

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.

Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 8

LUNGHEZZA, ASCISSA CURVILINEA,

INTEGRAZIONE NON ORIENTATA E INTEGRAZIONE ORIENTATA

1 Lunghezza, rettificabilità

1.1 Definizione astratta di lunghezza. - Siano (X, d) uno spazio metrico e $f : I \rightarrow X$, $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, una funzione continua. Si dice *lunghezza* del cammino f

$$\begin{aligned} \ell(f) &=: \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})) : k \in \mathbf{N}, t_1 \leq \dots \leq t_k \text{ suddivisione di } I \right\} = \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})) : k \in \mathbf{N}, t_1 < \dots < t_k \text{ suddivisione di } I \right\} \end{aligned}$$

- Se $\ell(f) < +\infty$ si dirà che il cammino è *rettificabile*.

Esempi: 1- se $X = \mathbf{R}$ con la distanza euclidea, $f(t) = t$, $I = [a; b]$ si ha $\ell(f) = b - a$.

2- Analogamente per segmenti parametrizzati in spazi cartesiani $f(t) = Q + tv \in \mathbf{R}^m$, $I = [0; 1]$, di estremi Q e $P = Q + v$ si ha $\ell(f) = |P - Q|_m = \sum d(f(t_i), f(t_{i+1})) = \sum (t_{i+1} - t_i) |v|_m$.

Osservazione: - a livello intuitivo tale nozione *non* corrisponde alla misura dell' *immagine* di f . Piuttosto corrisponde alla misura "della strada fatta" su tale tracciato.

Esempio 3: $X = \mathbf{R}^2$, d la distanza euclidea, $f(t) = (t^2, 0)$, $t \in I = [-1; 1]$: si ha $Im_{[-1; 1]} f = [0; 1] \times \{0\}$ segmento orizzontale di ascissa $y = 0$. L'immagine ha "lunghezza" 1, ma la lunghezza del cammino $\ell(f)$ è 2. Infatti per $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, e $t_3 = 1$ si ha:

$$d(f(t_1), f(t_2)) + d(f(t_2), f(t_3)) = |(-1)^2 - 0^2| + |0^2 - 1^2| = 2 \leq \ell(f);$$

per una suddivisione arbitraria $-1 = t_1 < \dots < t_k = 1$, essendo $f(t_1), \dots, f(t_k)$ allineati si hanno somme telescopiche:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} d(f(t_i), f(t_{i+1})) &= \sum_{i \leq h, t_{i+1} \leq 0} d(f(t_i), f(t_{i+1})) + \sum_{i \geq h+2, t_i \geq 0} d(f(t_i), f(t_{i+1})) = \\ &= ((-1)^2 - t_{h+1}^2) + |t_{h+2}^2 - t_{h+1}^2| + (1^2 - t_{h+2}^2) \leq 2. \end{aligned}$$

Indipendenza dalla parametrizzazione 1. Se $g : J \rightarrow X$ è una riparametrizzazione di $f : I \rightarrow X$, ($g(\tau) = f(\varphi(\tau))$, $\varphi : J \rightarrow I$ deb.mon., cont. e surg.) si ha $\ell(g) = \ell(f)$.

Dimostrazione: una suddivisione $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_k$ di J viene trasformata per monotonia da φ in una suddivisione (eventualmente inversamente ordinata e con più "nodi" uguali)

$t_1 = \varphi(\tau_1), \dots, t_k = \varphi(\tau_k)$ di I . Pertanto $\ell(g) \leq \ell(f)$.

Viceversa data una suddivisione $t_1 < \dots < t_k$ di I per surgettività e monotonia di φ si può scegliere una suddivisione τ_1, \dots, τ_k "stretta" di J per cui $\varphi(\tau_i) = t_i$ e quindi vale $\ell(g) \geq \ell(f)$.

Lunghezza del sostegno: l'indipendenza dalla parametrizzazione permette di definire la lunghezza di un *sottoinsieme* E di X che sia unione numerabile *disgiunta* di *sostegni* di *cammini semplici* f_n , $n \in \mathbf{N}$, indipendentemente da chi siano i cammini:

$$\ell(E) =: \sum_{n \in \mathbf{N}} \ell(f_n).$$

- se $\ell(E) < +\infty$ il sottoinsieme si dirà *1-rettificabile*.

Osservazione: in particolare se E è il sostegno di un cammino f per cui $\{t \in I : \exists s \in I s \neq t f(s) = f(t)\}$ è per esempio finito, è ben definito $\ell(E)$.

1.2 Calcolo della lunghezza per cammini cartesiani. Se $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ è un cammino

C^1 sui tratti I_1, \dots, I_h , si ha:
$$\ell(f) = \int_I |f'(t)|_m dt =: \sum_{j=1}^h \int_{I_j} |f'(t)|_m dt.$$

Osservazione: - Intuitivamente:

- - da una parte i termini $|f'(t)| dt$ (*rapidità* per tempo) possono essere pensati come le “lunghezze infinitesime” degli “spostamenti infinitesimi” $f'(t) dt$ negli intervalli “infinitesimi di tempo” dt (velocità $f'(t)$ per tempo dt);

- - dall'altra i termini $d(f(t_i), f(t_{i+1}))$ le lunghezze degli “elementi discreti” di spostamento. Passando all'estremo superiore delle somme dei secondi si otterrebbe l'integrale dei primi.

Dimostrazione. \leq , è diretto: per il teorema fondamentale del calcolo integrale e per la disuguaglianza triangolare si ha per una qualsiasi suddivisione $t_0 < \dots < t_K$:

$$\sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|_m = \sum \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right|_m \leq \int_I |f'(t)|_m dt,$$

Passando all'estremo superiore al variare della suddivisione si ha $\ell(f) \leq \int_I |f'(t)|_m dt$.

\geq : i) si prova su un singolo tratto *limitato e chiuso* ribattezzato esso stesso $I = [a; b]$.

ii) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f(\tau) - f(t) = \int_t^\tau f'(x) dx$, per $t, \tau \in I$;

iii) Si usa l'uniforme continuità di f' su I (Heine-Borel):

dato $\varepsilon > 0$ vi è δ per cui se $|t - \tau| \leq \delta$ allora $|f'(t) - f'(\tau)|_m \leq \varepsilon$,

quindi per $t \leq \theta \leq \tau$ si scrive l'integrale come la derivata per la lunghezza dell'intervallo più un integrale piccolo:

$$f(\tau) - f(t) = \int_t^\tau f'(x) dx = (\tau - t)f'(\theta) + \int_t^\tau (f'(x) - f'(\theta)) dx.$$

iv) Per la disuguaglianza triangolare delle norme in \mathbf{R}^m e quella per gli integrali si ha, per $0 < \tau - t < \varepsilon$, $t \leq \theta \leq \tau$:

$$|f(\tau) - f(t)|_m \geq (\tau - t)|f'(\theta)|_m - \int_t^\tau |f'(x) - f'(\theta)|_m dx \geq (\tau - t)|f'(\theta)|_m - (\tau - t)\varepsilon.$$

v) suddividendo I in sottointervalli lunghi meno di δ di estremi t_0, \dots, t_K per cui

$0 < t_k - t_{k-1} < \delta$, e scegliendo, per Weierstrass, un $t_{k-1} \leq \theta_k \leq t_k$ per cui $|f'(\theta_k)|_m = \max_{[t_{k-1}; t_k]} |f'|_m$, $1 \leq k \leq K$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|_m &\geq \sum_k (t_k - t_{k-1})|f'(\theta_k)|_m - \sum_k (t_k - t_{k-1})\varepsilon = \\ &= \sum_k |t_k - t_{k-1}| |f'(\theta_k)|_m - (b - a)\varepsilon \end{aligned}$$

vi) Per come si sono scelti i θ_k , l'ultimo membro ha come primo addendo una somma superiore di Riemann. Quindi per definizione di integrale per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \ell(f) &\geq \sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|_m \geq \sum_k |t_k - t_{k-1}| |f'(\theta_k)|_m - (b - a)\varepsilon \geq \\ &\geq \int_I |f'(x)|_m dx - (b - a)\varepsilon. \end{aligned}$$

vii) Essendo ε arbitrario, ed indipendenti da esso il primo termine ed il primo addendo dell'ultimo:

$$\ell(f) \geq \int_I |f'(x)|_m dx.$$

Piuttosto utile e più diretto, è mostrare che l'integrale della norma della velocità è indipendente dalla parametrizzazione senza passare per la sua eguaglianza con la lunghezza:

Indipendenza dalla parametrizzazione 2. Se $\varphi : J \rightarrow I$, $t = \varphi(\tau)$, è un cambio di parametrizzazione C^1 a tratti da J ad I , e $g : J \rightarrow \mathbf{R}^m$ è la riparametrizzazione di $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$, anch'essa C^1 a tratti, $g(\tau) = f(\varphi(\tau))$, allora:
$$\int_J |g'(\tau)|_m d\tau = \int_I |f'(t)|_m dt.$$

Dimostrazione: non è che la regola della derivata delle funzioni composte negli intervalli $\subset J$ ove g e φ sono derivabili e il teorema di cambiamento di variabile:

$$\int_H |g'(\tau)|_m d\tau = \int_H |(f \circ \varphi)'(\tau)|_m d\tau = \int_H |f'(\varphi(\tau))|_m |\varphi'(\tau)| d\tau = \int_{\varphi(H)} |f'(t)|_m dt.$$

La tesi si ottiene sommando su tali intervalli H .

Osservazione: - I cammini C^1 a tratti su un segmento chiuso $[a; b]$ sono sempre rettificabili: infatti la norma della derivata è limitata $\sup_{a \leq t \leq b} |f'(t)|_m \leq C < \infty$, e la lunghezza del segmento è finita, per monotonia dell'integrale $\ell(f) \leq C(b - a) < \infty$.

Esempi: 4- Vi sono cammini C^1 su segmenti limitati non chiusi, ovvero non C^1 agli estremi, con lunghezza infinita: $f(t) = (2t, t^2 \sin \frac{1}{t^2})$, $0 < t \leq 1$, $f(0) = (0, 0)$:
$$\ell(f) =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4 + 4t^2 \sin^2 \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t^2} \cos^2 \frac{1}{t^2} - 4 \sin \frac{2}{t^2}} dt \geq \int_0^1 \frac{2}{t} \cos \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{1}{t^2} = s \right] \int_1^{+\infty} \frac{1}{s} |\cos s| ds$$

$$\geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{s} |\cos s| ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2} + k\pi}^{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} \frac{1}{s} |\cos s| ds \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |\cos s| ds \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} = +\infty.$$

5- D'altronde vi sono cammini definiti su illimitati e con lunghezza finita: $f(t) = (\arctan t, 0)$, $t \in \mathbf{R}$, essendo f semplice $\ell(f) = \pi$.

2 Ascissa curvilinea

2.1 Parametro di lunghezza d'arco. Se $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$ è un cammino C^1 a tratti e $t_0 \in I$ si dice *parametro di lunghezza d'arco* o *ascissa curvilinea* da t_0 lungo f , la funzione

$$s(t) = \ell(t) = \int_{t_0}^t |f'(z)|_m dz, \quad t \in I, \quad \ell : I \rightarrow \mathbf{R}.$$

Osservazione: - l'integrale si intende come somma degli integrali sugli intervalli ove f è derivabile con continuità.

- L'immagine di ℓ su I° è l'intervallo $H = \left(- \int_{\inf I}^{t_0} |f'(z)| dz ; \int_{t_0}^{\sup I} |f'(z)| dz \right)$.

- Se f è *regolare a tratti* si ha che $\ell : I \rightarrow \mathbf{R}$ è strettamente crescente essendo la sua derivata (tranne in numero finito di nodi) $\ell'(t) = |f'(t)|_m > 0$. Inoltre $\ell^{-1} : H \rightarrow I$ è anch'essa C^1 a tratti $t(s) =: \ell^{-1}(s)$, $s \in H$.

Definendo $g : H \rightarrow \mathbf{R}^m$, $g(s) = f(\ell^{-1}(s))$, $s \in H$ si ha che g è C^1 a tratti, equivalente a f , ed inoltre è percorsa con rapidità costante: $|g'(s)| = 1$.

- Inoltre:

- - $g(0) = f(t_0)$,

- - se $s > 0$ ($t > t_0$) ed f è (essenzialmente) *semplice* e *non chiusa*, il punto $g(s) \in \mathbf{R}^m$ è il punto sul sostegno di f che si trova a "distanza s lungo il sostegno" da $f(t_0)$ nel senso di percorrenza di f ,

- - se $s < 0$ ($t < t_0$) ed f è (essenzialmente) *semplice* e *non chiusa*, il punto $g(s)$ è il punto sul sostegno di f a "distanza s lungo il sostegno" da $f(t_0)$ nel senso opposto a quello di percorrenza di f .

2.2 Parametrizzazione per lunghezza d'arco. Una curva $f : I \rightarrow \mathbf{R}^m$, C^1 a tratti, si dice *parametrizzata per lunghezza d'arco* se e solo se $|f'(t)|_m = 1$, $t \in I$. Nel caso $\ell(t) = t - t_0$.

2.3 Derivazione rispetto all'ascissa curvilinea. - Nel caso f sia regolare si ha:

$$(\ell^{-1})' = \frac{d\ell^{-1}}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\frac{d\ell}{dt}} = \frac{1}{|f'|_m}.$$

- Data quindi una funzione F definita su $Im f$ ponendo $\tilde{F}(t) = F(f(t))$ e $\tilde{\tilde{F}}(s) = F(f(t(s)))$ si ha, calcolando le funzoni di variabile t in $t(s)$:

$$\frac{d\tilde{\tilde{F}}}{ds} = \frac{d\tilde{F}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|f'|} \frac{d\tilde{F}}{dt}.$$

In breve:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|f'|} \frac{d}{dt}.$$

Iterando si ottiene:

$$\frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{|f'|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|f'|} \frac{d}{dt} \right) = \frac{1}{|f'|^2} \left(- \frac{\langle f' \cdot f'' \rangle}{|f'|^2} \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \right).$$

- Se $g(s) = f(t(s))$, pensando alla classe di equivalenza di curve, si scrive $\frac{df}{ds}$ invece di $\frac{dg}{ds}$.

Un' accortezza in questo caso potrebbe essere quella di denotare $\frac{dg}{ds}$, ovvero $\frac{df}{ds}$, con \dot{f} piuttosto che con f' . Così per le derivate successive si usa \ddot{f} per $\frac{d^2g}{ds^2}$.

2.4 Accelerazione normale.

Analogamente se $T(t)$ è il versore tangente in t , rispetto al parametro di lunghezza d'arco è:

$$T = \frac{1}{|f'(t(s))|} f'(t(s)) = \dot{f},$$

$$\ddot{f} = \dot{T} = \frac{dT}{ds} = \frac{1}{|f'|} T' = \frac{1}{|f'|^2} \left(- \frac{\langle \frac{f'}{|f'|} \cdot f'' \rangle}{|f'|} f' + f'' \right) = \frac{1}{|f'|^2} (f'' - \langle T \cdot f'' \rangle T).$$

Pertanto $\dot{T} \perp T$ cioè $\langle \dot{T} \cdot T \rangle = 0$.

Quindi l'accelerazione normale (centripeta) è $\vec{a}_c = |f'|^2 \frac{dT}{ds} \perp T$.

$$\text{Inoltre } |\dot{T}| = \left\langle \dot{T} \cdot \frac{\dot{T}}{|\dot{T}|} \right\rangle = \frac{1}{|f'|} \left\langle T' \cdot \frac{f'' - \langle T \cdot f'' \rangle T}{|f'' - \langle T \cdot f'' \rangle T|} \right\rangle.$$

- Abbreviando ulteriormente: se F è una funzione definita su Imf , $f = f(t)$, si indicheranno le derivate rispetto a t di $\tilde{F} = F(f(t))$ semplicemente con F' , e le derivate di $\tilde{\tilde{F}} = F(f(t(s)))$, rispetto alla lunghezza d'arco s , semplicemente con \dot{F} . Si ottiene:

$$\dot{F} = \frac{1}{|f'|} F', \quad \ddot{F} = \frac{1}{|f'|^2} \left(- \frac{\langle f' \cdot F'' \rangle}{|f'|^2} f' + F'' \right).$$

2.5 Curvatura: - posto $\kappa(s) = |\dot{T}|_m$, se $\dot{T} \neq \vec{0}$ $N(s) = \frac{1}{\kappa} \dot{T}$, $T_0 = T(0)$, $N_0 = N(0)$, $\kappa_0 = \kappa(0)$.

-Sviluppando secondo Taylor le funzioni componenti rispetto all'ascissa curvilinea a partire da

$$s = 0, f(0) = p_0: \quad f = p_0 + T(0)s + \frac{dT}{ds}(0) \frac{s^2}{2} + o(s^2) = p_0 + sT_0 + s^2 \frac{\kappa_0}{2} N_0 + o(s^2)$$

- si noti che $|f(s) - p_0|_m \leq s$, e che, se $\dot{T}(0) \neq 0$, la curva, a meno di infinitesimi superiori al secondo per $s \rightarrow 0$, giace sul piano Π_0 per p_0 e generato da T_0, N_0 ivi applicati.

- In tale piano le circonferenze, parametrizzate con lunghezza d'arco s , con versore tangente in p_0 , per $s = 0$, eguale a T_0 , sono del tipo

$$\gamma(s) = p_0 + (a - r \cos \frac{s}{r}) N_0 + (b + r \sin \frac{s}{r}) T_0.$$

Si cerca, con la scelta di r, a, b , quella che "meglio approssima" f in p_0 per $s \rightarrow 0$. Facendo lo sviluppo di Taylor, per $s \rightarrow 0$, di f e delle funzioni trigonometriche:

$$\gamma(s) - f(s) = (a - r) N_0 + b T_0 + \left(r \frac{s}{r} - s \right) T_0 + s^2 \left(r \frac{1}{2r^2} - \frac{\kappa_0}{2} \right) N_0 + o(s^2).$$

- Imponendo $\gamma(0) = p_0$ si ha $a = r, b = 0$. Imponendo che il contatto sia di ordine infinitesimo maggiore di s^2 per $s \rightarrow 0$ si ottiene $r = \frac{1}{\kappa_0}$. Per questo si dice:

- κ curvatura, • Π piano osculatore, • $\frac{1}{\kappa}$ raggio di curvatura, • $p_0 + \frac{N}{\kappa}$ centro di curvatura.

3 Prime nozioni sull'integrazione non orientata lungo cammini

3.1 Integrazione non orientata di funzioni lungo cammini.

Dato un cammino $f : I \rightarrow \mathbf{R}^M$ che sia C^1 a tratti, $F : Im_I F \rightarrow \mathbf{R}^m$, si definisce

$$\int_f F ds = \int_I F(f(t))|f'(t)|_M dt = \left(\int_I F_1(f(t))|f'(t)|_M dt, \dots, \int_I F_m(f(t))|f'(t)|_M dt \right) \in \underline{\mathbf{R}^m},$$

qualora siano ben definiti e convergenti gli integrali dell'ultimo membro.

Osservazione: - intuitivamente F rappresenta una densità per unità di lunghezza di m grandezze scalari.

- Se I è chiuso e limitato, f è C^1 a tratti chiusi, ed $F : Im_I f \rightarrow \mathbf{R}^m$ è continua (con la distanza euclidea di \mathbf{R}^m su ImF), l'integrale è sempre ben definito.

3.2 Medie e baricentro. - Se poi f è (essenzialmente) semplice, la media su un cammino rettificabile f , rispetto alla lunghezza, di tali grandezze, (F_1, \dots, F_m) , è data

$$\frac{1}{\ell(f)} \int_f F ds.$$

- Tipico esempio di media, rispetto però ad una distribuzione di massa $\rho > 0$ sul sostegno di un cammino semplice, ($M = m$, $F(x) = x\rho(x)$ cioè $F_i(x_1, \dots, x_m) = x_i\rho(x)$), sono le coordinate del baricentro:

$$\left(\frac{1}{\int_f \rho ds} \int_f x_1 \rho ds, \dots, \frac{1}{\int_f \rho ds} \int_f x_m \rho ds \right)$$

Direttamente dalla definizione e dalle proprietà dell'integrale si ha:

Teorema 1.

- *Indipendenza dalla parametrizzazione:* se g è una riparametrizzazione di f si ha

$$\int_g F ds = \int_f F ds.$$

- *Indipendenza dall'orientazione:* in particolare $\int_{\ominus f} F ds = \int_f F ds$.

- *Additività sui domini:* qualora siano definiti $\int_{f \oplus f_*} F ds = \int_f F ds + \int_{f_*} F ds$.

3.3 Integrazione non orientata su insiemi. Nel caso in cui:

- E sia un'unione numerabile disgiunta di sostegni di cammini semplici f_n , $n \in N$,

- lungo i quali F abbia integrale,

- e qualora la serie $\sum \int_{f_n} F ds$ converga in \mathbf{R}^m ,

il suo limite sarà detto integrale di F su E ed indicato con $\int_E F ds$.

4 Prime nozioni sull'integrazione orientata lungo cammini

4.1 Integrazione orientata lungo cammini. Dato un cammino $f : I \rightarrow \mathbf{R}^M$ che sia C^1 a tratti, $V : Im_I f \rightarrow \mathbf{R}^M$, si definisce

$$\int_f V = \int_I \langle V(f(t)) \cdot f'(t) \rangle dt = \int_I (V_1(f(t))f'_1(t) + \dots + V_M(f(t))f'_M(t)) dt \in \underline{\mathbf{R}},$$

qualora sia ben definito e convergente l'integrale dell'ultimo membro.

Osservazione: - intuitivamente $\int_f V$ rappresenta il lavoro del campo di forze V su un moto f .

Per questo motivo l'integrazione ora definita si dice anche *lavoro* di V lungo un cammino f .

- Quindi concettualmente c'è gran differenza tra la nozione che ora introdotta e quella data di integrale non orientato lungo una curva, anche se per definirlo ci si riconduce a quest'altra nozione. In effetti:

- - per prima cosa questa nozione di integrazione orientata è data solo per funzioni a valori *nello stesso spazio ambiente* \mathbf{R}^M in cui prende valori la curva (anzi a valori nello retta tangente alla curva in un dato istante t : $V(f(t)) \in T_{f(t)} Im f$, vedi ultima osservazione);

- - inoltre tale integrale dà sempre come risultato un *un numero reale*, pur integrando una funzione a valori in \mathbf{R}^M .

Osservazione: se I è chiuso e limitato, il cammino è C^1 a tratti chiusi, ed $V : Im_I f \rightarrow \mathbf{R}^M$ è continua (con la distanza euclidea di \mathbf{R}^M su $Im F$), l'integrale è sempre ben definito.

Osservazione: - Se il cammino è semplice e regolare, quindi con inversa continua, e si sostituisce a $V(p)$ la sua *proiezione ortogonale sulla retta tangente* alla curva in $p = f(t)$, cioè $W(p) = \langle V(p) \cdot \frac{f'(f^{-1}(p))}{|f'(f^{-1}(p))|} \rangle$, il risultato non cambia.

- Quindi in tal caso ci si riduce solo ad integrare *vettori tangenti* alla curva: cioè W è un *campo vettoriale* sulle sostegno della curva.

- Inoltre per un cammino semplice regolare f detto $T(p)$ il versore tangente nel punto p del sostegno:

$$\int_f V = \int_f \langle V \cdot T \rangle ds.$$

Teorema 2. - *Dipendenza dall'orientazione.* - Se g è una riparametrizzazione di f con *egual orientazione* allora $\int_g V = \int_f V$.

- Se g è una riparametrizzazione di f con *orientazione opposta* $\int_g V = - \int_f V$,

in particolare $\int_{\ominus f} V = - \int_f V$.

- *Additività sui domini:* qualora siano definiti $\int_{f \oplus f_*} V = \int_f V ds + \int_{f_*} V$.

4.2 Integrazione orientata su insiemi orientati. Se $E \subseteq \mathbf{R}^m$ e $T : E \rightarrow S^{m-1}$ continua, è una sua orientazione (FT7-2.2), si definisce $\int_{E,T} V$ come $\int_E \langle V \cdot T \rangle ds$ se quest'ultimo è ben definito (FT8-3.3).

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

LUNGHEZZA DI CAMMINI, INTEGRALI SU CAMMINI.

Lunghezza e parametro di lunghezza d'arco:

[FS] pagg. 164-171, 190-195;

[B] pagg. 239-242;

[F] pagg. 319-325.

Coordinate polari e sferiche:

[FS] pagg. 160-167;

[B] pagg. 261-264;

[F] pagg. 316, 317, 323, 400, 401, 516-519.

Integrazione su cammini:

[FS] pagg. 171-177, 193-195;

[B] pagg. 512-522;

[F] pagg. 325-329, 347-354.

CURVATURA SCALARE, NORMALE PRINCIPALE, ACCELERAZIONE CENTRIPETA.

[B] pagg. 242-245, 264-265;

[F] pagg. 329-334, 338-342.