Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 12

TEOREMI DI INVERTIBILITÀ LOCALE, DELLE FUNZIONI IMPLICITE E DEL RANGO

Poichè è di interesse determinare chi siano gli spazi tangenti a sottoinsiemi di $\mathbf{R}^M$, e nella pratica tali sottoinisiemi o sono definiti come luoghi di zeri o come immagini di funzioni, è importante sapere in quali ipotesi un tale sottoinsieme sia, nell'intorno di un suo punto, il grafico di una funzione.

Il *teorema delle funzioni implicite* dà condizioni sufficienti per asserire che la giacitura del *tangente in punto p al luogo di zeri di una funzione* $f : A \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$, $M \leq N$, è il *luogo di zeri del differenziale* della funzione in quel punto: $KerD_pf$.

Il *teorema del rango* dà condizioni sufficienti per asserire che la giacitura del *tangente in punto* $f(p)$ *all'immagine di una funzione* $f : A \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$, $M \geq N$ (o meglio di una sua restizione) è l' *immagine del differenziale* della funzione in p: ImD_pf.

Se $M = N$ un versione più dettagliata del teorema del rango è il *teorema di invertibilità locale* che dà condizioni sufficienti affinchè una restrizione della funzione f sia un *diffeomorfismo tra aperti* di $\mathbf{R}^M$ (invertibile con inversa differenzabile).

Vari sono gli approcci dimostrativi essendo i tre teoremi deducibili uno dall'altro.
In questo capitolo si proverà prima il teorema di invertiibilità locale e da questo si dedurranno il teorema delle funzioni implicite e il teorema del rango. Si potrebbe, per esempio, prima provare il teorema delle funzioni implicite e dedurre quelli del rango.

1 Il teorema di invertibiltà locale

Il teorema di invertibilità locale può essere provato grazie al teorema delle contrazioni, cfr. FT9 teorema 4.

Si ricorda, FT1-1, che se $L : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$ è lineare $\|L\| =: \sup_{v\neq 0} \frac{|Lv|_M}{|v|_N}$, ed è una norma.

Lemma 1. $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\leq i\leq k \\ 1\leq j\leq k}}$ invertibile: $$|Lv|_{\mathbf{R^k}} \geq \frac{|v|_{\mathbf{R^k}}}{\|L^{-1}\|}$$

Dim. $$\frac{|v|}{|Lv|} = \frac{|L^{-1}Lv|}{|Lv|} \leq \|L^{-1}\|.$$

Corollario: $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\leq i\leq k \\ 1\leq j\leq k}}$ invertibile: $$|L|_{\mathbf{R^{k^2}}} \geq \|L\| \ \geq \ \frac{1}{\|L^{-1}\|} \ \geq \ \frac{1}{|L^{-1}|_{\mathbf{R^{k^2}}}}.$$

Lemma 2:
1) data $f : A = A^o \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^N$ differenziabile $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\leq i\leq M \\ 1\leq j\leq K}}$ allora $g(x) = f(Lx + v)$ è differenziabile, e $J_xg = J_{g(x)}f\, L$.
2) Se poi f è $C^1(A)$, e se J_pf ha rango massimo vi è un intorno $U \subseteq A$ di p per cui per ogni $x \in U$ anche J_xf ha rango massimo rispetto alla stessa sottomatrice quadrata.

Dimostrazione: 1) è la regola della catena, essendo la Jacobiana di g la matrice costante L.
2) Sia $S(x)$ una sottomatrice quadrata di dimensione massima, cioè $\min\{N, M\}$, di J_xf, per cui $detS(p) \neq 0$. Poichè $detS(x)$ è composizione di un polinomio con meno di MN variabili con le derivate di f, è una funzione continua. Per permanenza del segno si conclude.

Lemma 3: se $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to B \subseteq \mathbf{R}^M$ è differenziabile in q con $J_q f$ invertibile allora

$$|x-q|\left(\frac{1}{\|(J_q f)^{-1}\|} - \frac{o(|x-q|)}{|x-q|}\right) \leq |f(x)-f(q)|_M \ , \quad x \to q$$

Corollario: per $k \in (0;1)$ vi è $\widetilde{r}$ tale che: se $|x-q| \leq \widetilde{r}$ si ha $\frac{|o(|x-q|)|}{|x-q|} \leq \frac{k}{\|(J_q f)^{-1}\|}$, quindi

$$|x-q| \leq \frac{\|(Jf(q))^{-1}\|}{1-k} \cdot |f(x)-f(q)|.$$

Dimostrazione: per differenziabilità $f(x)-f(q) = J_q f(x-q)+\vec{o}(|x-q|)$, per la diseguaglianza triangolare $|f(x)-f(q)|_M \geq |J_q f(x-q)| - |\vec{o}(|x-q|)|$, per il lemma 1 si conclude.

Si propone una dimostrazione del teorema di invertibilità locale direttamente dal teorema delle contrazione, cfr FT9 teorema 4.

Lemma 4, perturbazioni contrattive dell'identità:
sia $f : B \subseteq \mathbf{R}^M = X \to X$, B aperto in X, per cui $g =: (Id_X - f) : B \to X$, $g(x) = x - f(x)$ sia k-Lipschitziana e contrattiva cioè $|g(x)-g(y)|_X \leq k|x-y|_X$ con $0 < k < 1$. Allora
1- f è iniettiva,
2- è un omeomorfismo con la sua immagine, cioè f^{-1} è continua su $\mathrm{Im}_B f$,
3- ha immagine aperta in X, e poichè B è aperto in X, trasforma aperti di X in aperti di X;
più precisamente si prova (tengasi presente il caso $g(x) = kx, \ x \in \mathbf{R} = X$):

2p- $|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)|_X \leq \frac{1}{1-k}|u-v|_X$, $u, \ v \in \ \mathrm{Im}_B f$,

3p - per $\overline{B}(x,r) \subset B$ si ha $f(\overline{B}(x,r)) \supseteq \overline{B}(f(x),(1-k)r)$.

Dimostrazione: 1) $x-y = x-g(x)-(y-g(y))+g(x)-g(y) = f(x)-f(y)+g(x)-g(y)$ per diseguaglianza triangolare $|x-y| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)|+k|x-y|$:

$$(1-k)|x-y| \leq |f(x)-f(y)|.$$

2p) $u = f(x)$, $v = f(y)$, con $x, \ y \in B$ per quanto appena provato, dividendo per $1-k$:

$$|f^{-1}(u)-f^{-1}(v)| \leq \tfrac{1}{1-k}|u-v|.$$

3 p) Dato $u \in \overline{B}(f(x),(1-k)r)$, ovvero $|u-f(x)| \leq (1-k)r$, si tratta di risolvere $\begin{cases} f(z) = u \\ |z-x| \leq r \end{cases}$,
cioè trovare un *punto fisso* di $T_u = T : \overline{B}(x,r) \to X$, $T(z) = z - f(z) + u = g(z) + u$.
Poichè $X = \mathbf{R}^M$ è completo e $\overline{B}(x,r)$, essendo chiuso in X, è *completo*, si cerca di usare il *teorema delle contrazioni*. Va verificato:

- - deve esserci $0 < h < 1$ per cui, se $|z|, \ |y| \leq r$ allora $|T(z)-T(y)| \leq h|z-y|$,
- - T trasforma $\overline{B}(x,r)$ in sè: se $|z-x| \leq r$ allora $|Tz - x| \leq r$.

- - La prima è immediata con $h = k$: $T(z)-T(y) = u+g(z)-u-g(y) = g(z)-g(y)$.
- - Per la seconda:
$|Tz-x| = |u+z-f(z)-x| = |u-f(x)+z-f(z)-(x-f(x))| \leq |u-f(x)|+|g(z)-g(x)|$ (assunzione su u) $\leq (1-k)r + k|z-x|$ (assunzione su z) $\leq (1-k)r+kr = r$.

Teorema 1, di invertibilità locale: Siano $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$, C^K, $K \geq 1$, Ω aperto, $p \in \Omega$. Se la matrice jacobiana $J_p f$ è *invertibile*, cioè di rango massimo, allora vi è un B intorno di p aperto in $\mathbf{R}^M$, $p \in B = B^o \subseteq \Omega$ per cui:

1- la restrizione di f ad B è *iniettiva*,

2- ha *inversa continua*,

3- ha *immagine che è un intorno aperto* A di $f(p)$ in $\mathbf{R}^M$,

4- inoltre l'inversa è *differenziabile* e quindi C^K.

Dimostrazione:
i - Per il lemma 2.1 si può supporre che $J_p f = Id_{M\times M}$. Infatti se il teorema fosse vero in questo caso, lo si applicherebbe a $\psi(x) = (J_p f)^{-1} f(x)$, soddisfacente questa ipotesi. Essendo l' operatore lineare invertibile $J_p f$ un diffeomorfismo, se ψ fosse diffeomorfismo tra due aperti U e V, di $\mathbf{R}^M$, tale sarebbe $f = (J_p f)\psi$ tra i due aperti di $\mathbf{R}^M$, $J_p f(U)$ e $J_p f(V)$ (un operatore lineare invertibile Λ su $\mathbf{R}^M$ manda aperti in aperti, in quanto il suo inverso Λ^{-1} essendo lineare, è continuo).

ii - Per il lemma 2.2 si può supporre, usando l'ipotesi $f \in C^1$, che $D_x f$ sia invertibile per ogni x, restringendo la funzione a $B = B(p, \rho)$ per ρ abbastanza piccolo in modo che per $x \in B$ si ha $det J_x f \neq 0$.

iii - Anzi, sempre per continuità delle derivate parziali, eventualmente prendendo $r < \rho$, si ha che

$$\sup_{x\in B(p,r)} \|J_x f - Id_{M\times M}\| \leq \sup_{x\in B(p,r)} |J_x f - Id_{M\times M}|_{\mathbf{R}^{M^2}} \leq k < 1.$$

iv - Sia quindi $f : B = B(p,r) \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$, C^K, $K \geq 1$, $J_x f$ invertibile per $x \in B$, $J_p f = Id_{M\times M}$, $\sup_{x\in B(p,r)} \|J_x f - Id_{M\times M}\| =: k < 1$.
- - Sia $g(x) = x - f(x)$, $x \in B$, si ha $J_x g = Id_{M\times M} - J_x f$. Quindi per la diseguaglianza del valor medio integrale, cfr. FT11.1, si ha che g è Lipschtziana contrattiva di costante $k < 1$: $|g(u) - g(v)| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \left|J_{u+t(v-u)} g\right|_{\mathbf{R}^{M^2}}$, e se u, $v \in B$ allora per $0 \leq t \leq 1$ anche $u + t(v-u) \in B$
. - - Per il lemma 4 quindi f è un omeomorfismo tra aperti di $\mathbf{R}^M$.
Ciò dimostra 1), 2), 3).
- Per provare 4) si usa il lemma 3:
Per $q \in B$ si prova che f^{-1} è differenziabile in $a = f(q)$, e $J_a f^{-1} = (J_q f)^{-1}$.
Per 3) $A = f(B)$ è aperto e quindi intorno di a; sia $\alpha = f(x) \in A = f(B)$ un suo generico elemento. Per differenziabilità di f in q:

$$\left|f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(a) - (J_q f)^{-1}(\alpha - a)\right| = \left|f^{-1}(\alpha) - q - (J_q f)^{-1}\left[J_q f(f^{-1}(\alpha) - q) + o(|f^{-1}(\alpha) - q|)\right]\right|$$

$$= \left|(J_q f)^{-1}\left[o(|f^{-1}(\alpha) - q|)\right]\right| = \left|(J_q f)^{-1} \frac{o(|f^{-1}(\alpha) - q|)}{|f^{-1}(\alpha) - q|}\right| \cdot |f^{-1}(\alpha) - q|$$

$$= \left|(J_q f)^{-1} \frac{o(|f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(a)|)}{|f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(a)|}\right| \cdot |f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(a)|$$

- - per il lemma 2 in FT11.2 (Cauchy-Schwarz), per continuità ed iniettività di f^{-1} (se $\alpha \to a$ allora $f^{-1}(\alpha) \to f^{-1}(a) = q$) il primo fattore è infinitesimo per $\alpha \to a$;
- - sempre per continuità di f^{-1}, e per il corollario al lemma 3 il secondo fattore diviso $|\alpha - a|$ è invece limitato per $|\alpha - a| \leq \widetilde{r}$, scelto in dipendenza dal $0 \leq k < 1$ sopra scelto:

$$\frac{|f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(a)|}{|\alpha - a|} = \frac{|x - q|}{|f(x) - f(q)|} \leq \frac{1-k}{\|(J_q f)^{-1}\|}.$$

$$\text{Quindi } \frac{\left|f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(a) - (J_q f)^{-1}(\alpha - a)\right|}{|\alpha - a|} \xrightarrow{\alpha\to a} 0.$$

- Se poi f è $C^k(A)$, essendo una bigezione tra l'aperto B e l'aperto $A = f(B)$, si applica il teorema 4 in FT11.2.

2 Teoremi delle funzioni implicite

Prima si enuncia e dimostra il teorema delle funzioni implicte per funzioni di due variabili a valori reali (equazioni non lineari). Quindi lo stesso schema sarà usato per il teorema per funzioni di più varabili a valori vettoriali (sistemi non lineari).

Teorema 2, del Dini 1: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $p = (x^0, y^0) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{(x, y) \in A : f(x, y) - f(p) = 0\}$.

Se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$, cioè $D_p f$ ha rango massimo eguale ad 1, allora:

1-*geometria:*
vi è un intorno U di p: $U \cap L$ è grafico di una *funzione reale* C^K *di una variabile.*
Pertanto si può definire la retta tangente a $U \cap L$ in p che ha equazione (cfr. FT10.2.6)

$$(x - x^0)\frac{\partial f}{\partial x}(p) + (y - y^0)\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0, \text{ ovvero la retta tangente è } p + \mathrm{Ker} D_P f.$$

2-*funzione implicita:* più precisamente, se per esempio $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, vi sono:
intervalli V intorno a x^0, W intorno a y^0, ed una funzione $\phi : V \to W$, per cui si può scegliere $U = V \times W$:

a- $\phi(x^0) = y^0$, b- ϕ è C^K, c- $U \cap L = \text{Graf } \phi$ cioè

$$[x \in V,\ y = \phi(x)] \Leftrightarrow [f(x, y) = f(p),\ (x, y) \in V \times W]$$

d- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ per $(x, y) \in V \times W$, e $\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dx}(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}, & \text{per } x \in V. \\ \phi(x^0) = y^0 \end{cases}$

<u>Osservazione 2:</u> - un modo di vedere il teorema dell Dini ora enunciato è:

data l'equazione in due incognite $(E)\quad f(x, y) = 0$ *se*
si trova una soluzione (x^0, y^0) *di* (E), *per cui l'equazione lineare omogenea*
$$(\Lambda) \quad u\partial_x f(x^0, y^0) + v\partial_y f(x^0, y^0) = 0$$
ha un insieme di soluzioni con 1 *grado di libertà (retta) allora*
(E) *ha infinite soluzioni, e quelle abbastanza vicine a* (x^0, y^0) *hanno* 1 *grado di libertà (curva).*

<u>Osservazione 3:</u> vale la pena sottolineare che la funzione che eventualmente esprime una variabile rispetto all'altra sul luogo di zeri *non è di solito esplicitabile*, non essendolo in generale l'inversa di una funzione (nel caso Ψ). Da cui il nome di tali teoremi.

Dimostrazione: si inizia con una costruzione preliminare: *"raddrizzare"* gli insiemi di livello di f in un intorno di p.
per continuità delle derivate parziali di f, da $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ si ottiene che vi è U'' intorno aperto di p per cui: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in U''$.
- Si definisce $\Psi : U'' \to \mathbf{R}^2$, $\Psi(x, y) = (v, w) = (x, f(x, y))$, si ha $\Psi(p) =: (v^0, w^0) = (x^0, f(p))$.

Inoltre $J\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$, $\det J\Psi(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ per $(x, y) \in U''$.

- Per il teorema di invertibilità locale vi è un intorno aperto U' di p, contenuto in U'', sul quale Ψ è un diffeomorfismo C^K su un intorno aperto B' di $\Psi(p) = (x^0, f(p))$.

- Indicando con $\Phi(v,w) = (\Phi_1(v,w), \Phi_2(v,w)) : B' \to U'$ l'inversa Ψ^{-1} si ha:

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in U' \text{ e } f(x,y) = w \Leftrightarrow & (x, f(x,y)) \in B' \text{ e } f(x,y) = w \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = \Phi_1((x, f(x,y)),\ y = \Phi_2(x, f(x,y)) \text{ e } f(x,y) = w \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow\ y = \Phi_2(x,w) \text{ e } (x,y) \in U'
\end{aligned}
$$

2.i - Si definiscono:
- - $\widetilde{\phi}(x,w) = \Phi_2(x,w) = \langle \Psi^{-1}(x,w) \cdot (0,1) \rangle$, che è C^K essendo composizione di funzioni C^K, per cui $f(x, \widetilde{\phi}(x,w)) = w$
in particolare per $w = f(p)$ si ottiene $\phi(x) = \langle \Psi^{-1}(x, f(p)) \cdot (0,1) \rangle = (\Psi^{-1}(x, f(p))_2$, per cui $f(x, \phi(x)) = f(p)$;
- - $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$ segmenti attorno, rispettivamente, ad x^0 ed a $f(p)$ in modo che $\widetilde{V} \times \widetilde{W} \subseteq B'$;
- - $\widetilde{U} = \Psi^{-1}\left(\widetilde{V} \times \widetilde{W}\right)$.
- - Inoltre:
derivando in x la relazione $f(x, \widetilde{\phi}(x,w)) = w$ con la regola della catena

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \widetilde{\phi}(x,w)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \widetilde{\phi}(x,w)) \frac{d\widetilde{\phi}(x,w)}{dx} = 0 \text{ da cui}$$

$$\frac{d\widetilde{\phi}(x,w)}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \widetilde{\phi}(x,w))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \widetilde{\phi}(x,w))};$$

oppure si ottiene la stessa eguaglianza, usando l'inversa di $J_{(x,w)}\Psi$:

$$\frac{d\widetilde{\phi}(.,w)}{dx}(x) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(x,w) = \frac{\partial (\Psi^{-1})_2}{\partial v}(x,w) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \widetilde{\phi}(x,w))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \widetilde{\phi}(x,w))}.$$

Così al variare di $w \in \widetilde{W}$ le funzioni $x \to \widetilde{\phi}(x,w)$ hanno tutte egual dominio $\widetilde{V}$.
Quindi le porzioni di linee di livello di f in $\widetilde{U}$ sono trasformate da Ψ in segmenti orizzontali congruenti di diversa quota, ed $\widetilde{U} \subseteq A = \mathrm{Dom} f$ <u>è un intragrafico di base $\widetilde{V}$</u>.

2.ii - Se si vuol metter in risalto la natura di grafico locale di
$L = \{(x,y) : f(x,y) = f(p)\}$ in un intorno rettangolare di $p = (x^0, y^0)$ in $\mathrm{Dom} f$, poichè $U' \cap L = \mathrm{Graf}\phi$, è significativo restringere ϕ ad un intervallo V, intorno a x^0, più piccolo.
Si tratta cioè di trovare un intorno rettangolare $U = V \times W$ di p contenuto in U' ($\widetilde{U}$) con V e W intervalli, con x^0, rispettivamente y^0, nel loro interno, tale che

<u>l'immagine di ϕ su tutto V</u> sia interamente contenuto in W.

ovvero $\phi : V \to W$,

ovvero L non esca da $V \times W$ dalle basi del rettangolo $V \times W$.

Per esempio:
- - si parte da un intorno $B \times W$ di p con chiusura contenuta in U' ($\widetilde{U}$), con B e W intervalli aperti;
- - poichè ϕ è continua ed intersezione finita di aperti è aperta, vi è V intervallo con x^0 interno, contenuto in $\phi^{-1}(W) \cap B$, che è aperto.

- Per costruzione di $\phi(x) = \widetilde{\phi}(x, f(p))$ le quattro condizioni sono soddisfatte.

Osservazione 4: - la novità dell'asserto non è nella formula che definisce la retta tangente (cfr. FT 10.2.6), ma *che ci sia una retta tangente*, cioè che "localmente" in un intorno di $p = (x^0, y^0)$ il luogo di zeri L sia il grafico di una funzione regolare.
- Le ipotesi sono necessarie: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $L = \{(x, y) : x^2 = y^2\}$, $p = (0, 0)$: L, unione delle due bisettrici, intersecato ogni intorno di $(0, 0)$ non è grafico rispetto a nessuna retta.
- Può essere che L sia un grafico ma che non siano verificate le ipotesi: $f(x, y) = (y - x)^2$, $L = \{(x, y) :\ y = x\}$, $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2(y-x) \\ 2(y-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se $(x, y) \in L$.
- La"località", cioè solo $L \cap U$ è un grafico, è necessaria come tesi. Il gradiente in p potrebbe essere non nullo ma l'intero L potrebbe non essere un grafico, nè per a x nè per y:
$f(x, y) = \cos x \sin y$, $p = (0; 0)$, $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L = \{(x, y) : \cos x \sin y = 0\}$ è l'unione delle rette $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ e delle rette $y = h\pi$, $h \in \mathbf{Z}$.
- Se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)) \neq 0$ in tutti i punti (x, y) di L allora L è unione di grafici *separati*, uno sopra l'altro. Infatti L non potrebbe collegare due suoi punti, uno sopra l'altro, poichè in un suo altro punto dovrebbe avere tangente verticale. In tale punto di L si dovrebbe annullare $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Se poi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)) \neq 0$ in tutto $\mathbf{R}^2$, per continuità dovrebbe avere segno costante, e quindi fissato x la funzione $g(y) = f(x, y)$ sarebbe strettamente monotona: quindi $f(x, y) = f(x^0, y^0)$ avrebbe al più una soluzione $y(x)$. Pertanto in questo caso tutto L è un unico grafico.
Osservazione 4bis: in 2i si è dimostrato qualchecosa in più:
vi sono intorni $\widetilde{U}$ di p, $\widetilde{V}$ di x^0, $\widetilde{W}$ di $f(p)$, per cui
$\widetilde{\text{a}}$ - $\Psi : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \times \widetilde{W}$, $\Psi(x, y) = (v(x, y), w(x, y)) = (x, f(x, y)))$, è un diffeomorfismo C^K:
$\widetilde{\text{b}}$ - quindi per ogni $(x, y) \in \widetilde{U}$,

$$f(x, y) = w \Leftrightarrow (x, y) \in \widetilde{U},\ y = \langle \Psi^{-1}(x, w) \cdot (0, 1)\rangle =_{def} \widetilde{\phi}(x, w),$$

cioè $\widetilde{U}$ è "fibrato da pezzi di grafici su dominio comune $\widetilde{V}$";

Osservazione 5: - se $\nabla f(p)$ fosse non nullo perchè $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$, si avrebbe simmetricamente che vi è $\psi : W \to V$ per cui $V \times W \cap L = \text{Graf}\psi$, $x = \psi(y)$, e

e- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0$ per $(x, y) \in V \times W$, $x = \psi(y)$, e $\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dy}(y) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\psi(y), y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\psi(y) y)}, & \text{per } y \in W. \\ \psi(y^0) = x^0 \end{cases}$

Per esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$, $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, la circonferenza unitaria di centro $(0, 0)$ e raggio 1. In un intorno ($y > 0$) di $(0, 1)$, L è grafico rispetto a x della funzione $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. In un intorno $(x > 0)$ di $(1, 0)$, è grafico per y di $\psi(y) = \sqrt{1 - y^2}$.
- Se le due derivate parziali in $p \in L$ sono non nulle allora, per continuità, in tutto un rettangolo $V \times W$ intorno a p sono non nulle, ed L intersecato $V \times W$ è grafico rispetto ad entrambe le variabili di $y = \phi$ e $x = \psi$. Per continuità le due derivate parziali, avrebbero segno costante, non annullandosi. Per d) ed e), ϕ e ψ sarebbero srettamente monotone rispettivamente su V e W. Quindi sarebbero iniettive e per c) sarebbero *una l'inversa dell'altra*.

Osservazione 6: se si avesse una derivata direzionale non nulla $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) \neq 0$ si avrebbe che in un intorno di p l'insime L srabbe grafico rispetto le rette ortogonali al vettore v.

<u>Osservazione 7:</u> - è invalso l'uso della notazione $y = y(x)$ per le ϕ, rispettivamente $x = x(y)$ per le ψ. Nell'usarla è bene *tener presente intorno a quale punto* p di L questi è un grafico. Cambiando punto il punto p su L, a parità di potesi, cambieranno, e non solo in dipendenza da $f(p)$, le funzioni con il cui grafico L localmente coincide.

Con tale notazione infatti d) ed e) diventano : $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} \\ y(x^0) = y^0 \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)} \\ x(y^0) = x^0 \end{cases}$

Come osservato, se valessero entrambe $\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dy} = 1$: la relazione tra la derivata di una funzione e quella della sua inversa.

- Si noti poi, che d) ed e) sono dei problemi di Cauchy, ai dati iniziali, per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine non lineari. Da questo punto di vista il teorema del Dini dà, in questi casi particolari, un teorema di esistenza locale ed unicità delle soluzioni.

<u>Osservazione 8:</u> - come sottolineato alla fine della dimostrazion, le formule in d) ed e), per le derivate delle funzioni implicite, si ricavano (e si ricordano) *a posteriori* grazie alla regola della catena, derivando la relazione $f(x,y) = f(p)$ rispettivamente rispetto a x , considerando $y = y(x)$, e rispetto a y, considerando invece $x = x(y)$: $f(x,y) = f(p) \longrightarrow \dfrac{df(x,y(x))}{dx} = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{dy}{dx}(x) = 0$,

$$f(x,y) = f(p) \longrightarrow \frac{df(x(y),y)}{dy} = 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dy}(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

- Nella pratica quindi *conoscendo* $p = (x^0, y^0)$, $\nabla f(x^0, y^0)$, dalle formule d) ed e), ovvero applicando la regola della catena alla relazione $f(x,y) = f(p)$, *si calcolano* le funzioni implicite, e le loro derivate prime, rispettivamente in x^0 e in y^0:

$$\begin{cases} y(x^0) = x^0 \\ \dfrac{dy}{dx}(x^0) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\right)^{-1}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) \end{cases} , \quad \begin{cases} x(y^0) = y^0 \\ \dfrac{dx}{dy}(x^0) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)\right)^{-1}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0) \end{cases}$$

Conoscendo i valori di *tutte le derivate parziali di* f *in* $p = (x^0, y^0)$, si calcolano, iterando le derivazioni della relazione $f(x,y) = f(p)$, ricorsivamente nell'ordine di derivazione, *i valori delle derivate successive* delle funzioni implicite rispettivamente in x^0, in y^0. Per esempio

$$f(x,y) = f(p) \xrightarrow[1]{\frac{d}{dx}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dx}(x) = 0$$

$$2 \Big\downarrow \tfrac{d^2}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{dy}{dx}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\frac{dy}{dx}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\left(\frac{dy}{dx}(x)\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{d^2 y}{dx^2}(x) = 0$$

$$3 \Big\downarrow \text{valutazione in } x^0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x^0) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)\dfrac{dy}{dx}(x^0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)\dfrac{dy}{dx}(x^0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)\left(\dfrac{dy}{dx}(x^0)\right)^2}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)}$$

- Pertanto dato $p = (x^0, y^0)$ si possono calcolare i polinomi di Taylor di ogni ordine delle funzioni implicite, rispettivamente di centro x^0 o y^0. Si esamina un esempio concreto:

Esempio 1: $f(x,y) = xy\sin(x+y) - y$, $p = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Calcolare (in un intorno di p) lo sviluppo di Taylor del secondo ordine centrato in $y^0 = \frac{\pi}{2}$ della funzione implicita $x = x(y)$ ivi definita da $xy\sin(x+y) - y = -\frac{\pi}{2} = f(p)$. Verifica dell' ipotesi: $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = (y\sin(x+y) + xy\cos(x+y))_{x=0,\ y=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin(x+y) + xy\cos(x+y) - 1$ che in p vale -1. Pertanto $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\frac{dx}{dy}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. Si calcolano le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\cos(x+y) + y\cos(x+y) - xy\sin(x+y) \xrightarrow[x^0=0\ y^0=\frac{\pi}{2}]{} 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \sin(x+y) + y\cos(x+y) + x\cos(x+y) - xy\sin(x+y) \xrightarrow[x^0=0\ y^0=\frac{\pi}{2}]{} 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\cos(x+y) + x\cos(x+y) - xy\sin(x+y) \xrightarrow[x^0=0\ y^0=\frac{\pi}{2}]{} 0.$$ Quindi $\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$$\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)\frac{dx}{dy}(\frac{\pi}{2}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)\frac{dx}{dy}(\frac{\pi}{2}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)\left(\frac{dx}{dy}(\frac{\pi}{2})\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x}(p)} = -\frac{8}{\pi^2}.$$

Pertanto essendo la funzione C^∞:

$$\begin{aligned} x(y) &= x(y^0) + x'(y^0)(y-y^0) + \frac{1}{2}x''(y^0)(y-y^0) + O(y-y^0)^3 \ \left[y \to \frac{\pi}{2}\right] = \\ &= 0 + \frac{2}{\pi}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{8}{\pi^2}\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + O\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 \ \left[y \to \frac{\pi}{2}\right] = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + O\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 \ \left[y \to \frac{\pi}{2}\right] = \\ &= -2 + \frac{6}{\pi}y - \frac{4}{\pi^2}y^2 + O\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3, \quad y \to \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Vale la pena almeno enunciare un raffinamento del teorema delle funzioni implicite per un luogo di zeri, di una funzione di due variabili, che permette lo studio nell'intorno di un suo punto ove il *gradiente è nullo (punto critico)*:

Teorema 3 del Dini 1.bis: dati $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $p = (x^0, y^0) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 2$, $L = \{(x,y) \in A : f(x,y) - f(p) = 0\}$.

Se $\nabla f(p) = (0,0)$, ma $\det Hf(p) \neq 0$ si hanno i seguenti due casi:

i- se $Hf(p)$ è strettamente definito (*i.e.* $\det Hf(p) > 0$), vi è un intorno U di p per cui
$$U \cap L = \{p\};$$
ii- se $Hf(p)$ non ha segno definito (*i.e.* $\det Hf(p) < 0$), vi è un intorno U di p per cui

$U \cap L$ è unione di due grafici, passanti per p, di funzioni C^K, le cui rette tangenti in p sono diverse, con equazione data da
$$(x - x^0, y - y^0)Hf(p)\begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix} = 0, \text{ cioè}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x - x^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y - y^0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)(x - x^0)(y - y^0) = 0$$
(conica reale degenere semplice).

Osservazione 9: - per l'ipotesi $f \in C^2$, $Hf(p)$ è una matrice simmetrica (teorema di Schwarz).
- Usando il teorema spettrale (di diagonalizzazione) per matrci simmetriche si ha:
  - - l'ipotesi del primo caso vuol dire che $Hf(p)$ ha autovalori non nulli con stesso segno,
  - - l'ipotesi del secondo caso vuol dire che $Hf(p)$ ha autovalori non nulli con segno opposto.
- Il primo caso geometricamente vuol dire che vicino a p gli altri insiemi di livello di f "girano attorno" a p. In altri termini il grafico di f in $\mathbf{R}^3$ nel punto $(p, f(p))$ ha tangente orizzontale e intersecato $U \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^3$ è del tipo paraboloide: ruotato all'insù ($\mathrm{tr}Hf(p) > 0$, autovalori positivi), o ruotato all'ingiù ($\mathrm{tr}Hf(p) < 0$, autovalori negativi).
- Il secondo caso geometricamente significa che $U \cap L$ in p ha un *cono doppio tangente di vertice* p (le due rette): il cono di nullità della forma quadratica associata alla matrice $Hf(p)$.

Esercizio 1: calcolare le eventuali rette tangenti nel punto $(0,0)$, all'insieme definito dall'equazione $\sin(x^2+y^2) - e^{2x^2-2y^2} + 1 = 0$.

Prima di enunciare e dimostrare il caso generale del teorema del Dini, per funzioni di più variabili a valori vettoriali, (cioè per *sistemi* di equazioni non lineari a *più incognite*, ovvero per intersezioni di insiemi di livello), conviene almeno enunciare il teorema per più variabili ma a valori reali.

Teorema 4 del Dini, 2: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$, $p = (p_1, \dots, p_M) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{x \in A : f(x) - f(p) = 0\}$. Se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$, cioè $D_p f$ ha rango massimo 1:

1-*geometria:* vi è un intorno U di p per cui: $U \cap L$ corrisponde al grafico di una *funzione reale C^K di $(M-1)$ variabili;*

- pertanto si può definire il piano $(M-1)$ dimensionale tangente a $U \cap L$ in p che ha equazione (FT10.2.6)

$$\langle (x-p) \cdot \nabla f(p) \rangle = (x_1 - p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + (x_M - p_M)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = 0,$$

i.e. l'$(M-1)$-piano tangente è $p + \mathrm{Ker} D_p f$.

2-*funzione implicita:* se $\dfrac{\partial f}{\partial x_s}(p) \neq 0$, $1 \leq s \leq M$,posto $\mathbf{t} = (\dots, s-1, s+1, \dots)$ e per $x \in \mathbf{R}^M$: $x_{\mathbf{t}} = (\dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots) \in \mathbf{R}^{M-1}$, vi sono:

V palla centrata in $p_{\mathbf{t}}$, W intervallo centrato in p_s,
ed una $\phi : V \to W$ funzione, per si può scegliere come U il cilindro

$U = \{x \in \mathbf{R}^M : x_{\mathbf{t}} \in W, \ \ x_s \in V\}$ (eventualmente contenuto in $\widetilde{U}$), e valgono:

a- $\phi(p_{\mathbf{t}}) = p_s$, b- ϕ è C^K, c- $U \cap L \sim \mathrm{Graf}\ \phi$ cioè

$$[x_{\mathbf{t}} \in V, \ x_s = \phi(x_{\mathbf{t}})] \Leftrightarrow [f(x) = f(p), \ x \in U]$$

d- $\dfrac{\partial f}{\partial x_s}(x) \neq 0$ per $x \in U$, e per $j \neq s$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_{\mathbf{t}}) = \dfrac{\partial x_s}{\partial x_j}(x_{\mathbf{t}}) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_s}(x)} \\ \phi(p_{\mathbf{t}}) = p_s \qquad\qquad \text{per } x_{\mathbf{t}} \in V, \ x_s = \phi(x_{\mathbf{t}}). \end{cases}$$

<u>Osservazione 10:</u> valgono osservazioni analoghe a quelle al primo teorema ($M = 2$). In particolare:
- la formula delle derivate parziali si può ottenere, derivando parzialmente la relazione $f(p) = f(x)$ e tenendo presente che $x_s = \phi(x_{\mathbf{t}})$ grazie alla regola della catena. Per $j \neq s$: $(*)\quad 0 = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{M} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{M} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f}{\partial x_s}\dfrac{\partial x_s}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f}{\partial x_s}\dfrac{\partial x_s}{\partial x_j}$;
- facendo le derivate parziali successive, sino all'ordine K, rispetto alle variabili x_j, $j \neq s$, della relazione $f(x) = f(p)$ e tenendo presente che $x_s = \phi(x_{\mathbf{t}})$, iterativamente si calcolano in $p_{\mathbf{t}}$ tutte le derivate parziali successive sino all'ordine K rispetto a tali variabili di ϕ:
per esempio derivando il primo e l'ultimo membro di $(*)$ rispetto a x_h, $h \neq s$:
$0 = \dfrac{\partial}{\partial x_h}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f}{\partial x_s}\dfrac{\partial x_s}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_j} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_j}\dfrac{\partial x_s}{\partial x_h} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_s}\dfrac{\partial x_s}{\partial x_j} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_s^2}\dfrac{\partial x_s}{\partial x_h}\dfrac{\partial x_s}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f}{\partial x_s}\dfrac{\partial^2 x_s}{\partial x_h \partial x_j}$
quindi, calcolando in $p_{\mathbf{t}}$ la $x_s = \phi$ e le sue derivate parziali prime già note da $(*)$, e in p le derivate parziali di f, si ottengono i valori in $p_{\mathbf{t}}$ delle derivate parziali seconde di $x_s = \phi$;
- usando gli *svilupppi di Taylor per funzioni di più variabili* si trova un'approssimazione polinomiale della funzione implicita.

<u>Osservazione 10bis:</u> si dimostra di più:
esistono intorni $\widetilde{U}$ di p, $\widetilde{V}$ di $p_{\mathbf{t}}$, $\widetilde{W}$ di $f(p)$, per cui
$\widetilde{\mathrm{a}}$ - $\Psi : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \times \widetilde{W}$, $\Psi(x) = (x_{\mathbf{t}}, f(x))$ è un diffeomorfismo C^K:
$\widetilde{\mathrm{b}}$ -per ogni $x \in \widetilde{U}$, $\qquad f(x) = w \Leftrightarrow x_s = \left(\Psi^{-1}(x_{\mathbf{t}}, w)\right)_s =_{def} \widetilde{\phi}(x_{\mathbf{t}}, w)$.

Per l'enunciato generale conviene adottare le notazioni, introdotte in FT10.2.9,per sottomatrici e sottojacobiane. In breve:

<u>Notazione:</u> - se con $\mathbf{s}$ si denota un k-multindice $(s_1, \ldots, s_k)$, crescente, $1 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq M$, e H è una matrice $m \times M$ con $H^{\mathbf{s}}$ si intende la matrice di colonne $H^{s_1}, \ldots, H^{s_k}$, ovvero $H^{s_1 \ldots s_k}$. Analogo significato avrà $H^{\not{\mathbf{s}}}$ per la sottomatrice rimanente.
- Simili notazioni a pedice H_σ, $H_{\not\sigma}$ si usano per le sottomatrici ottenute selezionando o cancellando righe, o righe e colonne $H_\sigma^{\mathbf{s}}$.
- Quindi con $J^{\mathbf{s}} f(p)$, $J^{s_1 \ldots s_k} f(p)$ e con $\dfrac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(p)$ si intende la matrice $(J_p f)^{\mathbf{s}}$, cioè quella ottenuta selezionando le colonne $s_1 < \cdots < s_k$ dalla matrice jacobiana:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{s_1}}(p) \,|\, \ldots \,|\, \frac{\partial f}{\partial x_{s_k}}(p)\right) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_{s_1 \ldots s_k}}(p) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(p).$$

- Analogamnete con $J_\sigma f(p)$, $J_{\sigma_1 \ldots \sigma_h} f(p)$, $J_p\,(f_\sigma)$ e con $\dfrac{\partial f_\sigma}{\partial x}(p)$ si intende $(J_p f)_\sigma$ ottenuta selezionando le righe:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{\sigma_1}}{\partial x}(p) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_{\sigma_h}}{\partial x}(p) \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_{\sigma_1}, \ldots, f_{\sigma_h})}{\partial x}(p) \;=\; \frac{\partial f_\sigma}{\partial x}(p).$$

- Se H è una matrice con $H[C/H^s]$ e $H[R/H_\sigma]$ si intendono rispettivamente le matrici ottenute da H sostituendo C alla colonna s, ed R alla riga σ.

Teorema 5 del Dini, 3: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $M > m$, $p = (p_1, \dots, p_M) \in A$ aperto, $f \in C^K(A)$, $K \geq 1$, $L = \{x \in A : f(x) - f(p) = 0\}$, ovvero l'insieme delle soluzioni $(x_1, \dots, x_M)$ del sistema $\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_M) = f_1(p_1, \dots, p_M) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_M) = f_m(p_1, \dots, p_M) \end{cases}$.

Se $Jf(p)$, ha rango massimo m, *i.e.* $\det Jf(p)\, {}^t Jf(p) = \det Jf(p) \nabla f(p) > 0$:

1-*geometria:* vi è un intorno aperto U di p per cui $U \cap L$ corrisponde al grafico di una *funzione* C^K *di* $(M - m)$ *variabili a valori in* $\mathbf{R}^m$;

- pertanto si può definire il piano $(M-m)$ dimensionale tangente a $U \cap L$ in p che ha equazioni

$$(x_1 - p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^m}, \text{ più esplicitamente}$$

$$\begin{cases} (x_1 - p_1)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) & = 0 \\ \vdots & \vdots, \\ (x_1 - p_1)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_M - p_M)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) & = 0 \end{cases} \quad \text{l'}(M - m)\text{-piano tangente è } p + \mathrm{Ker} D_p f.$$

2-*funzioni implicite:* in particolare

dati $\mathbf{s} = s_1 < \dots < s_m$, $\mathbf{t} = t_1 < \dots < t_{M-m}$, con $\{s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_{M-m}\} = \{1, \dots, M\}$, si pone per $x \in \mathbf{R}^M$: $x_\mathbf{s} = (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) \in \mathbf{R}^m$, $x_\mathbf{t} = (x_{t_1} \dots, x_{t_{M-m}}) \in \mathbf{R}^{M-m}$.

- Se $\det \dfrac{\partial f}{\partial x_\mathbf{s}}(p) \neq 0$, ovvero $J^\mathbf{s} f(p)$ è invertibile, esistono:

una palla V in $\mathbf{R}^{M-m}$ centrata in $p_\mathbf{t}$, una palla W in $\mathbf{R}^m$ centrata in $p_\mathbf{s}$, e una funzione $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : V \to W$, per cui si possa scegliere come intorno U di p l'insieme $\{x \in A : x_\mathbf{t} \in V, x_\mathbf{s} \in W\}$, ottenendo:

a - $\phi(p_\mathbf{t}) = p_\mathbf{s}$, **b** - ϕ è C^K **c** - $U \cap L \sim$ Graf ϕ: cioè $[x_\mathbf{t} \in V,\ x_\mathbf{s} = \phi(x_\mathbf{t})] \Leftrightarrow [f(x) = f(p),\ x \in U]$

d - $\det \dfrac{\partial f}{\partial x_\mathbf{s}}(x) \neq 0$ per $x \in U$, ovvero $J^\mathbf{s} f(x)$ è invertibile, e per $1 \leq j \leq M - m$ la ϕ soddisfa il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_{t_j}}(x_\mathbf{t}) = \dfrac{\partial x_\mathbf{s}}{\partial x_{t_j}}(x_\mathbf{t}) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_\mathbf{s}}(x)\right)^{-1} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \\ \phi(p_\mathbf{t}) = p_s \qquad \text{per } x_\mathbf{t} \in V,\ x_\mathbf{s} = \phi(x_\mathbf{t}). \end{cases}$

Cioè $J\phi(x_\mathbf{t}) = \dfrac{\partial x_\mathbf{s}}{\partial x_\mathbf{t}}(x_\mathbf{t}) = -\left[J^\mathbf{s} f(x)\right]^{-1} J^\mathbf{t} f(x) = -\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_\mathbf{s}}(x)\right]^{-1} \dfrac{\partial f}{\partial x_\mathbf{t}}(x), \quad x \in U,\ x_\mathbf{s} = \phi(x_\mathbf{t}).$

Per Cramer: $\quad \dfrac{\partial \phi_{s_i}}{\partial x_{t_j}}(x_\mathbf{t}) = \dfrac{\partial x_{s_i}}{\partial x_{t_j}}(x_\mathbf{t}) = -\dfrac{\det J^\mathbf{s} f(x) \left[\frac{\partial f}{\partial x_{t_j}}(x) \,/\, \frac{\partial f}{\partial x_{s_i}}(x)\right]}{\det\, J^\mathbf{s} f(x)}$, $x_\mathbf{t} \in W,\ x_\mathbf{s} = \phi(x_\mathbf{t})$.

Osservazione 11: - come nell'osservazione 2 al teorema 2, il primo delle funzioni implicite, un'interpretazione è la seguente:

si considerino i sistemi $(E)\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_M) = q_1 \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_M) = q_m \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1(p_1,\ldots,p_M) = q_1 \\ \vdots \\ f_m(p_1,\ldots,p_M) = q_m \end{cases}$

$$(\Lambda)\begin{cases} u_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)+\cdots+u_M\dfrac{\partial f_1}{\partial x_M}(p)=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_1\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)+\cdots+u_M\dfrac{\partial f_m}{\partial x_M}(p)=0 \end{cases} \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)\ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)\ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix} = m,$$

- - *se il sistema non lineare* (E)*, in* m *equazioni ed* $M > m$ *incognite, ha una soluzione* p*,*
- - *se il sistema lineare omogeneo* (Λ)*, associato mediante la matrice jacobiana in* p*, ha rango massimo* m*, cioè ha uno spazio di soluzioni con* $M - m$ *gradi di libertà* *(*$(M - m)$*-sottspazio),*
- - *allora,* vicino a p *il sistema* (E) *ha anch'esso infnite soluzioni con* $M - m$ *gradi di libertà (*$(M - m)$*-varietà),*

- cioè vi è un $r > 0$ per cui:
le soluzioni di (E) tali che dist(x,p) $< r$ sono descritte da $M - m$ parametri indipendenti.

Dimostrazione: si segue lo schema usato nel primo teorema delle funzioni implicite: invece di dividere per la derivata parziale non nulla si moltiplica a sinistra per l'inversa della sotto-jacobiana invertibile.

- Costruzione preliminare: si applica il teorema di invertibilità locale, in p, a
$$\Psi : A \to \mathbf{R}^{M-m}\times\mathbf{R}^m \sim \mathbf{R}^M, \Psi(x) = (x_{\mathbf{t}}, f(x))\,,\ u = x_t,\ v = f(x).$$
Per verificare che $J_p\Psi$ è invertibile
- - *ci si riduce al caso* $t_1 = 1,\ldots,t_{M-m} = M-m, s_1 = M-m+1,\ldots,s_m = M$.

Infatti si considera la permutazione delle coordinate in $\mathbf{R}^M$, definita da $Le_h = e_{\mathbf{t}_h}$, $1 \le h \le M-m$, $Le_{M-m+k} = e_{\mathbf{s}_k}$, $1 \le k \le m$. Tale endomorfismo L è invertibile.
Sia q tale che $Lq = p$, cioè $q_h = p_{t_h}$, $q_{M-m+k} = p_{s_k}$.
Si ha $x = L(x_{\mathbf{t}}, x_{\mathbf{s}})$ per cui $\Psi(Ly) = (y_1,\ldots,y_{M-m}, f(Ly))$. Posto $F(y) = \Psi(Ly)$, poichè $J_yL = L$ costantemente, si ha $J_qF = J_p\Psi\cdot L$: quindi basta verificare che $J_{L^{-1}p}F$ è invertibile:
$$F(y) \ = \ ((y_1,\ldots,y_{M-m}),(f_1(Ly),\ldots,f_m(Ly))),$$
la matrice Jacobiana di F si scrive agevolemente a blocchi $(y_1,\ldots,y_{M-m},\, y_{M-m+1},\ldots,y_M)$:
$$J_qF \ = \ \left(\begin{array}{c|c} Id_{(M-m)\times(M-m)} & \mathbf{0}_{(M-m)\times m} \\ \hline (J_qf{\circ}L)^{1,\ldots,M-m} & (J_qf{\circ}L)^{M-m+1,\ldots,M} \end{array}\right).$$
Poichè per la regola della catena e per definzione di prodotto prodotto righe per colonne:
$$(J_{L^{-1}p}f{\circ}L)^{M-m+1,\ldots,M} = J_pf\left[L^{M-m+1,\ldots,M}\right],$$
poichè le ultime colonne di L sono i vettori della base canonica $e_{s_1},\ldots,e_{s_m}$ si ha:
$$(J_{L^{-1}p}f{\circ}L)^{M-m+1,\ldots,M} \ = \ \frac{\partial f}{\partial x_{s_1}\ldots x_{s_m}}(p) \text{ per ipotesi invertibile.}$$
Si è nel caso di matrici "tringolari a blocchi" $\mathcal{N} \ = \ \left(\begin{array}{c|c} Id_{(M-m)\times(M-m)} & \mathbf{0}_{(M-m)\times m} \\ \hline A & B_{m\times m} \end{array}\right)$,
con B invertibile. Queste matrici sono invertibili poichè $det\mathcal{N} = detId_{(M-m)\times(M-m)}detB \neq 0$.

- - Per invertibilità locale vi è un intorno U' aperto, in $\mathbf{R}^M$, di p per cui Ψ ristretta ad U' è un diffeomorfismo C^K, con immagine aperta in $\mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m$, ed ivi $\det J_x \Psi \neq 0$, $\det \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \neq 0$.
2-i-$\widetilde{\text{a}}$: per esempio si possono scegliere:
- - $\widetilde{V}$ palla aperta in $\mathbf{R}^{M-m}$ di centro $p_{\mathbf{t}}$, e $\widetilde{W}$ palla aperta in $\mathbf{R}^m$ di centro $f(p)$ in modo che $\widetilde{V} \times \widetilde{W} \subseteq \Psi(U')$, e quindi porre $\widetilde{U} = \Psi^{-1}\left(\widetilde{V} \times \widetilde{W}\right)$.
2-i-$\widetilde{\text{b}}$: - - per $(z, w) \in \Psi(U')$, in particolare per $(z, w) \in \widetilde{V} \times \widetilde{W}$, si definscono le funzioni

$$\widetilde{\phi}(z, w) =: \left(\Psi^{-1}(z, w)\right)_{\mathbf{s}} \in \mathbf{R}^m.$$

Esse sono C^K. Per $w \in \widetilde{W}$ le funzioni $x \mapsto \widetilde{\phi}(x, w)$ hano tutte egual dominio $\widetilde{V}$, e Ψ trasforma $\{x \in \widetilde{U} : f(x) = w\}$ in palle $M - m$ dimensionali di $\mathbf{R}^M$ di "quota" w.
Quindi $\widetilde{U}$ è un intragrafico su $\widetilde{V}$, fatto da grafici che sono su diversi insiemi di livello.
Infine si pone $\phi(z) =: \widetilde{\phi}(z, f(p))$, per $z \in \widetilde{V}$.
- - Quindi poichè $x \in \widetilde{U} \Leftrightarrow x_{\mathbf{t}} = (x_{\mathbf{t}_1}, \ldots, x_{\mathbf{t}_{M-m}}) \in \widetilde{V}$, e $f(x) \in \widetilde{W}$, se $x \in \widetilde{U}$ si ha

$$f(x) = w \Leftrightarrow x_{\mathbf{s}} = (\Psi^{-1}(x_{\mathbf{t}}, w))_{\mathbf{s}} = \widetilde{\phi}(x_{\mathbf{t}}, w) \text{ e } w \in \widetilde{W}.$$

2-ii Si procede come nel teorema 2. Si considerano B palla di R^{M-m} di centro $p_{\mathbf{t}}$, e W palla di $\mathbf{R}^m$ di centro $p_{\mathbf{s}}$ in modo che $P = \{x; x_{\mathbf{t}} \in B,\, x_{\mathbf{s}} \in W\}$ abbia chiusura contenuta in $\widetilde{U}$, e quindi . Poichè le proiezioni sono continue ed intersezioni di intorni è intorno, C è un intorno di p.
- - Poichè $\phi : \widetilde{V} \subseteq \mathbf{R}^{M-m} \to \mathbf{R}^m$ è continua e $\phi(p_{\mathbf{s}}) = p_{\mathbf{t}}$, si ha che $\phi^{-1}(W) \cap B$ è un intorno aperto di $p_{\mathbf{t}}$ e quindi vi è una palla V, in $\mathbf{R}^{M-m}$ di centro $p_{\mathbf{t}}$ contenuta in $\phi^{-1}(W) \cap B$.
- - Si ha come desiderato che $\phi : V \to W$, e si pone $U = \{x : \, x_{\mathbf{t}} \in V,\, x_{\mathbf{s}} \in W\}$.
- Le proprietà: a), b), c), e il fatto che $\det \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}} \neq 0$ per $x \in U$, sono verificate per costruzione di $\phi(z) = \widetilde{(}x, f(p))$, $z \in V$.
- Infine si prova d). Per scelta di U, per ogni $x \in U \cap L$, cioè $x_{\mathbf{t}} \in V$ e $x_{\mathbf{s}} = \phi(x_{\mathbf{t}})$, si ha che $f(x) = f(p)$. Considerando quindi tali $x = \sum_h x_{t_h} e_{t_h} + \sum_k \phi_k(x_{\mathbf{t}}) e_{s_k}$ come funzione di $x_{\mathbf{t}}$, derivando la relazione rispetto alle variabili $x_{\mathbf{t}}$ per la regola della catena, con si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{t}}}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mathbf{t}}}(x_{\mathbf{t}}) = 0_{m \times M-m},$$

sempre per scelta di U la matrice $\frac{\partial f}{\partial x_{\mathbf{s}}}(x)$ è invertibile per $x \in U$. Da cui le formule desiderate.
<u>Osservazione 11bis:</u> si è ottenuto di più: esistono intorni aperti $\widetilde{V}$ in $\mathbf{R}^{M-m}$ di $p_{\mathbf{t}}$, $\widetilde{W}$ in $\mathbf{R}^m$ di $f(p)$, $\widetilde{U}$ di p in $\mathbf{R}^M$, per cui
$\widetilde{\text{a}}$ - $\Psi(x) = (v, w) = (x_{\mathbf{t}}, f(x))$, $\Psi : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \times \widetilde{W} \subseteq \mathbf{R}^{M-m} \times \mathbf{R}^m$, sia un diffeomorfismo C^K.
$\widetilde{\text{b}}$ -per ogni $x \in \widetilde{U}$: $\quad f(x) = w \quad \Leftrightarrow \quad w \in \widetilde{W}, \quad$ e $\quad x_{\mathbf{s}} = \left(\Psi^{-1}(x_{\mathbf{t}}, w)\right)_{\mathbf{s}} =_{def} \widetilde{\phi}(x_{\mathbf{t}}, w)$:
$\widetilde{U}$ è unione di grafici di funzioni con egual dominio, ed ognuno di essi giace su diversi insiemi di livello di f.
<u>Osservazione 12:</u> viceversa, dal teorema delle funzioni implicite direttamente si deduce il teorema di invertibilità locale, applicandolo alla funzione di $2N$ varibili
$F : D \subseteq \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ data da $F(x, y) = f(x) - y$ nell'intorno del punto $(p, f(p))$ per il livello $L = \{(x, y) : F(x, y) = \vec{0}_{\mathbf{R}^N}\}$. Essendo $J_x f(p)$ invertibile si ha che $\frac{\partial F}{\partial x}$ calcolato in $(p, f(p))$ è di rango massimo. Quindi per il teorema del Dini si possono esprimere le x in funzione delle y sul livello L intorno a $(p, f(p))$: ma ciò vuol dire invertire localmente f nell'intorno di p.

Osservazione 13: se le variabili indipendenti, $x_{\mathbf{t}}$ sono le prime $M-m$, $\mathbf{t}=(1,\dots,M-m)$, $t_j=j$, e quelle dipendenti $x_{\mathbf{s}}$ sono le ultime m, $\mathbf{s}=(M-m+1,\dots,M)$, $s_i=M-m+i$, con l'identificazione $\mathbf{R}^M\sim\mathbf{R}^{M-m}\times\mathbf{R}^m$, si ha:

$$\operatorname{Graf}\phi=W\times V\cap L=U\cap L,\quad x=(x_1,\dots,x_{M-m},\phi_1(x_1,\dots,x_{M-m}),\dots,\phi_m(x_1,\dots,x_{M-m}))\ ,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_{1\dots M-m},\phi(x_{1\dots M-m}))$$
$$||$$
$$-\left(\frac{\partial f}{\partial x_{M-m+1}}(x_{1\dots M-m},\phi(x_{1\dots M-m}))\mid\dots\mid\frac{\partial f}{\partial x_M}(x_{1\dots M-m},\phi(x_{1\dots M-m}))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{1\dots M-m},\phi(x_{1\dots M-m}))$$

Osservazione 14: - la notazione $\dfrac{\partial x_h}{\partial x_k}$, che sottointende il fatto che x_h sia una delle variabili dipendenti $x_{s_1\dots s_m}$, e x_k una di quelle indipendenti $x_{t_1\dots t_{M-m}}$, può essere ambigua ed indurre all'errore in quanto non specifica quali siano *gli interi due gruppi di variabili.*
Cambiando il gruppo di variabili (dipendenti), per cui si realizza il rango massimo, ma tenendone fissa una come indipendente, la funzione implicita ϕ può cambiare (con le sue derivate).
Sarebbe come *vedere il luogo di zeri L da diversa prospettiva*: le pendenze cambierebbero.

Esempio 2: già nel caso lineare, in cui tutto si esplicita, ci si accorge del fenomeno:

$$f(x,y,z,w)=\begin{pmatrix}x+y+z+2w\\ x-y+z-w\end{pmatrix}:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^2\ ,\quad L=\left\{(x,y,z,w):\begin{cases}x+y+z+2w=0\\ x-y+z-w\ =0\end{cases}\right\},$$

si ha su L esplicitamente:

- - da una parte $\phi=(y,w)=(3x+3z,-2x-2z)$: $\dfrac{\partial w}{\partial x}=-2,\quad (x,z)$ variabili indipendenti;

- - dall'altra invece $\phi=(z,w)=\left(\dfrac{y}{3}-x,-\dfrac{2}{3}y\right)$: $\quad\dfrac{\partial w}{\partial x}=0,\quad (x,y)$ variabili indipendenti.

- Per questo si usa la seguente notazione: date le variabili $x=(x_1,\dots,x_M)$, con relazioni di interdipendenza definite da $f(x_1,\dots,x_M)=q=f(p)\in\mathbf{R}^m$ si scrive

$$\left(\frac{\partial x_h}{\partial x_k}\right)_{x_{\tau_1}\dots x_{\tau_{M-m-1}}},\ \ h,\ k\neq\tau_j,\ \text{ o }\ \left(\frac{\partial x_h}{\partial x_k}\right)^{x_{\sigma_1}\dots x_{\sigma_{m-1}}},\ \ h,\ k\neq\sigma_i,\quad\text{intendendo rispettivamente:}$$

che le $M-m$ variabili indipendenti sono $x_k,x_{\tau_1}\dots,x_{M-m-1}$, con x_h tra le rimanenti dipendenti; o che le m variabili dipendenti sono $x_h,x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_{m-1}}$, con x_k tra le rimanenti indipendenti.

Esercizio 2: trovare un esempio ancora più semplice per cui $\dfrac{\partial x_h}{\partial x_k}$ cambia al cambiare della scelta delle variabili indipendenti (che comprendano x_k ed escludano x_h).

Esercizio 3: $f(x)=f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3,x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3)$
$f:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^2$, $p=(0,1,3,2,7)$. Mostrare che in un intorno di p la condizione $f(x)=f(p)$ definisce una funzione da $\mathbf{R}^3$ ad $\mathbf{R}^2$: $x_1=\phi_1(y_1,y_2,y_3)$, $x_2=\phi_2(y_1,y_2,y_3)$. Calcolare $J\phi(3,2,7)$.

3 Teoremi del rango

Teorema 6 del rango siano $p \in A = \overset{o}{A} \subseteq \mathbf{R}^M$, $f : A \to \mathbf{R}^m$, $m > M$, $f \in \left(C^K(A)\right)^m$, $K \geq 1$,

Se $J_p f$ ha rango massimo M, *i.e.* $\det {}^t J_p f J f(p) = \det \nabla f(p) J_p f > 0$, allora

1 -*geometria:* vi è un intorno aperto U di p per cui $\mathrm{Im}_U f = f(U)$ corrisponde al grafico di una *funzione* C^K *di* M *variabili a valori in* $\mathbf{R}^m$;

- pertanto si può definire il piano tangente, M dimensionale in $\mathbf{R}^m$, in $f(p)$ ad $f(U)$ l'immagine di f su U: esso è dato dato da $\mathrm{Im} D_p f \ + f(p)$, cioè, in forma parametrica, cfr. FT10.2.7,

$$f(p) + J_p f x = f(p) + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + x_M \frac{\partial f}{\partial x_M}(p) \text{ con } x \in \mathbf{R}^M.$$

2- *analisi:* in particolare

dati $\mathbf{s} = s_1 < \cdots < s_{m-M}$, $\mathbf{t} = t_1 < \cdots < t_M$, con $\{s_1, \ldots, s_{m-M}, t_1, \ldots, t_M\} = \{1, \ldots, m\}$, si pone per $z \in \mathbf{R}^m$: $z_{\mathbf{s}} = (z_{s_1}, \ldots, z_{s_{m-M}}) \in \mathbf{R}^{m-M}$, $z_{\mathbf{t}} = (z_{t_1} \ldots, z_{t_M}) \in \mathbf{R}^M$.

- Se $\det J_p f_{\mathbf{t}} \neq 0$, ovvero $(J_p f)_{\mathbf{t}} = J_p(f_{\mathbf{t}})$ è invertibile, allora esistono:

$\widetilde{U}$ intorno in $\mathbf{R}^M$ di p, $\widetilde{V}$ intorno in $\mathbf{R}^M$ di $(f(p))_{\mathbf{t}}$, $\widetilde{W}$ intorno in $\mathbf{R}^{m-M}$ di $(f(p))_{\mathbf{s}}$

per cui, definendo $\widetilde{\Omega} = \left\{ y \in \mathbf{R}^m : y_{\mathbf{t}} \in \widetilde{V},\, y_{\mathbf{s}} \in \widetilde{W} \right\}$ intorno in $\mathbf{R}^m$ di $f(p)$,

i - $f_{\mathbf{t}} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ è C^K bigettiva con inversa C^K, ed inoltre

ii - $f(\widetilde{U}) = \left\{ z \in \widetilde{\Omega} :\, z_{\mathbf{s}} = f_{\mathbf{s}}\left(f_{\mathbf{t}}^{-1}(z_{\mathbf{t}})\right) \right\}$

cioè l'immagine di f ristretta a $\widetilde{U}$ corrisponde al grafico di $\phi : \widetilde{V} \to \widetilde{W}$ data da

$$\phi(\tau) =: f_{\mathbf{s}}\left(f_{\mathbf{t}}^{-1}(\tau)\right).$$

iii - $f_{|_{\widetilde{U}}}$ ha inversa continua,

Dimostrazione: si segue lo schema del teorema del rango "baby" per sostegni di curve regolari, che è il caso $M = 1$, FT7.4. Il *teorema di invertibilità locale* viene qui usato *al posto* del fatto che funzioni di una variabile con derivata continua mai nulla su un intervallo sono ivi monotone, quindi invertibili. Ciò permette di analizzare direttamente la *costruzione della funzione* ϕ il cui grafico corrisponde all'immagine locale di f.

- Per ipotesi $\det J_p \Psi_{\mathbf{t}} = \det \left(\frac{\partial f_{t_h}}{\partial x_k}(p) \right) \neq 0$, ed $f_{\mathbf{t}} : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$ è C^K essendo le sue componenti $f_{t_1}, \ldots, f_{t_M}$ funzioni C^K.

i - Per il teorema di invertibilità locale vi sono un intorno U in $\mathbf{R}^M$ di p ed un intorno V in $\mathbf{R}^M$ di $f_{\mathbf{t}}(p)$, per cui $f_{\mathbf{t}} : U \to V$ è un diffeomorfismo C^K.

ii - Quindi anche $f_{|_U}$ è iniettiva, per cui la sua immagine corrisponde ad un grafico rispetto alle variabili $z_{t_1}, \ldots, z_{t_M}$ (se $x,\, y \in U$ e $f_{\mathbf{t}}(x) = f_{\mathbf{t}}(y)$ ne segue, per iniettività di $f_{\mathbf{t}}|_U$, $x = y$ quindi $f(x) = f(y)$ ed in particolare $f_{\mathbf{s}}(x) = f_{\mathbf{s}}(y)$).

- - Più precisamente $f(U)$ corrisponde al grafico $\phi : V \to \mathbf{R}^{m-M}$ definita per $\tau \in U$ da $\phi(\tau) = f_{\mathbf{s}}\left(f_{\mathbf{t}}^{-1}(\tau)\right)$, che è una funzione C^K in quanto composizione di funzioni C^K.

iii - Infine si considerano: $\widetilde{V} \subseteq V$ intorno compatto di $f_{\mathbf{t}}(p)$, $\widetilde{U} = f_{\mathbf{t}}^{-1}(\widetilde{V})$ che sarà intorno compatto di p e $\widetilde{W}$ intorno di $f_{\mathbf{s}}(p)$ contenente $\phi(\widetilde{V})$. Si ha:

- - $\widetilde{\Omega} = \left\{ y \in \mathbf{R}^m : y_{\mathbf{t}} \in \widetilde{V},\, y_{\mathbf{s}} \in \widetilde{W} \right\}$ è intorno in $\mathbf{R}^m$ di $f(p)$ poichè intersezione di preimmagini di intorni mediante le proiezioni sugli assi che sono continue;

- - $f(\widetilde{U}) = f\left(f_{\mathbf{t}}^{-1}\left(\widetilde{V}\right)\right) = \left\{ z \in \mathbf{R}^m :\, z_{\mathbf{t}} \in \widetilde{V},\, z_{\mathbf{s}} = f_{\mathbf{s}}\left(f_{\mathbf{t}}^{-1}(z_{\mathbf{t}})\right) \right\} =$

$= \left\{ z \in \widetilde{\Omega} :\, z_{\mathbf{t}} \in \widetilde{V},\, z_{\mathbf{s}} = f_{\mathbf{s}}\left(f_{\mathbf{t}}^{-1}(z_{\mathbf{t}})\right) \right\}$;

- - pertanto essendo $f : \widetilde{U} \to \widetilde{\Omega}$ iniettiva su un compatto ha inversa continua, cfr. FT6.4 secondo corollario al teorema 11.

4 Compendio: teoremi di invertibilità globale.

Senza accenni alle dimostrazioni per completezza si enunciano dei criteri di invertibilità *globale.*

Omeomorfismo locale. Una funzione (continua) $G : (N, \delta) \to (C, d)$ tra due spazi metrici si dice *omeomorfismo locale* se per ogni $p \in N$ esiste un intorno U aperto di p e un intorno V aperto di $G(p)$ per cui $F : U \to V$ è continua, bigettiva e con inversa continua.

Funzioni proprie. Una funzione continua $G : (N, \delta) \to (C, d)$ tra due spazi metrici si dice *propria* se le *preimmagini di compatti sono compatte.*
Se (N, δ) e (C, d) sono $\mathbf{R}^M$ una funzione G è propria se e solo se $|G(x)|_{\mathbf{R}^M} \xrightarrow[|x|_{\mathbf{R}^M}\to\infty]{} +\infty$

Semplicemente connesso e omotopia. - Un insieme E in uno spazio metrico (M, d) si dice *semplicemente connesso* se

i- è connesso,

ii- per ogni cammino chiuso $\gamma[a; b] \to E$, vi è $\Gamma : [a; b] \times [0; 1] \to C$
per cui $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$ e $\Gamma(s, 1) \equiv c = \Gamma(a, 1) \in C$

in breve ogni laccio in C può essere deformato con continuità *rimanendo in C* ad un punto.
- La "defomazione " Γ si dice *omotopia.*

Teorema 7. Siano (N, δ) e (C, d) spazi metrci *connessi* per archi e $G : (N, \delta) \to (C, d)$. Se

i- (C, d) è semplivemente connesso,
ii- G è un omeomorfismo locale allora
G è propria se e solo se G è globalmente invertibile con inversa continua (*omeomorfismo*).

Teorema 7. Se Ω è aperto in $\mathbf{R}^M$, $\overline{D^\circ} = D \subseteq \Omega$ è *limitato* e *connesso* per archi e $G : \Omega \to \mathbf{R}^M$ è una funzione $C^1(\Omega)$ con differenziale in ogni punto di D invertibile allora
$G : \partial D \to \partial(G(D))$ è bigettiva se e solo se e $G : D \to G(D)$ è bigettiva .

Corollario. Se $G : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$ è C^K con differenziale in ogni punto invertibile e $|G(x)|_{\mathbf{R}^M} \xrightarrow[|x|_{\mathbf{R}^M}\to\infty]{} +\infty$ allora è bigettiva da $\mathbf{R}^n$ in se con inversa C^K.

Corollario. Se $G : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$ è propria e C^K detto S l'insieme dei punti p ove D_pG non è invertibile si ha che se $\mathbf{R}^M \setminus G(S)$ è semplicemente connesso e $\mathbf{R}^M \setminus G^{-1}(G(S))$ è connesso per archi allora G è invertibile con inversa C^K tra $\mathbf{R}^M \setminus G^{-1}(G(S))$ e $\mathbf{R}^M \setminus G(S)$.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol.2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] superfici bidimensionali pagg.243-252, teorema del Dini e di invertibilita' locale pagg.265-287;

[B] superfici bidimensionali pagg.256-258, 287-289, 532-535 teorema del Dini per due variabili pagg.307-310, per tre variabili pagg.324-330, per sistemi ed invertibilità locale pagg.365-369, 376, 378, 379,

[F] superfici bidimensionali pagg.545-565, 577-579, teoremi del Dini e di invertibilità locale pagg.591-620, sottovarieta' e loro piani tangenti pagg.641-656.