$. $\square$

Quindi per il metodo di Newton questo implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = C \in [0, \infty)$$

Questa relazione implica convergenza veloce (almeno) come quella lineare: difatti,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2}}_{= C} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} e_n}_{= 0} = 0$$

In pratica, appena l'errore scende sotto una certa soglia, va a zero molto velocemente:

$$e_{n+1} \approx C e_n^2 \approx C^3 e_{n-1}^4$$

$$10^{-2} \to 10^{-4} \to 10^{-8} \to 10^{-16} \ldots$$

Si dice che il metodo di Newton converge almeno quadraticamente o che la convergenza è di ordine almeno 2.

Più in generale, se per un algoritmo dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} \in [0,+\infty) \quad \text{(esiste finito)}$$

allora si dice che la convergenza di ordine almeno p

e se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} \in (0,+\infty) \quad \text{(esiste, finito, diverso da 0)}$$

allora si dice che la convergenza di ordine esattamente p

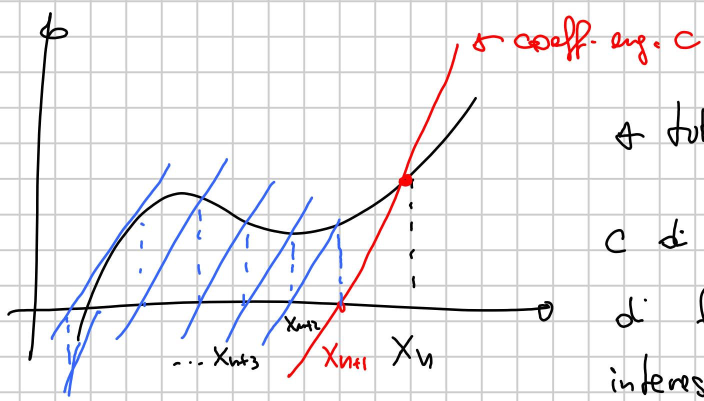
Per ogni $p>1$ (per $p=1$ serve anche che il limite sia <1 per avere convergenza)

(le parole si comportano "come vi aspettereste": 5 è "almeno 4").

Varianti del metodo di Newton
(cerchiamo di evitare derivate)

1) Metodo delle corde:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{c} \end{cases} \quad \text{per un } c\in\mathbb{R} \text{ fissato}$$



tutte le rette sono parallele

c di solito è un'approssimazione di $f'(x)$ nella regione che ci interessa. Spesso si calcola $c=f'(x_0)$ una volta sola all'inizio e poi si lascia costante.

Le iterazioni sono più veloci (non serve calcolare $f'(x_n)$ ad ogni passo) ma tipicamente ne servono di più.

Il metodo è un'it. di punto fisso

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \end{cases} \quad \text{con } \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{c} \qquad \Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{c}$$

$$\Phi'(x_*) = 1 - \frac{f'(x_*)}{c}$$

a non è per forza uguale a zero, né < 1 in val. ass.

$\Rightarrow$ non è detto che il metodo converga, e quando lo fa converge linearmente

2) Metodo delle secanti:

Rimpiazziamo $f'(x_n)$ con

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f'(\xi_n)$$

per un punto ξ_n compreso tra x_{n-1} e x_n

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ dati} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \dfrac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Servono <u>due</u> punti iniziali. <u>Non</u> serve derivata.

Costo: 1 valutazione della funzione in un nuovo punto per ogni passo: se scrivo attentamente il codice, posso salvare in una variabile il valore di $f(x_{n-1})$ calcolato al passo precedente.

<u>Non</u> è un metodo della forma $\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = \Phi(x_n) \end{cases}$

Si può dimostrare (noi non lo facciamo) che l'ordine di convergenza del metodo è almeno $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^{1.618\dots}} = C \in [0, \infty)$$

già visto in: sezione aurea, numeri di Fibonacci, ...

Esempi di applicazione del metodo di Newton:

1) $f(x)$ una retta $\quad f(x) = m(x - x_*) \qquad f'(x) = m$ costante

Metodo di Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cancel{m}(x_n - x_*)}{\cancel{m}} = \cancel{x_n} - (\cancel{x_n} - x_*) = x_*$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ qualunque $\quad x_1 = x_*$ $\to$ convergenza esatta dopo un passo

$\to$ la retta tangente è la funzione, in questo caso!

2) $f(x) = x^2 - a \quad a \in \mathbb{R}$ con zero $x_* = \sqrt{a} \qquad f'(x) = 2x$

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{a}{2x_n} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \end{cases}$$

$a = 17 \qquad x_0 = 4 \qquad x_1 = \dfrac{4 + \frac{17}{4}}{2} = \dfrac{16 + 17}{8} = \dfrac{33}{8}$

$$x_2 = \frac{\frac{33}{8} + \frac{17 \cdot 8}{33}}{2} = \frac{33^2 + 17 \cdot 8^2}{2 \cdot 8 \cdot 33} = \ldots$$

3) $f(x) = x^2 \qquad x_* = 0 \qquad f'(x) = 2x$

$f'(x_*) = 2 \cdot 0 = 0$

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^{\cancel{2}}}{2\cancel{x_n}} = \dfrac{x_n}{2} \end{cases}$$

non verificata l'ipotesi: $f'(x_*) \neq 0$

Partendo ad es. da $x_0 = 1$, ho $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{8}$, $x_4 = \frac{1}{16}$, ...

La successione converge a 0, difatti ho $x_k = \dfrac{1}{2^k}$ per ogni k

Però $\displaystyle\lim \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim \frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|} = \frac{\left|\frac{1}{2^{n+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^n} - 0\right|} = \frac{1}{2}$ $\to$ conv. lineare, non quadratica

(non valgono le ipotesi del teorema di convergenza).