$\bigstar \lim_{\substack{(x,z)\to(0,0)\\ z\geq 0}} \frac{x^2 z}{|x|^\alpha + z^\alpha}$

• ESERCIZIO n. 4 Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}}$.

* cfr. dispense Velichkov C2P1 Prop 12, 13 oppure usando direttamente la definizione

Soluzione corretta * $\alpha > 0$

dominio: $\alpha<0$ $x\cdot y\neq 0$, $\alpha=0$ $x\cdot y\neq 0$, $\alpha>0$ $x^2+y^2\neq 0$

Si assume $x^2+y^2\neq 0$ e $x^2+y^2<1$ poiché $(x,y)\to(0,0)$

1) $\alpha<0$: $|x|^\alpha>1$ e $|y|^{2\alpha}>1$ quindi $|f(x,y)|\leq \frac{x^2y^2}{2} \xrightarrow[x^2+y^2\to 0]{} 0$ (come a lezione)

2) Per $\alpha=0$: $f(x,y) = x^2y^2 \longrightarrow 0$ (" ")

3) Per $\alpha>0$ $f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0$. Il candidato limite è 0.

Se si usassero le coordinate polari $(x,y)=\rho(\cos\theta, \sin\theta)$ $0\leq\theta\leq 2\pi$ la convergenza $f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$, $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^{4-\alpha}\frac{(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2}{|\cos\theta|^\alpha+\rho^\alpha|\sin\theta|^{2\alpha}}$

*equivale a $\sup_\theta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \xrightarrow{\rho\to 0} 0$.

Nel caso sarebbe oneroso trovare maggioranti per stimare $\sup_\theta f$.

4.1) Si semplifica con una sostituzione intermedia $z=y^2\geq 0$. Poiché $|y|,|x|<1$: $x^2+y^2\geq x^2+z^2\geq x^4+y^4$

si ha $(x,y)\to(0,0) \iff (x,z)\to(0,0^+)$.

Basta studiare $\lim_{(x,z)\to(0,0^+)} f(x,\sqrt{z})$ $\bigstar$

Pareggio degli esponenti al denominatore somma di potenze

4.2) Ora si usano le coordinate polari per (x,z), $z\geq 0$:

$(x,z)=r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ $0\leq\varphi\leq\pi$

$r^{3-\alpha}\frac{(\cos\varphi)^2(\sin\varphi)}{|\cos\varphi|^\alpha+|\sin\varphi|^\alpha}$

poiché $(\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2=1$ $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$ non si possono annullare contemporaneamente

Quindi $\exists \min |\cos\varphi|^\alpha+|\sin\varphi|^\alpha = \mu \gneq 0$

Perciò:

$0\leq f(x,y) = f(x,\sqrt{z}) \leq \frac{r^{3-\alpha}}{\mu} = \frac{(x^2+y^4)^{\frac{3-\alpha}{2}}}{\mu}$

da cui per $\alpha<3$ $\exists \lim f(x,y) = 0$.

Se $\alpha\geq 3$ $\nexists \lim f(x,y)$

$f(x,\sqrt{|x|}) = \frac{x^2|x|}{2|x|^\alpha} = \frac{|x|^{3-\alpha}}{2} \xrightarrow{x\to 0} \begin{cases} \frac{1}{2} & \alpha=3 \\ +\infty & \alpha>3 \end{cases}$