La funzione ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ poichè, per convessità di $y = x^2$, qualsiasi direzione $(a,b) \neq (0,0)$ dall'origine individua un segmento centrato in $(0,0)$ ove f è nulla. Pertanto la restrizione di f a queste rette $f(ta,tb)$, essendo costante intorno all'origine, ha derivata nulla per $t = 0$.
Si noti che la funzione f risulta discontinua in $(0,0)$.

Esempio 7: - moltiplicando per x la funzione f si ottiene una funzione ϕ continua in $(0,0)$. Infatti f è limitata (assume due valori) ed $x \to 0$ se $x^2 + y^2 \to 0$.
- La ϕ ha tutte le derivate direzionali nulle in $(0,0)$ essendo nulla, per convessità di $y = x^2$, sui segmenti per $(0,0)$.
Per la richiesta fatta in b), se ci fosse un *piano tangente bidimensionale*, conterrebbe le velocità $(a,b,0)$ date da $(at, bt, \phi(ta,tb))'_{|t=0}$: dovrebbe essere il piano "orizzontale" per l'origine definito da $z = 0$.
- Restringendosi invece alle parabole di apertura $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$, o meglio considerando le composizioni $\phi(t, \alpha t^2) = t$, e considerando le curve sollevate sul grafico $(t, \alpha t^2, t)$ passanti per $(0,0,0)$, si ottengono, per $t = 0$, le velocità $(1,0,1)$, che non giacciono sul candidato piano tangente.
• Osservazione 12: per tali funzioni vale anche $\partial_u \phi(0,0) + \partial_{\rho v} \phi(0,0) = \partial_{u+\rho v} \phi(0,0) = 0$.
Ovvero non solo esistono tutte le derivate direzionali ma sono in relazione di linearità.

Esempio: 8 - con la stessa tecnica, moltiplicando per x una funzione che è costante su ogni curva di una "stella" di curve centrata in $(0,0)$, si ottengono altri svariati esempi di funzioni F con tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, ma con vettori tangenti ai cammini sul grafico sollevati di tali curve, che non descrivono un piano bidimensionale.
- Appunto considerando ancora come famiglia di cammini le parable per l'origine le funzioni del tipo $F(x,y) = x \cdot G\left(\frac{y}{x^2}\right)$, al variare di G continua di una variabile, si hanno diversi esempi di funzioni continue in ogni punto con tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ ma con velocità, in $(0,0,F(0,0)) = (0,0,0)$, di cammini sul grafico non complanari:
cfr. FT6-6 controesempio 16 finale con $G(t) = (\sin(2\pi t))^2,\ 1 < 2t < 2,\ G(t) = 0$ altrimenti; FT6-1 esempio 3 con $G(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

2.2 Differenziabilità, approssimazione lineare:

RISPOSTA: b- Il concetto *sufficiente* per avere un grafico con piano tangente, che si possa studiare con gli strumenti del calcolo differenziale (le derivate parziali), è quello più impegnativo di *approssimazione lineare* della funzione:

Differenziabilità in punctis: $m + M = N$. Dati

$$f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m,\ f(x) = f(x_1, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_M), \ldots f_m(x_1, \ldots, x_M))$$

$$p = (p_1, \ldots p_m) \quad \underline{\textit{interno ad } A}$$

La funzione f si dice *differenziabile* in p se

vi è una funzione lineare $L_p : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ (l'approssimante lineare) per cui

$$\boxed{f(x) = f(p) + L_p(x-p) + \varepsilon}$$

$$\text{con } \lim_{r \to 0} \sup_{|x-p|_M \le r} \frac{|\varepsilon|_m}{|x-p|_M} = 0$$

i.e. $\lim_{x \to p} \frac{|\varepsilon|_m}{|x-p|_M} = 0$

$$\text{cioè } \varepsilon(x,p) = o(|x-p|),\ |x-p| \to 0$$

- Nel caso si usa la notazione $L_p = D_p f$: tale applicazione lineare si dice *differenziale* di f in p.
- Si ha per $v \in \mathbf{R}^M$: $D_p f v = (D_p f_1 v | \ldots | D_p f_m v)$.

Osservazione 13: - per funzioni di una variabile $M = 1$, le funzioni lineari da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^m$ sono le moltiplicazioni per un fissato vettore $a \in \mathbf{R}^m$, $L(t) = a \cdot t$, la differenziabilità è la derivabilità:

$$\exists f'(p) = a \iff \exists \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = a \iff f(x) = f(p) + a\cdot(x-p) + o(x-p)$$

Se esiste, il differenziale per funzioni di una sola variabile è la funzione lineare $u \mapsto f'(p)\cdot u$.

- Nel caso $M = 2$, $m = 1$, $p = (x_0, y_0)$, le funzioni lineari da $\mathbf{R}^2$ ad $\mathbf{R}$ sono i prodotti scalari per un fissato vettore $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $L(x, y) = ax + by$, affinchè la funzione $f(x, y)$ sia differenziabile in (x_0, y_0) devono esistere due numeri a_p, b_p per cui:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

$D_p f$ è quindi la funzione lineare $(u, v) \mapsto au + bv = \langle (a, b)\cdot(u, v)\rangle = (a, b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2.2.1 Matrice Jacobiana: se esiste $D_p f$, la matrice $m \times M$ associata, nelle basi canoniche, a tale applicazione lineare si dice matrice **Jacobiana** di$f$ in p. Si indica con $J_p f$ o con $Jf(p)$

Osservazione 14: si può esprimere in modo equivalente la differenziabilità in p: la funzione f, è *differenziabile* in p se e solo se vi è una matrice $Jf(p) = J = (J_i^j)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le M}}$, $m \times M$, per cui

$$f(x) = f(p) + J\ {}^t(x-p) + \varepsilon$$

$$\text{con} \lim_{r\to 0} \sup_{|x-p|_M \le r} \frac{|\varepsilon|_m}{|x-p|_M} = 0. \iff \lim_{x\to p} \frac{|\varepsilon|_m}{|x-p|_M} = 0$$

$$i.e. \quad (\varepsilon = o(|x-p|),\ |x-p| \to 0)$$

Osservazione 15: $\quad Jf(p) = (J_i^j)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le M}} = (J^1 \dots J^M) = \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Jf_1(p) \\ \vdots \\ Jf_m(p) \end{pmatrix}.$

Le *righe* $J_i = Jf_i(p)$, $1 \le i \le m$, rappresentano i differenziali delle funzioni componenti $D_p f_i$:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(p) + \sum_{j=1}^M J_1^j(x_j - p_j) + o_1(|x-p|_M) \\ f_2(x) = f_2(p) + \sum_{j=1}^M J_2^j(x_j - p_j) + o_2(|x-p|_M) \\ \quad\vdots \\ f_m(x) = f_m(p) + \sum_{j=1}^M J_m^j(x_j - p_j) + o_m(|x-p|_M) \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1(p+v) = f_1(p) + \sum_{j=1}^M J_1^j v_j + o_1(|v|_M) \\ f_2(p+v) = f_2(p) + \sum_{j=1}^M J_2^j v_j + o_2(|v|_M) \\ \quad\vdots \\ f_m(p+v) = f_m(p) + \sum_{j=1}^M J_m^j v_j + o_m(|v|_M) \end{cases}$$

2.2.2 Gradiente: - si dice matrice **gradiente** in p di f, ivi differenziabile, la matrice $M \times m$ *trasposta* di $Jf(p)$: $(G_j^i)_{\substack{1\le j\le M \\ 1\le i\le m}} = (J_1 \dots J_m) = \begin{pmatrix} J^1 \\ \vdots \\ J^M \end{pmatrix}$. Si denota con $\nabla f(p)$ o $\mathrm{grad} f(p)$.

Osservazione 16: Le sue *colonne* sono i gradienti $M \times 1$ delle funzioni componenti

$$\nabla f(p) = (\ \nabla f_1(p) \dots \nabla f_m(p)\ ).$$

Importanti ed immediate conseguenze della defizione sono:

$M = 2$, $m = 3$

$f(s,t) = {}^t(\alpha(s,t), \beta(s,t), \gamma(s,t))$

i.e. $x = \alpha(s,t)$, $y = \beta(s,t)$, $z = \gamma(s,t)$, è diff. in (s_0,t_0):

se vi sono A, B, C, D, E, F

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{\left| f(s,t) - f(P) - \begin{pmatrix} A & D \\ B & E \\ C & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-s_0 \\ t-t_0 \end{pmatrix} \right|_{\mathbb{R}^3}}{|(s,t) - P|_{\mathbb{R}^2}} = 0.$$

Cioè

$$\begin{cases} \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{|\alpha(s,t) - \alpha(P) - A(s-s_0) - D(t-t_0)|}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} = 0 \\ \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{|\beta(s,t) - \beta(P) - B(s-s_0) - E(t-t_0)|}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} = 0 \\ \lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{|\gamma(s,t) - \gamma(P) - C(s-s_0) - F(t-t_0)|}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}} = 0 \end{cases}$$

M^j_i riga

5 $\quad f = (f_1, \dots, f_m) \quad i \le m, \ j \le M$

$$\frac{f_i(p+te_j) - f_i(p)}{t} = D_p f_i e_j + \frac{\varepsilon_i}{t}$$

$$(J_p f)^j_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \qquad 0 \xleftarrow[t\to 0]{} \frac{|\varepsilon_i|}{|t|} \le \frac{|\varepsilon|_m}{|te_j|_M}$$

$$J_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \Big| \cdots \Big| \frac{\partial f}{\partial x_M}(p)\right)$$

$$f(x) - f(p) = D_p f(x-p) + \varepsilon^x, \quad \lim_{r \to 0} \sup_{|x-p| \le r} \frac{|\varepsilon^x|_m}{|x-p|_M} = 0$$

$v \ne 0_M$

$$\frac{f_i(p+tv) - f_i(p)}{t} = D_p f_i v + \frac{\varepsilon_i^v}{t}$$

$$\frac{|\varepsilon_i^v|}{|t|} \le \frac{|\varepsilon^v|_m}{|t|} = \frac{|\varepsilon^v|_m}{|tv|_M}|v|_M \le \sup_{|x-p|\le|tv|} \frac{|\varepsilon^x|}{|x-p|}|v|$$

$$J_p f v = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = D_p f v = (v \cdot \nabla_p) f$$

$$J_p \vec{f} = \begin{pmatrix} J_p f_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Teorema 2: 1) $f = (f_1, \dots, f_m) : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è differenziabile in p interno ad A se e solo se lo sono le funzioni componenti: $D_p f = (D_p f_1, \dots, D_p f_m)$.

2) Le funzioni differenziabili in p sono uno *spazio vettoriale* e D_p è *lineare* a valori operatori lineari: $$D_p(rf+g) = rD_pf + D_pg.$$

3) - Le funzioni c costanti sono differenziabili in ogni punto p: $D_p c \equiv \mathbf{0}_{m\times M}$.

- Le funzioni lineari L sono differenziabili in ogni punto p: il loro differenziale è costantemente uguale alla funzione stessa, $D_p L = L$.

4) Se f è differenziabile in p allora f è *continua* in p.

5) Se f è differenziabile in p il differenziale è *unico*:

- esistono tutte le derivate parziali di f in p e sono i coefficienti della matrice Jacobiana:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) = D_p f_i[e_j] = Jf_i(p)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{j^o\text{posto}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (Jf(p))^j_i = \langle e_j \cdot \nabla f_i(p)\rangle = (\nabla f_i(p))_j = (\nabla f(p))^i_j, \quad \text{cioè}$$

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\dots\dots\frac{\partial f}{\partial x_M}(p)\right), \quad \nabla f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, {}^t f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial\, {}^t f}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix}$$

- esistono le derivate direzionali in p per $v = (v_1, \dots, v_M) \ne 0_{\mathbf{R}^M}$: $$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v}(p) \end{pmatrix} =$$

$$= D_p f(p)[v] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_M}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(p)\dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix} = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + v_M\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) =$$

$$= \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_M\frac{\partial}{\partial x_M}\right)f(p) = (v_1, \dots, v_M)\nabla f(p) = \begin{pmatrix} \langle v \cdot \nabla f_1(p)\rangle \\ \vdots \\ \langle v \cdot \nabla f_m(p)\rangle \end{pmatrix} =: \langle v \cdot \nabla\rangle f(p)$$

$v,\ w,\ v+\rho w \in \mathbf{R}^M$ sono *non nulli*, $\rho \in \mathbf{R}$, si ha $\dfrac{\partial f}{\partial(v+\rho w)}(p) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(p) + \rho\dfrac{\partial f}{\partial w}(p)$.

2 $$\frac{|f(x)-f(p)-D_pf(x-p)|_m}{|x-p|_M} \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

$$\frac{|g(x)-g(p)-D_pg(x-p)|_m}{|x-p|_M} \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

$$|rf(x)+g(x)-rf(p)-g(p)-(rD_pf+D_pg)(x-p)|_m \le$$

$$\le |r|\,|f(x)-f(p)-D_pf(x-p)|_m + |g(x)-g(p)-D_pg(x-p)|_m$$

3 $$Lx = Lp + L(x-p) + \vec{0}_m$$

$$\frac{|\vec{0}_m|}{|x-p|_M} = 0 \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

4 $$f(x) - f(p) = L(x-p) + \varepsilon$$

$$\frac{|\varepsilon|_m}{|x-p|_M} \xrightarrow[x\to p]{} 0 \Rightarrow |\varepsilon|_m \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

$$|L(x-p)|_m \le \|L\|\,|x-p|_M \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

ESERCIZIO n. 2 Si scriva la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni: $x + 2y + 3z$; $(x+2y+3z, -x)$; $(x+2y+3z, x^2-y^3+z^4)$; $(e^{x+y+z+w}, \sin(x+\log(1+y^2+w^6)-z), xyzw)$.

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x^2-y^3+z^4 \end{pmatrix} \qquad f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$J_{(xyz)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \,\Big|\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \,\Big|\, \frac{\partial f}{\partial z}(xyz) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -3y^2 & 4z^3 \end{pmatrix}$$

addenda

$$\frac{\partial f}{\partial(1,2,3)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -3y^2 & 4z^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ 2x-6y^2+12z^3 \end{pmatrix}$$

FE 5 Es4

c- Si dica se la funzione $f(x,y) = (x^2)^{y^2+1}$ è differenziabile in $(0,0)$ e nel caso se ne calcoli il differenziale.

e- Se la funzione $e^{x+y} + \sqrt{1-\cos xy}$ è differenziabile in $(0,0)$ si calcoli $\nabla f(0,0)$.

c- $f(0,0) = 0, \quad |f(x,y)| =$

$$= f(x,y) \underset{|x|\leq 1}{\leq} x^2 \leq x^2+y^2$$

$$? \exists D_{(0,0)} f \sim (0,0)$$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |\varepsilon(x,y)| \leq x^2+y^2$$

$$\frac{|\varepsilon(x,y)|}{|(x,y)|} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

e- $f(x,y) = e^{x+y} + \sqrt{1-\cos xy} =$

$$= 1 + x + y + O((x+y)^2) + \sqrt{\frac{x^2y^2}{2} + O(x^4y^4)}$$

$$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2), \quad |xy| \leq x^2+y^2$$

$$0 \leq f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - 1 \leq x+y + O(x^2+y^2) \qquad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - x - y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq O(\sqrt{x^2+y^2}) \longrightarrow 0$$

2.3 Piano tangente ad un grafico

Piano tangente ad un grafico: $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, p interno ad A.
Se f è differenziabile in p si dice *piano tangente* al *grafico* di f in $(p, f(p))$, denotato con $T_{(p,f(p))}$, il piano M-dimensionale affine in $\mathbf{R}^{M+m}$

traslato nel punto $(p, f(p))$ del *grafico del differenziale*.

Giacitura del tangente: - il *grafico del differenziale* è un sottospazio vettoriale M-dimensionale di cui il tangente $T_{(p,f(p))}$ è il traslato. Si indica con T_p, tavolta confondendolo con il tangente.

- Considerando che $Graf D_p f = T_p = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} Id_M \\ Jf(p) \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\,(Jf(p)| - Id_m)$ e che

$$\begin{pmatrix} Id_M \\ J_p f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,0\,\dots & & \dots\,0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0\,\dots & & \dots\,0\,1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) \end{pmatrix}$$

$$(Jf(p)| - Id_{m\times m}) = D_{(p,f(p))}(f - Id_m) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) & -1\ \dots 0 \\ & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) & \underbrace{0 \dots -1}_{\text{m}} \end{pmatrix}\right\} m, \quad \text{si ha}$$

- una *base* della giacitura *del tangente* è $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{j^o\text{posto}} \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p) \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}(p), \quad 1 \leq j \leq M;$

- una *base dell'ortogonale* alla giacitura *del tangente* $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(p), \dots, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_M}(p), 0\dots, -1_{i^o\ \text{posto}}\dots 0\right)^t$, $1 \leq i \leq m$.

- Per $m = 1$ un vettore ortogonale a T_p è $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(p), \dots, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_M}(p), -1\right) \sim \begin{pmatrix} \nabla f(p) \\ -1 \end{pmatrix}$.

$D_p f$ FUNZIONE LINEARE

forma parametrica

$(v, D_p f v)$ funzione grafico di $D_p f$

forma cartesiana

$D_p f v - z = 0$ equazioni del grafico di $D_p f$

Forma parametrica
- quindi il piano tangente ad un grafico è il piano M-dimensionale affine

immagine dell'applicazione affine $v \mapsto (p, f(p)) + (Id_M, D_p f)v : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^{M+m}$,

cioè il piano M dimensionale in $\mathbf{R}^{M+m}$ descritto dai parametri $(v_1, \dots v_M)$ come segue

$$(p, f(p)) + (v, D_p f v) = (p, f(p)) + \left(v, \frac{\partial f}{\partial v}(p)\right), \text{ cioè}$$

$$(p, f(p)) + v_1 \left(e_1^{\mathbf{R}^M}, \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\right) + \dots + v_M \left(e_M^{\mathbf{R}^M}, \frac{\partial f}{\partial x_M}(p)\right)$$

$$\underline{(p, f(p))} + v_1 \left(1, 0 \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\right) + \dots + v_M \left(0, \dots, 0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_M}(p)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x, f(x)\right)_p$$

- un'altra forma parametrica usando come parametri $x = v + p$ è

$$(p, f(p)) + (x_1 - p_1) \left(1, 0 \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\right) + \dots + (x_M - p_M) \left(0, \dots, 0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_M}(p)\right), \text{ cioè}$$

$$\left(x_1, \dots, x_M, f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_M}(p)(x_M - p_M)\right).$$

$$\text{dist}(PR) \sim \text{dist}(QP)$$

$$\Updownarrow$$

Forma cartesiana
quindi il piano tangente ad un grafico è *luogo di zeri* in $\mathbf{R}^{M+m}$ della funzione

$$G(x, z) = f(p) + D_p f[x - p] - z, \; G : \mathbf{R}^{M+m} \to \mathbf{R}^m$$

$$G(x, z) = (Jf(p)|Id_{m\times m}) \begin{pmatrix} x - p \\ f(p) - z \end{pmatrix} = D_{(p, f(p))}(f - Id_m) \begin{bmatrix} x - p \\ f(p) - z \end{bmatrix} = 0_{\mathbf{R}^m} :$$

$$\text{dist}(QR) = \frac{\text{dist}(Q\, T_p)}{\text{dist}(QP)} \xrightarrow[Q \to P]{} 0$$

$$z - f(p) = J_p f\,(x - p)$$

$$(*) \begin{cases} z_1 = & f_1(p) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_M}(p)(x_M - p_M) \\ \vdots & \vdots \\ z_m = & f_m(p) + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_M}(p)(x_M - p_M) \end{cases}$$

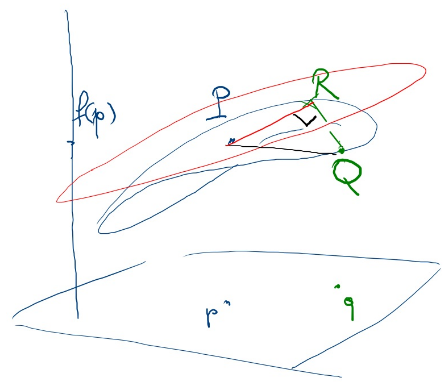
$$z - f(p) = (x - p) \cdot \nabla f(p)$$

2.4 approssimazione metrica: analogamente a quanto mostrato per le velocità di cammini (cfr. FT5-4 ultimo paragrafo), si deduce che il grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ differenziabile in p è *"approssimato al primo ordine"* nel suo punto $(p, f(p))$, dal traslato del grafico del differenziale .

$$0 = (x - p, z - f(p)) \cdot (\nabla f(p), -1)$$

Il senso dell'approssimazione è il seguente:
ricordando la nozione di distanza tra un punto ed un insieme $\text{dist}(q, A) = \inf_{a \in A} d(q, a)$, posto $P = (p, f(p))$ (quindi con T_P si indica il piano tangente in $(p, f(p))$ al grafico di f), $Q = (x, f(x))$ per $x \in \text{Dom} f$, si ha:

$$\lim_{\substack{Q \in \text{Graf} f \\ Q \to P}} \frac{\text{dist}(Q, T_P)}{\text{dist}(Q, P)} = 0.$$



Infatti, per continuità di f in p, $Q \to P$ se e solo se $x \to p$, e

$$\frac{\text{dist}(Q, T_P)}{\text{dist}(Q, P)} \leq \frac{\text{dist}(Q, T_P)}{|x - p|_M} \leq \frac{|(x, f(x)) - (x, D_p f(x - p) + f(p))|_{M+m}}{|x - p|_M} =$$

$$= \frac{|f(x) - f(p) - D_p f(x - p)|_m}{|x - p|_M} \to 0\,, \quad x \to p.$$

FE5 Es.4

b- Si calcoli il piano tangente al grafico della funzione $\operatorname{artan}(x+2y)$ nel punto $(1, 0, \frac{\pi}{4})$.

f- Si calcoli un versore normale al grafico di $\cos(x+y) - \tan(\underset{t}{x+y}) \sin xy$ nel punto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 1)$

b- $f(x,y) = \operatorname{artan}(x+2y) \quad f(1,0) = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{artan} t - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+1^2}(t-1) + o(t-1) \quad t \to 1$

$f(x,y) - f(1,0) = \frac{x-1}{2} + y + o(x-1+2y)$

$|x-1+2y| \leq \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$f(x,y) - f(1,0) = \frac{x-1}{2} + y + o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)$

f è differenziabile in $(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$

$z - f(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\, y$

$z - f(P) = (x - P) \cdot \nabla f(P)$

$z = \frac{x}{2} + y + \frac{\pi}{4} - 1$

f - $g(x,y) = \cos(x+y) - \tan(x+y)\sin xy$, $g(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}) = 1$

$x - \sqrt{\pi} = s \quad y + \sqrt{\pi} = t$, $\quad g(x,y) = \cos(s+t) + \tan(s+t)\sin(st - s\sqrt{\pi} + t\sqrt{\pi})$

$|g(x,y) - 1| = O(s+t)^2 + \left[s+t+O(s+t)^3\right] \cdot \left[(t-s)\sqrt{\pi} + o(t-s)\right] \quad s^2$

$= O\left((x-\sqrt{\pi})^2 + (y+\sqrt{\pi})^2\right)$

$z - 1 = 0 \; : \; (0, 0, 1)$

2.5 Vettori tangenti al grafico

Vettori tangenti. Che *le velocità* in $(p, f(p))$ di cammini *sul grafico* di $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, differenziabile in p, diano *tutto* $T_p f$, si deduce della regola della catena (differenziale di funzioni composte cfr. FT11) nel caso particolare di composizione con cammini (funzioni di una variabile):

Proposizione 2, regola della catena per cammini: se $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è differenziabile in p e $\gamma(t)$ è un cammino in $\mathrm{Dom} f$, derivabile per t=0, con $\gamma(0) = p$, allora $f(\gamma(t))$ è derivabile per t=0 e

$$(f \circ \gamma)'(0) = \gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \cdots + \gamma_M'(0)\frac{\partial f}{\partial x_M}(0) = Jf(p)[\gamma'(0)] = (\gamma'(0) \cdot \nabla) f(p) = \frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p).$$

$$\frac{|q|}{|u+v|} \geq \frac{|q|}{|u|+|w|}$$

$$|u+v| \leq |u|+|w|$$

Dimostrazione: per differenziabilità di f: $f(\gamma(t)) - f(p) = Jf(p)(\gamma(t) - p) + o(|\gamma(t) - p|_M)$
per derivabilità di γ: $\gamma(t) - p = \gamma'(0)t + \vec{o}(t)$, ove $|\vec{o}(t)|_M = o(t)$.
Sostituendo la seconda nella prima

$$f(\gamma(t)) - f(p) = tJf(p)(\gamma'(0)) + Jf(p)\vec{o}(t) + o(|\gamma'(0)t + \vec{o}(t)|_M)$$

- Per Cauchy-Schwarz se A è una matrice $m \times M$, $v \in \mathbf{R}^m$ si ha $|Av|_m \leq |v|_M \sqrt{\sum (A_i^j)^2}$: quindi il penultimo addendo del secondo membro è un $o(t)$.
- Poichè $o(|u + v|_M) \subseteq o(|u|_M + |v|_M)$ e se $|u|_M = o(|v|_M)$ si ha $o(|u|_M + |v|_M) = o(|u|_M)$ anche l'ultimo addendo del secondo membro è $o(t)$. Concludendo

$$f(\gamma(t)) - f(p) = tJf(p)(\gamma'(0)) + o(t), \qquad \text{cioè } \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} Jf(p)(\gamma'(0)) = \frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p).$$

Corollario: se f è differenziabile in p il suo differenziale $D_p f$ è l'applicazione lineare

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) \mapsto \frac{df \circ \gamma}{dt}(0),$$

per ogni γ cammino in $\mathrm{Dom} f$, derivabile per $t = 0$ con $\gamma(0) = p$.

Teorema 3: La giacitura del piano tangente al grafico di f in $(p, f(p))$ sono esattamente i vettori V di $\mathbf{R}^{M+m}$, oltre a quello nullo, del tipo $V = \left(v, \dfrac{\partial f}{\partial v}(p)\right)$ con $v \in \mathbf{R}^M$ non nullo:

cioè del tipo $\Gamma'(0) = \left(\gamma'(0), \dfrac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p)\right)$, $\Gamma(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t))$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v \neq 0_{\mathbf{R}^M}$.

Dimostrazione: - se $\Gamma(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t)) \in \mathrm{Graf} f$, con $\gamma(t)$ cammino derivabile per $t = 0$ e $\gamma(0) = p$, si ha per la regola della catena : $\Gamma'(0) = (\gamma'(0), D_p f \gamma'(0)) = \left(\gamma'(0), \frac{\partial f}{\partial \gamma'(0)}(p)\right) \in T_p$.

- Per quanto visto al punto 5 del teorema 2, tali vettori formano uno spazio vettoriale. In particolare per i cammini che danno le derivate parziali $\gamma_j(t) = p + te_j$, $1 \leq j \leq M$, si ha $\Gamma_j{}'(0) \sim (e_j, \partial_j f(p))$, che sono, come già osservato, una base di T_p.

2.6 Interpretazione geometrica del gradiente: equazioni del tangente ad un insieme di livello (preimmagine)

1

Gradiente come vettore nello spazio del dominio: se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ è differenziabile in p, allora $\nabla f(p)$ è *ortogonale* in p *al livello per* p, $Z = \{x \in D : \ f(x) = f(p)\}$ nel senso seguente: per ogni cammino $\gamma : I \to Z$, $\gamma(0) = p$, derivabile per $t = 0$ si ha:

$$\gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \gamma_M'(0)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = \langle \nabla f(p) \cdot \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Dimostrazione: per la regola della catena per la composizione con funzioni di una variabile si ha che $t \mapsto f(\gamma(t))$ è derivabile per $t = 0$. Inoltre:

$(f{\circ}\gamma)'(0) = \langle \nabla f(p) \cdot \gamma'(0) \rangle$, e con l'ipotesi $\gamma(t) \in Z,\ t \in I$, ovvero $f(\gamma(t)) = 0,\ t \in I$, si ha

$$\gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \gamma_M'(0)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = (f{\circ}\gamma)'(0) = 0.$$

Corollario, equazione del piano tangente ad un insieme di livello:
- sia $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ è C^1 con $\underline{\nabla f(p) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^M}}$,
se $Z = f^{-1}(\{f(p)\})$, intersecato un intorno del punto p è il grafico di una funzione reale di $(M-1)$-variabili differenziabile,
il suo piano tangente $(M-1)$-dimensionale in p è ben defnito e l'equazione di questo è:

$$\langle (x-p) \cdot \nabla f(p) \rangle = (x_1 - p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \ \cdots + (x_M - p_M)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = 0.$$

- Sia $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $m < M$, è C^1 con $\underline{\nabla f(p) \text{ di rango massimo } m}$,
se $Z = f^{-1}(\{f(p)\})$ in un intorno di p è grafico di una funzione differenziabile di $(M-m)$-variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^M$ di dimensione m e quindi ha piano tangente $M-m$ dimensionale in p, l'equazione di questo è:

$$D_p f[x-p] = \vec{0}_{\mathbf{R}^m} \text{ cioè } \begin{cases} (x_1 - p_1)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) + \ \cdots + (x_M - p_M)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_M}(p) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 - p_1)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) + \ \cdots + (x_M - p_M)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_M}(p) = 0 \end{cases}.$$

Cioè $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_m(p)$ sono una *base* per *l'ortogonale* della giacitura del piano tangente.

Ovvero:

> la giacitura del piano *tangente ad un luogo di zeri* $\{x : f(x) - f(p) = \vec{0}_{\mathbf{R}^m}\}$ in p
> è il *luogo di zeri del differenziale*: $\mathrm{Ker} Jf(p)$.

Dimostrazione corollario: - poichè Z localmente coincide con un grafico di una funzione di $(M-1)-$variabili a valori reali, ha piano tangente $M-1$ dimensionale in p.
- - Per il teorema 3 la giacitura di tale spazio tangente sono le velocità $v = (v_1, \ldots, v_M)$ dei cammini in Z passanti per p.
- - D'altronde tali velocità devono soddisfare la condizione $\langle v \cdot \nabla f(p) \rangle = 0$.
- - Poichè $\nabla f(p) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$ tale relazione definisce un sottospazio $M-1$ dimensionale che quindi coincide con la giacitura dello spazio tangente, che a priori è un suo sottospazio di egual dimensione.
- - Traslando in p si ha che l'equazione dello spazio tangente è $\langle (x-p) \cdot \nabla f(p) \rangle = 0$.
- Il caso di f a valori in $\mathbf{R}^m$, $m < M$, con $\nabla f(p)$ di rango massimo m, è del tutto analogo. Infatti il sistema definisce un sottospazio $M-m$ dimensionale che contiene il tangente anch'esso $M-m$ dimensionale.

Osservazione 17: - l'insieme di livello $Z = \{x : f(x) = f(p)\}$ è l'intersezione degli insiemi di livello $Z_i = \{x : f_i(x) = f_i(p)\}$, $1 \leq i \leq m$;
- il suo tangente $M - m$ dimensionale in p è l'intersezione dei tangenti $M - 1$ dimensionali in p agli m luoghi di zeri Z_i, $1 \leq i \leq m$.

Osservazione 18: in realtà il *teorema del Dini delle funzioni implicite*, garantisce che, nelle ipotesi fatte su f (che sia C^1 in un intorno di p, con $\nabla f(p) \neq \vec{0}$), il livello Z è effettivamente in un intorno del punto p grafico di una funzione.
Quindi è ben definito il piano tangente ($(M-1)$-dimensionale). Coincidendo la sua giacitura con le velocità dei cammini in Z e passanti per p, $\nabla f(p)$ è ortogonale ad essa.
Osservazione 19: più in generale il teorema delle funzioni implicite garantisce che il luogo di zeri Z di una funzione vettoriale $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $m < M$, C^1 , con l'ipotesi $\nabla f(p)$ di *rango massimo* m, ha intersezione con un intorno di p che è grafico di una funzione differenziabile di $(M - m)$-variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^M$ di dimensione m.
Quindi $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_m(p)$ dà una *base* per *l'ortogonale* alla giacitura $M - m$ dimensionale del tangente a Z in p.
Quindi nelle ipotesi fatte la giacitura del tangente ad un luogo di zeri in p è il luogo di zeri del differenziale $\mathrm{Ker} Jf(p)$

Un'altra importante proprietà, quando non nullo, del gradiente in un punto p, come vettore del dominio, è quella di individuare in p la direzione di massima crescita della funzione:
Massima pendenza necessaria. Se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ è differenziabile in p e $\nabla f(p) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$ allora: $\dfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|_M}$ è la direzione di massima crescita di f in p. Ovvero per ogni v, $|v|_M = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) \leq |\nabla f(p)|_M = \left\langle \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|_M} \cdot \nabla f(p) \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|_M}}(p).$$

Dimostrazione: per differenziabilità (cfr. teorema 2-5): $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle v \cdot \nabla f(p) \rangle$, quindi se $|v|_M = 1$ per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (cfr. FT 2) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) \leq |\nabla f(p)|_M$.

Vale in un certo senso il viceversa, di dimostrazione più impegnativa , che dà una condizione sufficiente per la differenziabilità in un punto p usando le derivate direzionali solo nel punto p:

Massima pendenza sufficiente. Sia f è Lipschitziana di costante L: $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|_M} \leq L$.
Se esiste v, $|v|_M = 1$ per cui esiste $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) = L$, allora: f è differenziabile in p e $\nabla f(p) = Lv$.

FES Es 5

- Si trovi la tangente nel punto $(1,1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7+y^7-2=0$

- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x,y,z): \ \log(x^2+y^2+e)=e^z\}$ in $(0,0,1)$.

- $f(x,y) = x^7+y^7-2$, la condizione $f=0$ definisce il grafico $y=\sqrt[7]{2-x^7}$ derivabile di una variabile, quindi differenziabile. Pertanto l'equazione della retta tangente è

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 0,$$

$$7(x-1) + 7(y-1) = 0, \quad x+y=2$$

- L'insieme è il grafico di $z=\log(\log(x^2+y^2+e))$ assumendo la differenziabilità di $\log(x^2+y^2+e)-e^z = f(x,y,z)$, poiché $\nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$, la retta ortogonale a tale insieme in $(0,0,0)$ è $t\cdot\nabla f(000)$, $t\in\mathbb{R}$ cioè $\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ ovvero di equazioni $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

FE5

ESERCIZIO n. 4 • a- Si determini il piano normale in $(1,1,2)$ all'insieme definito da $xyz = 2$, $xy + xz + yz = 5$.

4 - $f(x,yz) = (\overset{f_1}{xyz}, \overset{f_2}{xy + xz + yz})$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

si assume la differenziabità di f

essendo $Z = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = (2,5)\}$ un grafico

$\left(p = xy = \frac{2}{z},\ s = x+y = \left(5 - \frac{2}{z}\right)\frac{1}{z} \quad x,y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right)$

poichè $J_{(112)}f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ è di rango massimo

la retta tangente ha equazioni $Jf \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2(x-1) + 2(y-1) + z - 2 = 0 \\ 3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6(x-1) + 6(y-1) + 3(z-2) = 0 \\ 6(x-1) + 6(y-1) + 4(z-2) = 0 \end{cases}$$

cioè $(1,1,2) + t(1,-1,0)$, quindi il piano normale

ha epuazione $x - 1 - (y-1) = 0 : x = y$

2.7 Tangente ad immagini

Osservazione 20: - oltre che come preimmagini (luoghi di zeri o insiemi di livello) di funzioni conviene spesso descrivere un sottoinsieme di $\mathbf{R}^m$ come *immagine* di una funzione vettoriale. Per esempio il segmento in $\mathbf{R}^3$ di estremi $(1,2,3)$ ed $(4,5,6)$ può essere descritto come immagine della funzione lineare affine $(1,2,3)+t((4,5,6)-1,2,3)) = (1,2,3)+t(3,3,3)$, ristretta ai $t \in [0;1]$. O più in generale una "curva materiale" può essere vista come immagine (sostegno) di un cammino.

- Per tali insiemi visti come immagine, come per i luoghi di zeri, è utile individuare in termini delle funzioni in gioco e delle loro derivate parziali i piani tangenti e ortogonali all'insieme.

Jacobiano nel codomino: per $m > M$, se $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è differenziabile in p, con $Jf(p)$ di rango massimo M,

per ogni $\Gamma : (a;b) \to D$ con $\Gamma(c) = p$, $\Gamma'(c) = v \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^m} \text{ è vettore tangente al cammino } t \mapsto f(\Gamma(t)) \text{ in } f(p).$$

Dimostrazione: è lo stesso argomento usato nel teorema 3, per veder i vettori tangenti a un grafico, basato sulla regola della catena per la composizione con cammini (proposizione 2). Si ha infatti

$$(f_o\Gamma)'(c) = \Gamma_1(c)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \Gamma_M(c)\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = Jf(p)\Gamma'(c) \neq \vec{0}_{\mathbf{R}^m} \text{ per iniettività.}$$

Piano tangente ad un immagine: per $m > M$, sia $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ differenziabile in p, con $Jf(p)$ di rango massimo M.

Se l'immagine di f intersecata un intorno di $f(p)$ è il grafico di una funzione differenziabile di M variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^m$ di dimensione $m-M$, *essendo ben definito il piano tangente* M dimensionale ad $\mathrm{Im} f$ in $f(p)$, si ha che una *base della sua giacitura* è data dalle M derivate parziali in p di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_M}(p)$$

ovvero dalle colonne di $Jf(p)$ ovvero dalle righe di $\nabla f(p)$.

Ovvero

la giacitura del piano *tangente all' immagine* $\mathrm{Im} f$ in $f(p)$
è *l'immagine del differenziale in* p: $\mathrm{Im} Jf(p)$.

Quindi la forma parametrica del piano tangente all'immagine è:

$$f(p) \; + \; s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + s_M\frac{\partial f}{\partial x_M}(p) = Jf(p)s, \quad s = (s_1, \dots, s_M) \in \mathbf{R}^M$$

Dimostrazione: - Essendo p interno a D vi è $r > 0$ per cui $\Gamma^{(j)}(t) = p+te_j$, $|t| < r$, $1 \leq j \leq M$, sono a valori in D: quindi $f(\Gamma^{(j)}(t))$ sono ben definiti e $f(\Gamma^{(j)}(0)) = p$, $\left(f_o\Gamma^{(j)}\right)'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$.

- Per la proposizione 3 tali vettori velocità, e lo spazio da essi generato, sono contenuti nella giacitura dello spazio tangente in $f(p)$ ad $\mathrm{Im}\, f$. Avendo, per ipotesi, essa dimensione M, viene a coicindere con lo spazio generato dalle derivate parziali in p: infatti

- per ipotesi gli M vettori $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_M}(p) \in \mathbf{R}^m$ sono lineramente indipendenti e generano un sottospazio di $\mathbf{R}^m$ di dimensione M.

Osservazione 21: per le immagini invece del teorema del Dini vi è il *teorema del rango*: se $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, $M < m$, è differenziabile in p, con $Jf(p)$ di rango massimo M, allora f *ristretta ad un intorno U di* p ha immagine che è il grafico di una funzione differenziabile di M variabili a valori in qualche sottospazio di $\mathbf{R}^m$ di dimensione $m-M$, quindi *è ben definito il piano tangente* M dimensionale ad $\mathrm{Im}_U f$ in $f(p)$, e una *base della sua giaciutura* è quindi data dalle M derivate parziali in p di f.

FE 5 Es 4

d- Si calcoli il piano tangente all'immagine della funzione $F(u,v) = (u-v, uv, u+v)$ nel suo punto $F(1,1) = (0,1,2)$.

- $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, Im F è un grafico

$$u - v = d \quad u + v = s$$

$$u = \frac{d+s}{2}, \quad v = \frac{s-d}{2}$$

$$\operatorname{Im} F = \operatorname{Im}\left(d, \frac{s^2-d^2}{4}, s\right)$$

Assumendo F differenziabile, poiché

$$J_{(u,v)}F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è di rango massimo, e $J_{(1,1)}F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

il piano tangente è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2.8 Il differenziale del determinante

- **Matrice dei cofattori, matrice aggiunta** Se matrice A è una matrice quadrata $m \times m$, si definiscono: la matrice $cofA$ dei *cofattori* $(cofA)^k_h = (-1)^{h+k} det A^{\not k}_{\not h}$
e la sua trasposta, la matrice *aggiunta* $adgA$, $(adjA)^k_h = (-1)^{h+k} det A^{\not h}_{\not k}$.
Se A è invertibile $(detA)A^{-1} = adjA$.

- **Prodotti scalari tra matrici** identificando lo spazio $\mathcal{M}_{h\times m}$ delle matrici $h \times m$ con $\mathbf{R}^{hm}$, *e.g.* allineando verticalmente le colonne per ottenere vettori colonna $A = (A^j_i) \mapsto {}^t(A^1_1, \ldots, A^1_h, A^2_1, \ldots, A^m_1, \ldots, A^m_h)$, e orizzontalemente le righe per ottenere vettori riga $A \mapsto (A^1_1, \ldots, A^m_1, A^1_2, \ldots, A^1_h, \ldots, A^m_h)$, il prodotto scalare in $\mathbf{R}^{hm}$ diventa un prodotto scalare $\cdot_{\mathcal{M}}$ tra matrici $h \times m$: $\langle A \cdot B \rangle_{\mathbf{R}^{hm}} = \sum_i \sum_r A^i_r B^i_r = tr\, {}^t\!AB =: A \cdot_{\mathcal{M}} B$
corrispondente al prodotto righe per colonne

$$\begin{aligned} tr\, {}^t\!AB &= (({}^tA)^1_1, \ldots, ({}^tA)^h_1, ({}^tA)^1_2, \ldots, ({}^tA)^1_m, \ldots, ({}^tA)^h_m)\ {}^t(B^1_1, \ldots, B^1_h, B^2_1, \ldots, B^m_1, \ldots, B^m_h) = \\ &= (A^1_1, \ldots, A^1_h, A^2_1, \ldots, A^m_1, \ldots, A^m_h)\ {}^t(B^1_1, \ldots, B^1_h, B^2_1, \ldots, B^m_1, \ldots, B^m_h) \end{aligned}.$$

- **Derivate del determinante di un cammino di matrici:** sia $A : I \to \mathcal{M}_{m\times m}$ cammino di matrici, con $A^j_i(t)$ derivabili. Essendo $\det A(t)$ un polinomio nelle funzione coefficienti, è derivabile e: $$(detA)' = cofA \cdot_{\mathcal{M}} A' = tr(adjA\ A').$$

Differenziale del determinante di una matrice La funzione polinomiale

$$\det : \mathcal{M}_{m\times m} \to \mathbf{R},\ A = \{A^j_i\},\ \det(A) = \sum_{j_p \neq j_q \text{ se } p\neq q,\ 1}^{m} \text{segno}(j_1, \ldots, j_m) A^{j_1}_1 \cdot \cdots \cdot A^{j_m}_m$$

è differenziabile e, considerando le matrici vettori colonna $H \sim {}^t(H^1_1, \ldots, H^1_m, \ldots, H^m_1, \ldots, H^m_m)$:

$$\begin{aligned} (J\det(A))\, H &= tr(adjAH) = cofA \cdot_{\mathcal{M}} H = \nabla\det(A) \cdot_{\mathcal{M}} H \\ (J\det(A)) &= adjA = ((adjA)^1_1, \ldots, (adjA)^m_1, \ldots, (adjA)^1_m, \ldots, (adjA)^1_1) \text{ come riga,} \\ (\nabla\det(A)) &= cofA = {}^t((cofA)^1_1, \ldots, (cofA)^m_1, \ldots, (cofA)^1_m, \ldots, (cofA)^1_1) \text{ come colonna} \end{aligned}$$
$$\frac{\partial\det}{\partial A^j_i}(A) = (cofA)^j_i = (adjA)^i_j.$$

Dimostrazione: - per la differenziabilità dei polinomi in più variabili conviene usare il teorema del differenziale totale. Per una dimostrazione induttiva usando solo la definzione di differenziabilità, basta mostrare che il prodotto di due funzioni coordinate è differenziabile:
$(x_i + h_i)(x_j + h_j) = x_ix_j + x_ih_j + h_ix_j + h_ih_j$, $x_ih_j + h_ix_j$ è lineare in h, e $h_ih_j = o(|h|_m)$.
- Si usa il corollario alla proposizione 2, componendo det, con un cammino di matrici, e la formula della derivata del determinante di una cammino di matrici.
Alternativa: la matrice jacobiana $1 \times m^2$ (riga) di det, e la sua trasposta, matrice gradiente $m^2 \times 1$ (colonna), sono determinate dalle derivate parziali rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^{m^2}$, corrisponenti alle m^2 matrici $B(i,j)$, $m \times m$, con solo la componente $B(i,j)^j_i$ eguale ad 1 e le altre nulle, ovvero con solo la colonna j^a non nulla uguale a $e^i_{\mathbf{R}^m}$ (base canonica di $\mathbf{R}^m$):

$$\frac{\partial\det}{\partial A^j_i}(A) = \frac{d}{dt}\left(\det(A + tB(i,j))\right)_{t=0} = tr(adjAB(i,j)) = tr(\vec{0}|\ldots|\vec{0}|(adjA)^i{}_{\text{colonna } j^a}|\vec{0}|\ldots|\vec{0}) = \\ = (adjA)^i_j$$

<u>Esercizio:</u> sia $(F_1, \ldots, F_m) = F = F(t,x) : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, differenziabile, $F_i \in C^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^m)$, $1 \le i \le m$, con $F(0,x) = x$. Posto $v(x) =: \dfrac{\partial F}{\partial t}(0,x) = (v_1(x), \ldots, v_m(x))$, $J_xF(t,x)$ la matrice jacobiana delle derivate rispetto alle x, si calcoli $\dfrac{\partial \det J_xF}{\partial t}(0,x)$ in termini delle derivate parziali prime di v.

2.9 Differenziale e gradiente tangenziali 1:

Notazioni per le matrici: 1- Se A è una matrice $h \times k$ con A_i^j si indica la sua componente di i-esima riga e j-esima colonna: considerando gli elementi di $\mathbf{R}^h$ e di $\mathbf{R}^k$ come colonne, ed indicando le rispettive basi canoniche con $\mathbf{e}_i^{\mathbf{R}^h}$ e $\mathbf{e}_j^{\mathbf{R}^k}$, si ha $A_i^j = {}^t\mathbf{e}_i^{\mathbf{R}^h} A \mathbf{e}_j^{\mathbf{R}^k}$.

2- Con A_i si indica la i-esima riga, con A^j la j-esima colonna: $A_i = {}^t\mathbf{e}_i^{\mathbf{R}^h} A$, $A^j = A\mathbf{e}_j^{\mathbf{R}^k}$.

3- Siano dati: A matrice $h \times k$, due *multi-indici crescenti* di numeri naturali non nulli: $I = (i_1, \dots, i_r)$, $r \le h$, $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le h$ e, rispettivamente, $J = (j_1, \dots, j_s)$, $s \le k$, $1 \le j_1 < \cdots < j_s \le k$.

- - Con A_I o $A_{i_1,\dots,i_r}$ rispettivamente A^J o $A^{j_1,\dots,j_s}$, si indicano le matrici $r \times k$ ed $h \times s$ ottenute selezionando le righe $i_1 \dots i_r$ rispettivamente le colonne $j_1 \dots j_s$;

- - con A_I^J o $A_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s}$ la matrice $r \times s$ ottenuta selezionando sia le r righe che le s colonne;

- - con $A_{\not{I}}$ o $A_{\not{i}_1,\dots,\not{i}_r}$, $\quad A^{\not{J}}$ o $A^{\not{j}_1,\dots,\not{j}_s}$, $\quad A_{\not{I}}^{\not{J}}$ o $A_{\not{i}_1,\dots,\not{i}_r}^{\not{j}_1,\dots,\not{j}_s}$ le matrici $(h-r) \times k$, $h \times (k-s)$, $(h-r) \times (k-s)$ ottenute nei vari casi scartando le righe o le colonne degli indici barrati.

- - Quindi per una matrice quadrata A invertibile si ha $\left[A^{-1}\right]_i^j = (-1)^{i+j} \dfrac{\det A_{\not{j}}^{\not{i}}}{\det A}$.

4- Per la sostituzione con una colonna v, della colonna j^a di una matrice A, $h \times k$ si usa la notazione $A\left[v/A^j\right]$, o $(\dots|A^{j-1}|V|A^{j+1}\dots)$. Analogamente per le righe.

- Quindi la regola di Cramer per le soluzioni u del sistema lineare $Au = v$ $h \times h$, ovvero $u_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{h} (-1)^{i+j} v_j \det A_{\not{j}}^{\not{i}} (\det A)^{-1}$ diventa, essendo la sommatoria lo sviluppo del determinante per la i^a colonna della matrice $A[v/A^i]$:

$u_i = \dfrac{\det A[v/A^i]}{\det \text{A}}$. Per un sistema matriciale $AU = V$, $U = A^{-1}V$: $\; U_i^j = \dfrac{\det A[V^j/A^i]}{\det A}$.

Notazione: - usandosi spesso le notazioni $z = f(x)$, ovvero $\begin{cases} z_1 = & f_1(x_1, \dots, x_M) \\ \vdots & \\ z_m = & f_m(x_1, \dots, x_M) \end{cases}$, per indicare una funzione $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, e $\dfrac{dz}{dx}$, per la derivata prima di f rispetto a x, nel caso in cui f sia di una variabile reale, è suggestivo usare per la matrice Jacobiana, similmente per la matrice gradiente, e le loro sottomatrici, le notazioni: $\quad Jf(p) = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial(z_1, \dots, z_m)}{\partial(x_1, \dots, x_M)}$,

$$(Jf(p))_{i_1 \dots i_h}^{j_1 \dots j_k} = \frac{\partial z_{i_1 \dots i_h}}{\partial x_{j_1 \dots j_k}} \;, \quad (Jf(p))_{\not{i}_1 \dots \not{i}_h}^{\not{j}_1 \dots \not{j}_k} = \frac{\partial z_{\not{i}_1 \dots \not{i}_h}}{\partial x_{\not{j}_1 \dots \not{j}_k}} = \frac{\partial(z_{\not{i}_1}, \dots, z_{\not{i}_h})}{\partial(x_{\not{j}_1}, \dots, x_{\not{j}_1})},$$

in breve per $I = \{i_1 < \cdots < i_h]\}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_k\}$: $(Jf(p))_I^J = \dfrac{\partial z_I}{\partial x_J}$, $\quad (Jf(p))_{\not{I}}^{\not{J}} = \dfrac{\partial z_{\not{I}}}{\partial x_{\not{J}}}$.

- Selezionando le righe $I = i_1 < \cdots < i_h$ non si considerano tutte le funzioni componenti di f, ma solo le proiezioni di f sugli h assi coordinati scelti I: $(Jf(p))_I = Jf_I(p)$.

- La selezione delle colonne con $J = j_1 < \cdots < j_k$ piuttosto significa che si sta considerando

- - la matrice associata alla restrizione di $D_p f$ al sottospazio generato da $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$,

- - o meglio, *coerentemente alla definizione di derivata parziale*, lo Jacobiano della funzione di k variabili ottenuta *componendo* f con la parametrizzazione del sottospazio affine $p + x_{j_1}e_{j_1} + \cdots + x_{j_k}e_{j_k}$: $(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \mapsto f(p + x_{j_1}e_{j_1} + \cdots + x_{j_k}e_{j_k})$.

Differenziale tangenziale 1: - Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione k di $\mathbf{R}^M$: $f : A = \overset{o}{A} \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ si dice *differenziabile in* $p \in A$ *lungo* W se la sua restrizione $f_{|W}$ al sottospazio affine $p + W$, munito della norma indotta da quella di $\mathbf{R}^M$, è differenziabile in p.
- Il suo differenziale si dice differenziale tangenziale di f in p lungo W.
Si indica con $D^W f(p) : W \to \mathbf{R}^m$, o con $\dfrac{\partial f}{\partial W}(p)$. Se $W = \{tw\}_{t\in\mathbf{R}}$, $|w|_M = 1$: $\dfrac{\partial f}{\partial W} \sim \dfrac{\partial f}{\partial w}$.
- Se poi f è differenziabile in p, il suo differenziale lungo W è la restrizione a W di $D_p f$.

Osservazione 22: se una funzione g coincide con f su $U \cap W$, ove U è un intorno di p, allora anch'essa è differenziabile in p lungo W e $D^W_p g = D^W_p f$.

Osservazione 23: - se non si introduce una base su W *non ha senso parlare di matrice Jacobiana di f o di gradiente* lungo W. Può essere utile, nella pratica, assumendo che f abbia un'estensione ad un intorno in $\mathbf{R}^M$ di p differenziabile in p, riferirsi alle coordinate dello spazio $\mathbf{R}^M$ ambiente, ed usando P^W *la proiezione ortogonale su* W, $({}^tP = P\ PP = P, P_{|W} = Id_W)$ definire due matrici, rispettivamente $m \times M$ e $M \times m$, come segue:
Matrice Jacobiana ambiente e gradiente ambiente: sono rispettivamente:

$$J^W f(p) =: Jf(p)P^W \sim D_p f P^W \quad (D_p f P^W_{|W} = D_p f_{|W} = D^W_p f)\ , \quad \nabla^W f(p) =: P^W \nabla f(p).$$

Osservazione 24: - data una base $\beta = \{w_1, \ldots, w_k\} \subset \mathbf{R}^M$ di W, lo si identifica con $\mathbf{R}^k$.
- Si ha che f è differenziabile in p lungo W se la funzione $f^\beta \sim f_{|W}$ da $\mathbf{R}^k$ in $\mathbf{R}^m$ data da $p + s_1w_1 + \cdots + s_kw_k \mapsto f(p + s_1w_1 + \cdots + s_kw_k)$ è differenziabile in $\vec{0}_{\mathbf{R}^k}$.
- La matrice Jacobiana $J_{0_{\mathbf{R}^k}} f^\beta$ di f^β è la matrice Jacobiana $J^\beta_p f$ associata nella base β a $D^W f(p)$. È una matrice $m \times k$.
- La relazione tra $J^\beta_p f$ e $D^W_p f$ è la seguente: dato $w = s_1w_1 + \cdots + s_kw_k$, $s = {}^t(s_1, \ldots, s_k)$
$J^\beta_p f s = f^\beta(s) - f^\beta(0_{\mathbf{R}^k}) + o(|s|_k) = f(p+w) - f(p) - o(|w|_M) = D^W_p f w = D^W_p f(w_1|\ldots|w_k)s$,

quindi $$J^\beta f(p) = D^W_p f(w_1|\ldots|w_k) = \big(D^W_p f w_1|\ldots|D^W_p f w_k\big), \text{ matrice } m \times k.$$

- Se poi β è *ortonormale* per il prodotto scalare su W dato da quello di $\mathbf{R}^M$ ha senso parlare di gradiente tangenziale $\nabla^\beta f(p) = \nabla f^\beta(0_{\mathbf{R}^k}) = \begin{pmatrix} {}^tD^W_p f w_1 \\ \vdots \\ {}^tD^W_p f w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tw_1 \\ \vdots \\ {}^tw_k \end{pmatrix} \nabla f(p)$, matrice $k \times m$.