Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 7
EQUIVALENZE DI CURVE

1 Riparametrizzazioni ed equivalenze di cammini

Riparametrizzazione: - sia $f : I \to \mathbf{R}^m$, $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, un cammino. Un cammino $g : J \to \mathbf{R}^m$, $J \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, si dice *riparametrizzazione* di f se è del tipo:

$g(\tau) = f(\varphi(\tau))$, $\tau \in J$, con $\varphi : J \to I$ continua, *surgettiva e debolmente* monotona.

- φ si dirà cambiamento di parametrizzazione.

Osservazione: - un cammino e una sua riparametrizzazione hanno lo *stesso sostegno.*

- una se g è riparametrizzazione di f non è detto che f lo sia di g: il cambiamento di parmetrizzazione può essere costante per qualche tratto: una riparametrizzazione permette "soste supplementari".

Esempio 1: cambiamento di parametro lineare crescente da un intervallo $[a;b] \ni t$ ad un intervallo $[A;B] \ni s$: $s(t) = \dfrac{B-A}{b-a}(t-a) + A$.

Osservazione: - Questa nozione è *troppo impegnativa* per i cammini chiusi, in quanto il punto di "saldatura" sul sostegno deve essere eguale per i due cammini in questione (in quanto il cambiamento di parametrizzazione, poichè monotono, continuo e surgettivo, manda necessariamente gli estremi di J negli estremi di I).

- Per ovviare a ciò si osservi che ad un cammino chiuso f definito su $[a;b]$ si associa in modo unico la funzione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ *continua, periodica* di periodo $b-a$: $F(s + h(b-a)) = f(s+a)$, $0 \le s \le b-a$, $h \in \mathbf{Z}$. Essa risulta continua poichè $f(a) = f(b)$ ed f è continua.

Estensione periodica: tale F si dirà estensione periodica di f.

Riparametrizzazione di cammini chiusi: un cammino chiuso g si dice *riparametrizzione chiusa* di una altro cammino chiuso f, se vi è un restrizione al periodo dell'estensione periodica di g che è riparametrizzazione di una restrizione al periodo dell'estensione periodica di f.

Come uso diremo che una funzione di una variabile reale è C^k su un intervallo, $k \in \mathbf{N}$, su un intervallo se ha k derivate continue sull'intervallo. Per $k = 0$ è la continuità su I.

Equivalenza C^k : due cammini si dicono C^k *equivalenti* se uno è riparametrizzazione dell'altro e il cambiamento di parametrizzazione è C^k ed *invertibile* con *inversa* è C^k .

Equivalenza C^k tra cammini chiusi: due cammini chiusi si dicono C^k *equivalenti* se uno è riparametrizzazione dell'altro nel senso dei cammini chiusi, e il cambiamento di parametrizzazione sulle restrizioni delle estensioni periodiche è C^k ed *invertibile* con *inversa* C^k .

Osservazione: - se f è C^k equivalente a g è vero anche il viceversa: si è definita quindi una relazione di equivalenza tra cammini.

- Se $k \ge 1$ si deve in particolare avere che la derivata del cambio di parametrizzazione è sempre non nulla ($\varphi'(\tau) \ne 0$, $\forall \tau \in J$).

Cammini C^k a tratti. Un cammino si dice C^k a tratti chiusi (aperti) su I se vi è una suddivisione $I_1, \dots, I_n$ di I in intervalli *chiusi in* I, per cui su I_i ($\overset{\circ}{I_i}$), $1 \le i \le n$ è C^k.

Cammini regolari a tratti. Un cammino si dice *regolare* (in senso forte) *a tratti* su un intervallo chiuso I se vi è una suddivisione $I_1, \dots, I_n$ di I in intervalli *chiusi*, e su ogni I_i, $1 \le i \le n$ il cammino è regolare (in senso forte).

Lemma 1 Un cammino regolare a tratti può essere riparametrizzato in modo C^1.

Dimostrazione. Omessa: l'idea è quella della parametrizzazione C^1 di un quadrato costruita nell'esempio 7 del FT2.

2 Orientazione

Orientazione 1: cinematica - due cammini, di cui uno riparametrizzazione dell'altro, *hanno la stessa orientazione* se il cambimento di parametrizzazione è non decrescente.
- Se la riparametrizzazione è non crescente si diranno avere *orientazione opposta*.

Equivalenza orientata: è la relazione di equivalenza che si ha quando due cammini sono equivalenti ed hanno la stessa orientazione.

Se è naturale per il sostegno un cammino regolare usare il "verso di percorrenza", per parlare di una delle sue due orientazioni, è opportuno modificare il concetto di orientazione a *sottinsiemi di* $\mathbf{R}^m$ che siano unioni di immagini di cammini.

Notazione: si denota con $\mathbf{S}^{m-1}$ la frontiera della palla unitaria $\mathbf{B}(0_{\mathbf{R}^m}, 1)$.

Orientazione 2: insiemistica. Se $C \subseteq \mathbf{R}^m$ è unione di una famiglia di sostegni di cammini, si dice *un orientazione* di C

una funzione *continua* $T : C \to S^{m-1}$, con $T(p)$ tangente in p a C.

Osservazioni: 1- non è detto che un' orientazione in tal senso esista anche per l'immagine di un cammino regolare. Per esempio:
- - se C è l'immagine del cammino $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$, $t \in [0; 2\pi)$, esempio 2 in FT5. Nel caso la parametrizzazione dà un'orientazione a C nel senso del verso di percorrenza con il versore tangente $\widetilde{T}(t) = \dfrac{f'(t)}{|f'(t)|}$: funzione regolare di t. Ma per $p = (0,0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3}{2}\pi)$ non è definibile $T(p)$ tramite $\widetilde{T}(\frac{\pi}{2})$ o $\widetilde{T}(\frac{3}{2}\pi)$ che sono diversi: quale scegliere?

2 - Anche se C fosse immagine di un cammino f semplice e regolare su un intervallo aperto, mentre può esser sempre definito il versore tangente $\widetilde{T}(t) = \dfrac{f'(t)}{|f'(t)|_m}$, e quindi è definito il versore tangente in termini della posizione in modo univoco $T(p) = \widetilde{T}(f^{-1}(p))$, $p \in Im\ f$, non è detto che T sia una funzione continua di $p \in C$, in quanto non è detto lo sia f^{-1}.
Il fenomeno tipico è quello del sostegno di un cammino che torna su sé, al limite in uno degli estremi dell'intervallo aperto ove è definito, con versori tangenti diversi. Esempio 1 in FT5:
- - $f(t) = \left(te^{-t}, t^2e^{-t}\right)$, $t \in \mathbf{R}$: $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,0) = f(0)$, $\dfrac{f'(t)}{|f'(t)|} \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,-1) \neq \dfrac{f'(0)}{|f'(0)|} = (1,0)$;
in effetti in questo caso la funzione f^{-1} non è continua in $p = (0,0)$, poichè lungo ImF ci può avvicinare a $p = (0,0)$ sia con $p_n = f(\frac{1}{n})$ sia con $q_n = f(n)$. Quindi da una parte $f^{-1}(p_n) = \frac{1}{n} \to 0$, dall'altra $f^{-1}(q_n) = n \to +\infty$.

3- Tale definzione è invece coerente con la prima quando C sia il sostegno di un cammino semplice regolare in senso forte $f : [a; b] \to \mathbf{R}^m$.
- - Nel caso in cui il cammino non sia chiuso, e quindi sia iniettivo, si osserva che, grazie ai corollari del teorema 11 del FT6, $f^{-1} : C \to [a; b] =: I$, la sua inversa, *è continua.*
Quindi l'orientazione data dal verso di percorrenza della parametrizzazione permette di definire un orientazione in senso insiemistico data dal versore tangente come funzone continua del punto sull'immagine e *non tanto* del parametro di percorrenza:

$$T : Im\ f \to S^{m-1}\ ,\quad T(p) = \frac{f'(f^{-1}(p))}{|f'(f^{-1}(p))|_m},\ p \in Im\ f.$$

- - Se poi C è sostegno di cammino semplice chiuso regolare forte, si definisce tale orientazione T con l'inversa della *restrizione* di f ad $(a; b)$, e la si prolunga per continuità in $f(a) = f(b)$.

4- Se C è connesso e ammette un'orientazione ne ammette due: l'una l'opposto dell'altra.

5- Se C ammette un'orientazione ed è fatto da N parti connesse e disgiunte allora ammette 2^N orientazioni: una coppia per ogni componente connessa.

3 Opposto e giustapposizione di cammini

Opposto: se $f : I \to \mathbf{R}^m$ è un cammino, posto $-A = \{t \in \mathbf{R} : -t \in A\}$, si dice che un cammino è **un opposto** di f se è C^0-*equivalente con orientazione* a

$$f^- : -I \to \mathbf{R}^m,\ f^-(t) = f(-t).$$

La classe di equivalenza di tali cammini, o il generico cammino opposto ad f, si indica con

$$\ominus f.$$

<u>Osservazione:</u> - se $I = \mathbf{R} = -I$ un rappresentante canonico di $\ominus f$ è proprio f^-.
- Se $I = [a; b]$ un rappresentante canonico di $\ominus f$ definito sempre su $[a; b]$ è $h(t) = f(b+a-t)$.
- Cammini equivalenti hanno lo stesso opposto.

Giustapposizione o somma di cammini. Dati due cammini $f : I = (a; b] \to \mathbf{R}^m$, e $f_* : J = [a_*; b_*) \to \mathbf{R}^m$ con $f(b) = f_*(a_*)$, posto $A + c = \{x \in \mathbf{R} : x - c \in A\}$, si dice che un cammino è la **giustapposizione** o la somma di f e f_* se è C^0-*equivalente con orientazione* a

$$\widehat{ff_*} : I \cup (J + (b - a_*)) \to \mathbf{R}^m,\ \widehat{ff_*}(t) = \begin{cases} f(t) & t \leq b \\ f_*(t - b + a_*) & t \geq b \end{cases}.$$

La classe di C^0-equivalenza dei cammini somma di f e f_*, o il suo generico elemento, si indica

$$f \oplus f_*.$$

<u>Osservazione:</u> - questa somma di (classi di equivalenza) di cammini è definita solo per coppie di cammini “concatenati”.
- non è commutativa (eventualmente non è definito il cammino con gli “addendi” scambiati. In particolare $a,\ b_*$ potrebbero essere infiniti).
- È però associativa.
In particolare $f \oplus (\ominus f)$, e $(\ominus f) \oplus f$, sono (classi di equivalenza di) cammini chiusi con sostegno eguale a quello di f.
- Due coppie di cammini equivalenti hanno la stessa giustapposizione.

4 Grafici di funzioni di una variabile

<u>Osservazione.</u> Se $\varphi : [\alpha; \beta] \to \mathbf{R}^{m-1}$ è una funzione con derivata continua, allora la funzione grafico $f(t) = (t, \varphi(t)) \in \mathbf{R}^m,\ t \in [\alpha; \beta]$ è un cammino regolare. Localmente vale il viceversa:

Teorema del rango “baby”. Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo, T punto interno di I fissato, e sia $f : I \to \mathbf{R}^m$ un cammino con derivata continua in I per cui $f'(T) \neq 0_{\mathbf{R}^m}$. Allora

vi è $\delta > 0$ per cui $Im_{[T-\delta; T+\delta]} f$ è un grafico rispetto

a qualche segmento su uno degli assi cartesiani.

Dimostrazione: - poichè $f'(T) \neq 0_{\mathbf{R}^m}$ vi è $i \in \{1, \dots, m\}$ per cui $f_i'(T) \neq 0$.
Essendo T interno ad I, ed f_i' una funzione continua, per permanenza del segno, vi è $\delta > 0$ per cui $[T - \delta; T + \delta] \subset I$ e $f_i'(t) \neq 0$ per $|t - T| \leq \delta$.
- Ma allora $f_i : [T - \delta; T + \delta] \to \mathbf{R}$ è invertible su $[T - \delta; T + \delta]$.
Per il teorema del valor intermedio e il teorema di Bolzano-Weiestrass la sua immagine è un intervallo J chiuso e limitato. Si denoti l'inversa $g : J \to [T - \delta; T + \delta]$.
- Si riparametrizza $Im_{[T-\delta; T+\delta]} f$ con il il parametro $\tau = f_i(t)$.

$$\tilde{f}(\tau) = f(g(\tau)) = (f_1(g(\tau)), \dots, \tau, \dots, f_m(g(\tau)))\ ,\quad \tilde{f} : J \to \mathbf{R}^m$$

Concludendo (a meno di permutazioni delle coordinate in $\mathbf{R}^m$) $Im_{[T-\delta; T+\delta]} f$ è il grafico di $\varphi : J \to \mathbf{R}^{m-1}$, $\varphi(\tau) = (f_1(g(\tau)), \dots, f_{i-1}(g(\tau)), f_{i+1}(g(\tau)), \dots f_m(g(\tau)))$.

1-sottovarietà: $S \subseteq \mathbf{R}^m$ si dice sottovarietà C^1 di dimensione 1 se: per ogni $p \in S$ vi è un suo intorno U per cui $S \cap U$ è il grafico di una $\phi : [a; b] \to \mathbf{R}^{m-1}$, C^1.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

Riparametrizzazioni di cammini e di cammini chiusi, equivalenza di cammini, orientazione e cammini C^k, C^k a tratti aperti o chiusi e regolari a tratti.

[FS] cap.4.34,41, 42 pagg.155-164, pag. 190 (Lemma formula (41.1)), pagg.192-194.

[B] cap. VI Teo. VI.43 pag. 301; cap. VII.2,3 Esem. VII.16 pagg.336-337, pagg. 338-342; cap V.1,2,3 pagg.227-239.

[F] cap.2.22 pagg.108-110; cap 3.38 pagg. 176-179; cap. 4.43 pag. 228(Lemma formule (43.13) e (43.14)); cap.6.60 pagg.311-319.