Fattorizzazione LU ed eliminazione di Gauss

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile $\qquad Ax = b \qquad b, x \in \mathbb{R}^n$

Primo passo: sommare ad ogni riga $i = 2, 3, \dots n$ un multiplo della prima riga in modo da eliminare gli elementi $A_{21}, A_{31}, \dots A_{n1}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \longrightarrow A_2 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\text{riga } i \to \text{riga } i - \frac{A_{i1}}{A_{11}} \text{ riga } 1$$

"pivot"

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -v_{21} & 1 & & & 0 \\ -v_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ -v_{n1} & & 0 & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} A_1 = A_2 \qquad v_{i1} = \frac{A_{i1}}{A_{11}}$$

"matrice elementare di Gauss"

$$L_1 = I + \begin{bmatrix} 0 & \\ -v_{21} & \\ -v_{31} & 0 \\ \vdots & \\ -v_{n1} & \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= I - v_1 e_1^T$$

Passo generico dell'elim. di Gauss: dopo i primi $k-1$ passaggi ho

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overbrace{\quad\ \ }^{k-1} & & \overset{k}{\downarrow} & & \text{errata corrige} \end{array} \\ A_k = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{bmatrix} \end{array}$$

sommo alle righe $i = k+1, k+2, \dots n$ un multiplo della riga k in modo da eliminare $(A_k)_{ik}$

$$\text{riga } i \to \text{riga } i - \frac{A_{ik}}{A_{kk}} \text{ riga } k$$

$$\begin{array}{c} \overset{k}{\downarrow} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & -v_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -v_{nk} & 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{L_k} \end{array} \cdot A_k = A_{k+1} \qquad -v_{ik} = -\frac{A_{ik}}{A_{kk}}$$

$$(A_{k+1})_{ij} = (A_k)_{ij} - \frac{(A_k)_{ik}}{(A_k)_{kk}} (A_k)_{kj}$$

$$L_k = I - \begin{bmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \\ & v_{k+1,k} & \\ & \vdots & \\ & v_{nk} & \end{bmatrix}$$

$$= I - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1,k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{\text{colonna } k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= I - v_k e_k^T$$

Def: L_k si dice <u>matrice elementare di Gauss</u> se è nella forma

$L_k = I - v_k e_k^T$, dove v_k è un vettore con $(v_k)_1 = (v_k)_2 = \dots = (v_k)_k = 0$
(prime k componenti uguali a 0)

Queste matrici sono triang. inferiori con 1 sulla diagonale.

Quindi l'eliminazione di Gauss produce

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \\ & & & & \times \end{bmatrix} = U = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_3 L_2 L_1 A \quad \text{, con } U \text{ triangolare superiore.}$$

$\Updownarrow$ Manipolazioni algebriche:

$$L_{n-1}^{-1} U = \cancel{L_{n-1}^{-1} L_{n-1}} L_{n-2} \cdots L_2 L_1 A$$

$$L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} U = \cancel{L_{n-2}^{-1} L_{n-2}} L_{n-3} \cdots L_2 L_1 A$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1}}_{L} U = A$$

Abbiamo scritto $A = LU$, dove:

- L è triangolare inferiore con 1 su diag. (lower)
- U è triangolare superiore (upper)

<u>Fattorizzazione LU</u> della matrice A

<u>Lemma</u>: Siano L_i matrici elementari di Gauss. Allora,

1) per ogni k, vale $L_k^{-1} = I + v_k e_k^T =$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & v_{k+1,k} & & \\ & & \vdots & & \\ & & v_{n,k} & & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ k \end{array}$$

2) $L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} = I + v_1 e_1^T + v_2 e_2^T + \dots + v_k e_k^T$ per ogni k

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ v_{21} & 1 & & & & \\ v_{31} & v_{32} & 1 & & O & \\ \vdots & v_{42} & \ddots & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & v_{k+1,k} & 1 & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dim: 1) $L_k(I+v_ke_k^T) = (I-v_ke_k^T)(I+v_ke_k^T) =$

$$= I + \cancel{v_ke_k^T} - \cancel{v_ke_k^T} - v_k\underbrace{(e_k^Tv_k)}_{=}e_k^T = I \qquad \square$$

$$[0\,0\cdots 0\,1\,0\cdots 0]^T \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ v_{k+1,k}\\ v_{k+2,k}\\ \vdots\\ v_{n,k}\end{bmatrix} \leftarrow k = 0$$

$\uparrow$ k

2) Induzione su k. Il caso $k=1$ è $L_1^{-1} = I + v_1e_1^T$ vero per 1ª parte del lemma.

Supponiamo la tesi vera per k, dimostriamolo per $k+1$:

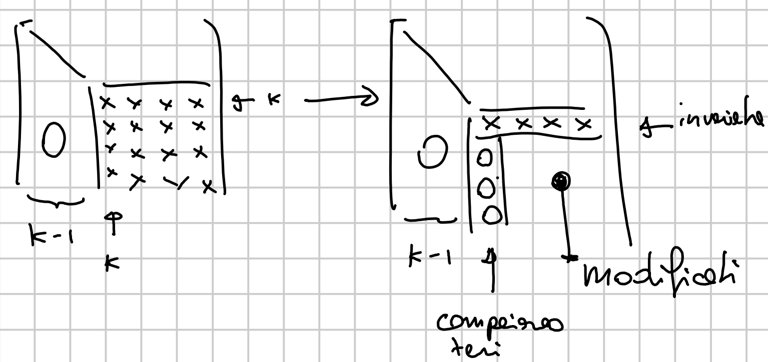
$$(L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_k^{-1})L_{k+1}^{-1} = (I+v_1e_1^T+v_2e_2^T+\dots+v_ke_k^T)(I+v_{k+1}e_{k+1}^T)$$

$$= \underbrace{I+v_1e_1^T+v_2e_2^T+\dots+v_ke_k^T+v_{k+1}e_{k+1}^T}_{} + v_1\underbrace{(e_1^Tv_{k+1})}_{=0}e_{k+1}^T + v_2\underbrace{(e_2^Tv_{k+1})}_{=0}e_{k+1}^T + \dots + v_k\underbrace{(e_k^Tv_{k+1})}_{=0}e_{k+1}^T$$

$$[1\,0\cdots 0]\begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ v_{k+1,k+1}\\ \vdots\\ v_{n,k+1}\end{bmatrix} \Big\}\ k+1 \text{ comp. nulle}$$

---

passo (k) dell'eliminazione di Gauss:



$$A_{ij} = A_{ij} - \boxed{L_{ik}}\,A_{kj}$$

per ogni $i = k+1,\dots,n$, $j = k+1 \dots n$

$$A(k+1:n,k+1:n) = A(k+1:n,k+1:n) - \begin{bmatrix} L_{k+1,k}\\ \vdots\\ L_{n,k}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{k,k+1} & \cdots & A_{k,n}\end{bmatrix}$$

$A(k+1:n,k+1:n)$ $A(k+1:n,k+1:n) - L(k+1:n,k) * A(k,k+1:n)$

Costo computazionale:

• riga 12: $n-k$ operazioni $\sim$ $k = 1,2,\dots,n-1$

- riga 14: $(n-k)^2$ molt.
  $(n-k)^2$ sottrazioni
  $= 2(n-k)^2$ operazioni

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{bmatrix}$$

riga 16:

$$2(n-1)^2 + 2(n-2)^2 + 2(n-3)^2 + \dots + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$$

$$= 2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\right) = 2\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{2}{3}n^3 + \text{termini di grado più basso}$$

$$= \frac{2}{3}n^3 + O(n^2) \boxed{+ \underbrace{O(n^2)}_{\to \text{ riga 12}}}$$

$$= O(n^3)$$

$\rightsquigarrow$ Il costo computazionale della fattorizzazione LU/eliminazione di Gauss è $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ operazioni aritmetiche.

Soluzione di sistemi lineari tramite la fattorizzazione LU:

$A = LU \qquad Ax = b$

$b = L\underbrace{Ux}_{y} \qquad$ chiamo $y = Ux$

Per trovare x, mi basta:

1) Calcolo y come soluzione del sist. lineare $b = Ly$ $\rightsquigarrow$ sostituzione in avanti

2) Calcolo x come soluzione del sist. lineare $y = Ux$ $\rightsquigarrow$ sostituzione all'indietro

Mettendo tutto insieme:

dati A, b:

1) calcolo L, U tali che $LU = A$ $\qquad \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

2) Risolvo $b = Ly$ con sost. in avanti, trovando y $\qquad n^2$

3) Risolvo $y = Ux$ con sost. all'indietro trovando x $\qquad n^2$

In totale, $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ operazioni aritmetiche per la soluzione di un sist. lineare.

Osservazione: se ho da risolvere m sistemi lineari con la stessa matrice A (e vettori b diversi), mi basta fare il passaggio 1 una volta sola

$$\rightsquigarrow \quad \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 m + O(n^2)$$

Osservazione: nel nostro codice, sfruttiamo la struttura particolare delle L_k per non fare mai prodotti $L_k * A_k$ (matrice-matrice). Un solo prodotto matrice-matrice costerebbe $2n^3 + O(n^2)$ operazioni, cioè più di tutta l'eliminazione!