Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 5

DIFFERENZIALE, PIANI TANGENTI E NORMALI, REGOLA DELLA CATENA

(FT10, FT11

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n.1 a- Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni nei punti $(2,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,3)$ rispetto ad ognuna delle variabili:

$$e^{x^4y^2z} - xz\sin(xy) - 1;\quad \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2};\quad \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2};\quad (x^2+z^2)\log(x^2+y^2);\quad \frac{x\sin zy}{200+zy\sin x};\quad \frac{x^2y^2}{x^2+y^4+1}.$$

b- Calcolare quindi le funzioni derivate rispetto alla prima variabile delle stesse funzioni.

ESERCIZIO n. 2 Si scriva la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni: $x+2y+3z$; $(x+2y+3z,-x)$; $(x+2y+3z, x^2-y^3+z^4)$; $(e^{x+y+z+w}, \sin(x+\log(1+y^2+w^6)-z), xyzw)$.

ESERCIZIO n. 3 Si studino la continuità, la derivabilità nelle diverse direzioni, e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|};\quad \sqrt{|x|}\cos y;\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases};\quad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases};$$

$\int_0^y f(t,x)dt$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$;

ESERCIZIO n. 4 • a- Si determini il piano normale in $(1,1,2)$ all'insieme definito da $xyz=2$, $xy+xz+yz=5$.

b- Si calcoli il piano tangente al grafico della funzione $\mathrm{artan}(x+2y)$ nel punto $(1,0,\frac{\pi}{4})$.

c- Si dica se la funzione $f(x,y)=(x^2)^{y^2+1}$ è differenziabile in $(0,0)$ e nel caso se ne calcoli il differenziale.

d- Si calcoli il piano tangente all'immagine della funzione $F(u,v)=(u-v,uv,u+v)$ nel suo punto $F(1,1)=(0,1,2)$.

e- Se la funzione $e^{x+y}+\sqrt{1-\cos xy}$ è differenziabile in $(0,0)$ si calcoli $\nabla f(0,0)$.

f- Si calcoli un versore normale al grafico di $\cos(x+y)-\tan(x+y)\sin xy$ nel punto $(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi},1)$

ESERCIZIO n. 5 - Si trovi l'angolo di incidenza in $(1,1)$ tra le due curve $y=x$, $y=x^2$.

- Si trovi la tangente nel punto $(1,1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7+y^7-2=0$

- Si calcolino seno e coseno dell'angolo di incidenza in $(1,1)$ tra le due curve (x^3,x^7), (x^5,x^9).

- Trovare una normale in $(1,1,2)$ al sostegno di $(u,v)\mapsto(v\cos u, v\sin u, v^2)$, $v>0$.

• - Si trovino le tangenti nel punto $(0,0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$.

- Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1,1,1)$ e raggio 1 in $(1,\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2})$.

- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x,y,z): \ \log(x^2+y^2+e)=e^z\}$ in $(0,0,1)$.

- Si trovi il tangente nel punto $(1,1,-1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7+2y^7+z^7-2=0$ e $x^5+2y^5+z^3-2=0$

• - Si trovino le tangenti nel punto $(0,0,0)$ dell'insieme definito da $(x^2+y^2+z^2)^2=2(x^2-y^2-z^2)$ e $x-y^2-z^2=0$.

- Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x,y,z): \ 2x^4+3y^3-4z^2=-4\}$, $\{(x,y,z): \ 1+x^2+y^2=z^2\}$, $(0,0,1)$;
$\{(x,y,z): x^2+y^2=e^z\}$, $\{(x,y,z): x^2+z^2=e^y\}$, $(1,0,0)$;
$\{(x,y,z): \ xy=z \ \}$, $\{(x,y,z): \ \cos(2\pi xy)=z\}$, $(1,1,1)$.

ESERCIZIO n. 6 Si disegnino le curve $2y^2-x(x-1)^2=0$ e • $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$, • x^3+y^3-3axy , $a>0$.

ESERCIZIO n. 7 Sia $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. a - Si provi che f è continua su $\mathbf{R}$.

b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f.
• c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x=0$.
d- Si studi se le funzioni $f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2}{x}\ e^{-\frac{y^2}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$; $f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2}{x^3}\ e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.
hanno derivate parziali in ogni punto e si studi la differenziabilità in $(0,0)$.

ESERCIZIO n. 8 Sia $f:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia x_0 tale che $\nabla f(x_0)\neq 0$. Dimostrare che la direzione u rispetto a cui:
$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_0}=\max\left\{\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{x_0}: \ v\in\mathbf{R}^n, \|v\|=1\right\}$ è data da $u=\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.

ESERCIZIO n. 9 - Per la curva in $\mathbf{R}^3$ $t\mapsto(\cos t,\sin t,t)$, $0\leq t\leq 2\pi$ la tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi
• - Si mostri che in una curva piana differenziabile ogni corda ha una direzione tangente parallela (si usi opportunamente il determinante e il teorema di Rolle).

• ESERCIZIO n. 10 Sia $f\in C^1(A)$, con A aperto. Dimostrare che f é positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx)=t^\alpha f(x)$ per ogni $x\in A$) se e solo se $\alpha f(x)=\sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x)$.

ESERCIZIO n. 11 Dato $C\subseteq\mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x,y) \ = \ \inf_{(a,b)\in C}\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C é differenziabile:

(a) $C = \{(0,0)\}$; (b) $C = \{(-1,0),(0,1)\}$; • (c) $C = \{(-1,0)\} \cup \{(1,b) : b \in \mathbf{R}\}$; • (d) $C = \{(-1,0)\} \cup \{(a,b) : (a+1)^2 + b^2 = 1\}$.

ESERCIZIO n. 12 Si consideri la funzione $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Si provi che non è due volte differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO n. 13 Sia $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Verificare che: $(F_\rho(\rho,\varphi))^2 + \frac{1}{\rho^2}(F_\varphi(\rho,\varphi))^2 = (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2$ dove $x = \rho\cos\varphi$ e $y = \rho\sin\varphi$.

- Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(R,\varphi,\theta) = f(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$. Si calcolino le derivate di F in funzione di quelle di f.

- Sia $g : [0;+\infty[\mapsto \mathbf{R}$ derivabile e sia $f(x,y,z) =: g(x^2+y^2+z^2)$. Si provi che $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ è differenziabile e si calcoli il gradiente di f esprimendolo in coordinate cartesiane e in coordinate sferiche.

ESERCIZIO n. 14 Data una funzione differenziabile due volte $f(x,y)$ sia $g = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Considerando il cambio di coordinate $(u,v) = (x, \frac{x}{\sqrt{y}})$, si esprima $g(x,y)$ in funzione di u e v e delle derivate "di f" rispetto alle variabili (u,v).

ESERCIZIO n. 15 Sia $T : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ una rotazione, cioè una applicazione lineare del tipo $x \mapsto Rx$, con $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Detto $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dimostrare che: $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$ per ogni $u \in C^2$.

ESERCIZIO n.16 Si esprima $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ rispetto alle coordinate polari.

ESERCIZIO n. 17 Si identifichi lo spazio M delle matrici $n \times n$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, ordinando in modo lessicografico gli elementi delle matrici.

a) Si verifichi che con questa identificazione il prodotto scalare tra due matrici A e B come elementi di $\mathbf{R}^{n^2}$ è dato da $trA \cdot {}^tB$ (ove $\cdot$ indica il prodotto righe per colonne, ${}^tB$ la matrice trasposta di B, e trC la traccia di una matrice quadrata C).

b) Sia $t \mapsto A(t)$ una funzione regolare da $]-1;1[$ in M tale che $A(0) = A$ e $A'(0) = I$, ove I è la matrice dell'identità. Si trovi lo sviluppo di Taylor del primo ordine di $A(t)$ in $t = 0$.

• c) Se $\Sigma = \{detA = 1\}$, i vettori $X \in M$ tangenti ad $A \in \Sigma$ sono quelli per cui $tr\ A^{-1} \cdot {}^tX = 0$.

• d) Sia $f : \mathbf{M} \to \mathbf{R}$, $f(A) = \det A$. Si dimostri se $f(A) \neq 0$: $\nabla f(A) = (\det A)\ {}^tA^{-1}$

e) Si consideri la funzione $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \det A$. Si dimostri che :
$d_A f[H] = tr({}^t cofA \cdot H)$

ove $(-1)^{i+j}(cofA)_{i,j}$ = determinante del minore di A ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-sima colonna.

ESERCIZIO n. 18 Si provi che $(\varphi, z) \mapsto (R\cos\frac{\varphi}{R}, R\sin\frac{\varphi}{R}, z)$ conserva i prodotti scalari tra le velocità di cammini (e quindi l'angolo e il modulo).

• ESERCIZIO n. 19 a- Si provi che una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a valori in $\mathbf{R}^2$ o in $\mathbf{R}^3$ conserva gli angoli tra vettori se e solo se i trasformati della base canonica sono ortogonali e di egual lunghezza.
b- Si deduca che una trasformazione differenziabile f tra due aperti del piano conserva gli angoli tra i vettori tangenti di curve incidenti in un punto P se e solo se $D_p f$ conserva gli angoli tra vettori.

NOTA: Ad una funzione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ del tipo $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ si associa la funzione $\tilde{F}$ da $\mathbf{C}$ in se: $z = x + iy$, $\tilde{F}(z) = f(x, y) + ig(x, y)$.
Tra le funzioni con derivate parziali vi sono quelle che ammettono derivata in senso complesso $\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbf{C}} \frac{F(z+h)-F(z)}{h}$.

ESERCIZIO n. 20 a- Si provi che le funzioni F differenziabili per cui $\tilde{F}$ ha derivata in senso complesso sono tutte e sole quelle per cui $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$.
• b- Tra le funzioni da $\mathbf{R}^2$ in se che ammettono derivate parziali continue le uniche che conservano gli angoli tra due curve sono quelle derivabili in senso complesso.

• ESERCIZIO n. 21.1 Si mostri che se $t \mapsto s(t) \in]-1, 1[$ è una funzione derivabile strettamente crescente, $(\varphi, t) \mapsto (\sqrt{1 - s^2(t)}\cos\varphi, \sqrt{1 - s^2(t)}\sin\varphi, s(t))$ è una parametrizzazione della sfera che conserva gli angoli tra curve se e solo se $s'(t) = 1 - s^2(t)$
- Imponendo che $s(0) = 0$ si provi che $s(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.
- Esprimere la coordinata t così determinata (di Mercatore) con la "latitudine" θ.

• ESERCIZIO n. 21.2 - Si provi che $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2rx}{r-z}, \frac{2ry}{r-z}\right)$ ristretta alla sfera di centro l'origine e raggio r è la proiezione stereografica dal "polo nord" sul tangente per il "polo sud".
- Se ne scriva l'inversa $(u, v) \mapsto (a(u, v).b(u, v).c(u.v))$
• - Si provi in modo sintetico che conserva gli angoli.

• ESERCIZIO n. 21.3 Si esprimano le coordinate della proiezione stereografica (u, v) in funzione di quelle di Mercatore. Si deduca quindi che la proiezione stereografica mantiene gli angoli tra curve e viceversa.
- Utilizzando longitudine e latitudine si provi che la proiezione stereografica conserva gli angoli.
