Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria
Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 6
TEOREMI DEL DINI E DEL RANGO (FT12, FT13)

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n. 1 a- Si calcoli la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare che, relativamente alle basi canoniche di $\mathbf{R}^5$ ed $\mathbf{R}^3$, è associata alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b- i) Disegnare nel piano cartesiano il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ dato da

$$(1+s+t, 1+s)\ , \qquad (s,\ t)\ \in\ [0;1]\times[0;1]\ \ .$$

ii) Che tipo di figura geometrica rappresenta il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$(1+r+s+t, 1+r, 1+s, 1+t)\ , \qquad (r,s,t)\ \in\ [0;1]\times[0;1]\times[0;1]\ \ ?$$

ESERCIZIO n.2 Grazie al terorema del Dini, per (x,y) "vicino" a $(1,2)$, il luogo di zeri

$$f(x,y) =:\ y\cdot 2^x\ +\ \sin\left(\pi\frac{x}{y}\right) - 5 = 0,$$

definisce x in funzione di y, $x = x(y)$, in modo che $f(x(y),y) = 0$. Calcolare $\dfrac{d\,x}{d\,y}(2)$.

ESERCIZIO n.3 Si scriva l'equazione del piano normale in $(1,1,2)$ al luogo di zeri definito dalle equazioni $xyz = 2$, $xy + yz + xz = 5$.

ESERCIZIO n. 4 a- Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi:
$x^3y - y^3x = a^2$, $\sin xy - e^{xy} - x^2y = 0$, $x^y = y^x$.

b- Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:
$\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 + z^2c^2 = 1 :\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $z^3 + 3xyz = a^3 :\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $e^z - xy^2z = 0 :\ \frac{\partial z}{\partial y}$.

ESERCIZIO n.5 **a-** Sia $f(x,y,z) = e^{xyz} - z\log(1+x^2y^2)$.
Detta $z = z(x,y)$ la funzione definita dall'equazione $f(x,y,z) = 1$ intorno al punto $(1,1,0)$, calcolare $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$.

b- Sia $F(u,v) = (u-v, uv, u+v)$. Si determini l'equazione del piano tangente all'immagine di F nel punto $F(1,1) = (0,1,2)$.

c- Sia $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ xy \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Detta $\Psi(u,v) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'inversa locale della restrizione di Φ ad un intorno del punto $(1,1)$, si calcoli $\frac{\partial y}{\partial u}(e+1,1)$.

d- Si consideri la funzione $z = z(x,y)$ definita implicitamente, in un intorno di $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$, da $2y + x + \cos(x+y+z) - \sin(zxy) = 1 - \sqrt{\pi}$. Se ne calcoli la derivata $\dfrac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$.

e- In quali punti l'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ x^2 + z^2 & = 1 \end{cases}$ non è localmente un grafico?

ESERCIZIO n.6 Sia $S = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^3e^{-xy} = 8,\ z \geq 0\}$.
Si mostri che S è una 2-varietà con bordo e se ne determini il bordo bS.

ESERCIZIO n.7 a- Si studi l'intersezione dei grafici delle due funzioni $u(x,y) = x+y^2$, $\quad v(x,y) = 2x^2+2y^4$, mettendo in risalto: se tale intersezione è limitata in $\mathbf{R}^3$, e se esistono punti nell'intorno dei quali essa non è sostegno di una curva regolare.
b- Si disegnino in modo approssimativo ma esauriente gli insiemi di livello delle funzioni u e v sopra definite.
c- Si individui sotto forma di luogo di zeri l'insieme dei punti del piano ove gli uni sono tangenti agli altri.

ESERCIZIO n. 8 a- Si mostri che la funzione $f(x,y,z,w) = x^2+y^2+z^2+w^2$ sull'insieme definito da $g(x,y,z,w) = xyzw = 1$ assume come valore minimo 4, e se ne trovino i punti di minimo. [Si osservi che $x^2+y^2+z^2+w^2 \geq 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+w^2} \geq 4\sqrt{xyzw}$. E le eguaglianze?]

Si consideri $Z \subseteq \mathbf{R}^4$ definito da $Z = \{(x,y,z,w):\ f(x,y,z,w) = 10,\ xyzw = 1\}$.

b- Mostrare che Z, in un intorno di $\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$, è grafico delle (z,w) in funzione delle (x,y).

c- Si determini il piano (bidimensionale) tangente a Z nel punto dato, e si calcoli $\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\frac{5-\sqrt{21}}{2},\,y=\frac{5+\sqrt{21}}{2}}$.

d- Si dica se nel diedro $x>0,\ y>0\ , z>0,\ w>0$, l'insieme Z è globalmente il grafico di una funzione vettoriale di due variabili.

• ESERCIZIO n. 9 Si consideri la funzione $f(x,y,z) = y + z\ln(1+y) - x^2$, $\qquad (x,y,z) \in \mathbf{R}\times\,]-1,+\infty[\,\times\mathbf{R}$.

(i) Si mostri che per ogni $(x,z) \in \mathbf{R}^2$ esiste almeno un $y \geq 0$ tale che $f(x,y,z) = 0$, e che tale y è unico allorché $z \geq 0$; in quest'ultimo caso si scriva $y = g(x,z)$, cosicché $f(x,g(x,z),z) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $z \geq 0$.

(ii) Si provi che per $x \in \mathbf{R}$ e $z \geq 0$ la funzione g è non negativa, è decrescente e convessa rispetto a z, ed è tale che $x = 0$ se e solo se $g(x,z) = 0$.

ESERCIZIO n.10 Siano: $V \subset \mathbf{R}^4$ definito da $\left\{\begin{array}{lcl} \phi(x,y,z,w) =: & xy = & 0 \\ \psi(x,y,z,w) =: & wz = & 1 \end{array}\right.$,
$S \subset V$ definito da rango $(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\,\nabla\psi(x,y,z,w)) \leq 1$ e $(x,y,z,w) \in V$,
e $f(x,y,z,w) = (x+z)^2\ +\ (y-w)^2$.

(a) - si provi che rango $(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\,\nabla\psi(x,y,z,w)) = 1$ per $(x,y,z,w) \in S$;
- si mostri che S è una 1-varietà regolare, e se ne trovi una parametrizzazione.
- Calcolare le equazioni del 2-piano tangente a V in $(1,0,1,1)$.
- Per $\mathbf{p} \in S$ si trovino tre curve per $\mathbf{p}$ con sostegno in V e velocità (in $\mathbf{p}$) linearmente indipendenti: si deduca che V non è una varietà regolare.
(b) - Si studi la limitatezza di V e di S. - Si trovino i valori estremali di f su V.
(c) - Si consideri $W = V \cap \{(x,y,z,w) : x = 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0\}$.
Si mostri che:
- non è una 2-varietà; - è una 2-varietà con bordo. Lo si determini.

ESERCIZIO n. 11 - Sia $f(x,y) = \binom{x^2-y^2}{2xy} = (u,v)$: si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, si studi l'immagine di f.

- Si determinino le regioni ove il differenziale è invertibile.

• - Si determinino quindi le regioni ove la funzione è invertibile.

ESERCIZIO n. 12 a- Sia $f(x,y) = \binom{x^2-y^2}{xy} = (u,v)$: si trovi un intorno di $P_0 = (1,1)$ in cui f è iniettiva.

• b- Si calcolino le derivate parziali seconde in $U_0 = (0,1) = f(1,1)$ dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.

ESERCIZIO n.13 a- Siano $f(x,y) = \binom{x^2}{y}$, $g(x,y) = \binom{x^3+xy}{y}$: se ne studino le immagini.

• b-Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, $g^{-1}\{(u,v)\}$.

ESERCIZIO n. 14 a- Sia $f(x,y) = \binom{e^{x+y}-e^{x-y}-k^2x}{x+y} = (u,v)$, $k \in \mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$.

b- Si determini un intorno di $(x,y) = (0,0)$ in cui f é iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}(0,0)$.

ESERCIZIO n. 15 a- Sia $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = \binom{2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3}{x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3}$: si verifichi che in un intorno di $(0,1,3,2,7)$ la regione determinata dalle equazioni $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = (0,0)$ é un grafico rispetto alle variabili (y_1,y_2,y_3).

b- Si calcoli $\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)_{y_1,y_3}(3,2,7)$.

• c- É possibile esplicitare (x_1,x_2) in funzione di (y_1,y_2,y_3) in ogni punto dell'insieme $\{(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) : f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = (0,0)\}$?

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 10: **(a)** - Se $(x,y,z,w) \in S$ il gradiente $(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\,\nabla\psi(x,y,z,w)) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 0 \\ 0 & w \\ 0 & z \end{pmatrix}$, ha rango al più 1: si devono annullare i minori di ordine 2. Con le condizioni per V: $\begin{cases} yw = & 0 \\ yz = & 0 \\ xw = & 0 \\ xz = & 0 \\ xy = & 0 \\ zw = & 1 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ moltiplicando le prime due righe rispettivamente per z e w $\Longleftrightarrow \begin{cases} y = & 0 \\ x = & 0 \\ zw = & 1 \end{cases}$.

Per $(x,y,z,w)\in S$: rango $(\nabla\phi(x,y,z,w)\,|\nabla\psi(x,y,z,w))$ = rango $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \\ 0 & z \end{pmatrix} = 1.$

- Quindi S è l'unione di due grafici disgiunti $\gamma^+(z) = \left(0,0,z,\dfrac{1}{z}\right)$, $z>0$ e $\gamma^-(z) = \left(0,0,z,\dfrac{1}{z}\right)$, $z<0$. Per definizione S è una 1-varietà regolare (con due componenti connesse per archi), e una parametrizzazione a due carte.

- Per prima cosa si osserva che la domanda ha senso poichè $\mathbf{q} =: (1,0,1,1)\in V\setminus S$, e su $V\setminus S$ il rango di $(\nabla\phi\,|\nabla\psi)$ è massimo: 2. *Esplicitamente* $V\setminus S$ intersecato l'intorno di $(1,0,1,1)$, definito da $x>0$, $z>0$, corrisponde (permutando le variabili) al grafico di $F(x,z) = \left(0,\dfrac{1}{z}\right)$.

Per l'ortogonalità del gradiente ai livelli il piano tangente a V in $(1,0,1,1)$ sarà ortogonale ai due gradienti (linearmente indipendenti!) $\nabla\phi(1,0,1,1)$, $\nabla\psi(1,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

e imponendo le condizioni di passaggio per il punto $(1,0,1,1)$ si ha $\begin{cases} y & = 0 \\ z+w-2 & = 0\end{cases}$

NOTA: *Considerando il corrispondente al grafico di* F $G(x,z) =: \left(x,0,z,\dfrac{1}{z}\right)$, $x,z>0$, *come superficie parametrica, il piano tangente ha equazioni parametriche per* $(s,t)\in\mathbf{R}^2$*:* $(1,0,1,1) + s\dfrac{\partial G(\mathbf{q})}{\partial x} + t\dfrac{\partial G(\mathbf{q})}{\partial z} = (1,0,1,1) + s(1,0,0,0) + t(0,0,1,-1) =$ $(1+s,0,1+t,1-t)$ *che ha, appunto, equazioni* $y=0$, $z+w=2$.

- Se $\mathbf{p}\in S$ allora per qulache $z\neq 0$ deve essere $\mathbf{p} = \left(0,0,z,\dfrac{1}{z}\right)$. I cammini

$\alpha(t) = \left(t,0,z,\dfrac{1}{z}\right)$, $\beta(t) = \left(0,t,z,\dfrac{1}{z}\right)$, $\gamma(t) = \left(0,0,(1+t)z,\dfrac{1}{(1+t)z}\right)$, hanno sostegno in V, "passano" per $t=0$ per $\mathbf{p}$, e $\alpha'(0) = (1,0,0,0)$, $\beta'(0) = (0,1,0,0)$, $\gamma'(0) = \left(0,0,z,-\dfrac{1}{z}\right)$.

Se V fosse una 2-varietà, le tre velocità dovrebbero appartenere al tangente *bidimensionale*: ma sono *tre* linearmente indipendenti.

(b) - Si ha $V\supset S\supset\left\{\left(0,0,z,\dfrac{1}{z}\right) : z>0\right\}$ che è illimitato.

- I valori estremali, eventualmente infiniti, di f su V saranno:

$$\sup_V f = \max\left\{\sup_{V\setminus S} f\ ,\ \sup_S f\right\},\ \inf_V f = \min\left\{\inf_{V\setminus S} f\ ,\ \inf_S f\right\}.$$

— Per $(x,y,z,w)\in S$ $(z\neq 0)$ si ha $f(x,y,z,w) = f\left(0,0,z,\dfrac{1}{z}\right) = z^2+\dfrac{1}{z^2}$. Quindi $\sup\limits_V f = \sup\limits_S f = +\infty$, $\inf_S f = \min_S f = 2$.

— Quindi interessa valutare solo $\inf\limits_{V\setminus S} f$ e confrontarlo con $\min\limits_S f = 2$. Conviene spezzare $V\setminus S$ nei due domini e $A =: V\setminus S\cap\{(x,0,z,w)\}$ e $B =: V\setminus S\cap\{(0,y,z,w)\}$. Ancora

$$\inf_{V\setminus S} f = \min\left\{\inf_A f, \inf_B f\right\}.$$

Per $(x, y, z, w) \in A$ è $f(x, y, z, w) = \left(x, 0, z, \frac{1}{z}\right) = (x+z)^2 + \frac{1}{z^2} \geq 0$. Per $x = -z$, con $z^2 \to \infty$ si ottiene $\inf_A f = 0$. Analogamente per $y = \frac{1}{z}$ e $z \to 0$ si ha $\inf_B f = 0$.
Concludendo $\sup_V f = +\infty$, $\inf f_V = 0$.

(c) - si osserva che $W = V \cap \{(x, y, z, w) : x = 0,\ y \geq 0,\ z > 0\}$, non potendosi annullare z su V.

Prima soluzione: $W = \{(x, y, z, w) : x = 0, wz = 1\} \cap \{(x, y, z, w) : z > 0\} \cap \{(x, y, z, w) : y \geq 0\}$, essendo $z > 0$ una condizione "aperta" non dà bordo . Il candidato bordo bW è quindi $\{(x, y, z, w) : x = 0\ , wz = 1\} \cap \{(x, y, z, w) :\ z > 0\} \cap \{(x, y, z, w) :\ y = 0\}$. Lo è se gli spazi tangenti a W e a $\{y = 0\}$ sono "trasversali", cioè le equazioni dei piani tangenti sono indipendenti, ovvero i gradienti delle tre funzioni che si annullano sono indipendenti nei suoi punti. È ciò che avviene essendo i tre gradienti sul caniddato bordo $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{z}, z)$, $(0, 1, 0, 0)$.

Seconda soluzione: W è una superficie regolare in forma parametrica $H(y, z) = \left(0, y, z, \frac{1}{z}\right)$, $z > 0$, $y \geq 0$ definita su $[0; +\infty) \times (0; +\infty) =: Q$ un quadrante semiaperto di $\mathbf{R}^2$.

Poichè H è restrizione di un diffeomorfismo definito su $\mathbf{R} \times (0; +\infty)$, se W fosse una 2-varietà lo dovrebbe esser anche Q. Ma le 2-varietà in $\mathbf{R}^2$ sono solo i sottoinsiemi aperti e Q non lo è.

- Il bordo di W è $W \cap S = \{(x, y, z, w) :\ x = 0, y = 0\ , zw = 1,\ z > 0\}$.

— Infatti conviene vedere $W \setminus S$ corrispondente (permutando le variabili) al grafico di $K(y, z) = \left(0, \frac{1}{z}\right)$ definita su $y > 0$, $z > 0$. Quindi è una 2-varietà regolare.

— Invece conviene vedere $W \cap S$ come l'immagine mediante il diffeomorfismo $H(y, z) = \left(0, y, z, \frac{1}{z}\right)$, definito su tutto $\mathbf{R} \times (0; +\infty)$, della semiretta aperta $R = \{0\} \times (0; +\infty)$.

Tale R è bordo di Q, con parametrizzazione locale l'identità: poichè ogni palla B con centro $(0, z)$ e raggio strettamente minore di z se intersecata con Q da esattamente un semicerchio.