FT8.5 versione semplificata

1. Campo solenoidale piano Si considera $S : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2$, $S(x,y) = (S_1(x,y), S_2(x,y)) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$: *campo solenoidale.* Si studia l'integrale orientato di tale campo S lungo curve piane non passanti per l'origine $\gamma : I \to \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, I intervallo.

NOTA : $\langle S(x,y) \cdot (x,y) \rangle = 0$ $S \perp$ vettore posizione

2. Anomalia: si considera $\gamma : I = [a;b] \to \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, continua per cui: non solo *non passa per l'origine* ma ne è *distante* (essendo definita su un compatto), che sia C^1 a tratti. Per $t \in I$ si definisce la funzione di *anomalia della curva* γ: $\Phi_\gamma(a,t) =$

$$= \Phi_\gamma(t) = \int_{\gamma_{|[a;t]}} S = \int_a^t \langle S(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \rangle \, ds = \int_a^t \left(-\frac{y(s)}{x^2(s)+y^2(s)} x'(s) + \frac{x(s)}{x^2(s)+y^2(s)} y'(s) \right) ds,$$

* conta l'angolo "con segno cumulativo" (con cancellazioni) fatto dal cammino in $[a;t]$

** $$\Phi_\gamma(t) = \Phi_{\frac{\gamma}{|\gamma|}}(t).$$

Per sincerarsi di $*$ si considera per semplicità il caso di un cammino $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a; b]$ nel primo quadrante $x(t) > 0$, $y(t) > 0$

Nel caso $\arctan \frac{y(t)}{x(t)}$ dà l'angolo (anomalia) tra la semiretta da $(0,0)$ a $\gamma(t)$ e il semiasse delle ascisse positive

$$\frac{d}{dt}\left(\arctan \frac{y(t)}{x(t)}\right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{y'x - yx'}{x^2} =$$

$$= \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2} = -\frac{y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} x'(t) + \frac{x(t)}{x^2(t) + y^2(t)} y'(t)$$

$$= \langle S(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \rangle$$

Pertanto

$$\Phi_\gamma(t) = \int_{\gamma|_{[a,t]}} S = \int_a^t \frac{d}{ds}\left(\arctan \frac{y(s)}{x(s)}\right) ds =$$

$$= \arctan \frac{y(t)}{x(t)} - \arctan \frac{y(a)}{x(a)}$$

NOTA: nel caso di cammini generici distanti da $(0,0)$ l'idea è spezzare l'integrale negli intervalli in cui il cammino sta nei singoli quadranti.

Osservazione

$A(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ $\quad x>0, \; y>0$

se si fissa y e si deriva in x
si ha (tale derivata si indica $\frac{\partial}{\partial x}$)

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2} = S_1(x,y)$$

se si fissa x e si deriva in y

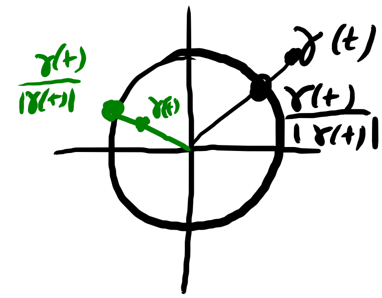
$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = S_2(x,y)$$

** se γ è distante dall'origine si ha

$$\Phi_\gamma(t) = \Phi_{\frac{\gamma}{|\gamma|}}(t)$$

PROIEZIONE RADIALE DI γ SULLA CIRCONFERENZA

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = \frac{(x(t), y(t))}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \in \text{CIRCONFERENZA UNITARIA DI CENTRO } (0,0)$$



Questo segue dalla teoria generale che si esporrà nella seconda parte.
Nel caso si può fare a mano (esercizio)

1. calcolare $\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}\right)$

2. scrivere per esteso
$$\Phi_{\frac{\gamma}{|\gamma|}}(t) = \int_{\frac{\gamma}{|\gamma|}\big|_{[a,t]}} S = \int_a^t \left\langle S\left(\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}\right) \cdot \left(\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}\right)' \right\rangle ds$$

3. Verificare $\forall s$ $\left\langle S\left(\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}\right) \cdot \left(\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}\right)' \right\rangle = \left\langle S(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \right\rangle$

3. Cammini piani in coordinate polari:

- se $\gamma = (x, y)$ è un cammino C^1 a tratti, distante dall'origine, le coordinate polari della posizione all'istante t sono quindi

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \qquad \phi(t) = \Phi_\gamma(t) + 2k\pi \in [0; 2\pi), \text{ per } k = k(t) \in \mathbf{Z} \text{ opportuno, per cui}$$

$$\gamma(t) = r(t)\,(\cos\Phi(t), \sin\Phi(t)).$$

- Quindi se Φ' non si annulla in $[a; b]$, cioè $\left(\frac{\gamma}{|\gamma|}\right)' \neq \vec{0}$, la Φ è invertibile con inversa C^1 a tratti. Perciò $\gamma_o\Phi^{-1}$ è una riparametrizzazione, $\varphi = \Phi$, equivalente di γ:

$$\gamma(t) = \widetilde{\gamma}\,(\Phi(t)).$$

$$\widetilde{\gamma}(\varphi) = \gamma\left(\Phi^{-1}(\varphi)\right) = r\left(\Phi^{-1}(\varphi)\right)(\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \varphi \text{ compreso tra } \Phi(a), \text{ e } \Phi(b).$$

- Il cammino $\widetilde{\gamma}$ è definito dalla relazione "polare" tra anomalia e distanza dall'origine $|\widetilde{\gamma}| = \widetilde{r} = f(\varphi) = r\left(\Phi^{-1}(\varphi)\right)$.

In generale per cammini Γ dati da una relazione tra le "coordinate polari" $r = f(\varphi)$, cioè $\Gamma(\varphi) = f(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi)$, "l'elemento di lunghezza" è

$$ds_\Gamma = |\Gamma'|\,d\varphi = |f'(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi) + f(\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi)|\,d\varphi = \sqrt{\left(f'(\varphi)\right)^2 + \left(f(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

L'elemento di lunghezza è invariante per equivalenza. Nel caso si riverifica direttamente (si assume $\Phi' > 0$ per non scrivere, in caso contrario, gli integrali e lo scambio di estermi di integrazione):

$$ds_\gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{\left(\frac{d\widetilde{x}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\widetilde{y}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,\frac{d\varphi}{\Phi'} = \sqrt{\left(\frac{d\widetilde{x}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\widetilde{y}}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = ds_{\widetilde{\gamma}}.$$

In generale per cammini Γ dati da una relazione tra le "coordinate polari" $r = f(\varphi)$, cioè $\Gamma(\varphi) = f(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi)$, "l'elemento di lunghezza" è

$$ds_\Gamma = |\Gamma'|\,d\varphi = |f'(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi) + f(\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi)|\,d\varphi = \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

infatti

ORTOGONALI UNITARI

$$\Gamma'(\varphi) = f'(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi) + f(\varphi)(-\sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$|\Gamma'(\varphi)| = \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2}$$

Esercizio se la curva Λ è data da $\varphi = g(r)$ $[\Lambda(r) = r(\cos g(r), \sin g(r))]$ calcolare ds_Λ in termini di dr