Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 11
TEOREMI SULLE DERIVATE E LA DIFFERENZIABILITÀ

1 Teoremi di calcolo differenziale

Teorema 1, del differenziale totale. - Sia $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$, p interno a D:
se f ha tutte le derivate parziali in un intorno di p, continue in p allora
è differenziabile nel punto p.
- Più in generale: se f ha derivate direzionali nei punti di una palla centrata in p, rispetto a M vettori indipendenti $v^1, \dots, v^M$, che siano continue in p allora
è differenziabile nel punto p.

Dimostrazione: si tratta di valutare, relativamente ad $h = (h_1, \dots, h_M) = h_1 e^1 + \dots + h_M e^M$, per $|h| \to 0$, l'errore di approssimazione lineare

$$E(h) = f(x+h) - f(p) - \langle h \cdot \nabla f(p) \rangle = f(x+h) - f(p) - \sum_{k=1}^{M} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p).$$

- Sia $e^1, \dots, e^M$ la base canonica di $\mathbf{R}^M$, si esprime l'incremento $f(x+h) - f(p)$, come somma di incrementi parziali lungo le direzioni degli assi
$f(p+h) - f(p) =$

$$= f(p+h) - f(p+h_1e^1 + \dots + h_{M-1}e^{M-1}) + f(p+h_1e^1 + \dots + h_{M-1}e^{M-1}) - \dots$$
$$\dots + f(p+h_1e^1 + h_2e^2) - f(p+h_1e^1) \quad + \quad f(p+h_1e^1) - f(p) = .$$
$$= \sum_{k=2}^{M} \left[f(p+h_1e^1 + \dots + h_ke^k) - f(p+h_1e^1 + \dots + h_{k-1}e^{k-1}) \right] + \left[f(p+h_1e^1) - f(p) \right]$$

Ogni addendo $f(p+h_1e^1 + \dots + h_ke^k) - f(p+h_1e^1 + \dots + h_{k-1}e^{k-1})$ si vede come incremento $g_k(h_k) - g_k(0)$ di una funzione della sola variabile h_k, e si applica il teorema di Lagrange:

$$f(p+h_1e^1 + \dots + h_ke^k) - f(p+h_1e^1 + \dots + h_{k-1}e^{k-1}) = h_k g_k'(\eta_k) = [0 < |\eta_k| < |h_k|]$$
$$= h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p+h_1e^1 + \dots + h_{k-1}e^{k-1} + \eta_k e^k).$$

per cui si ha

$$f(p+h) - f(p) = \sum_{k=1}^{M} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p+h_1e^1 + \dots + h_{k-1}e^{k-1} + \eta_k e^k).$$

- Pertanto $E(h) =$

$$= f(x+h) - f(p) - \sum_{k=1}^{M} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = \sum_{k=1}^{M} h_k \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(p+h_1e^1 + \dots + h_{k-1}e^{k-1} + \eta_k e^k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right].$$

Quindi $\dfrac{E(h)}{|h|} = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} \frac{h_k}{|h|} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(p+h_1e^1 + \dots + h_{k-1}e^{k-1} + \eta_k e^k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right] \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0,$

poichè $\dfrac{h_k}{|h|}$ sono limitati, e le derivate parziali sono continue in p.

<u>Osservazione 1:</u> l'ipotesi del teorema è sufficiente per la differenziabilità ma non necessaria. Già per funzioni reali di una variabile reale, vi sono funzioni differenziabili, nel caso cioè derivabili, ma con funzione derivata non continua:

$f(x,y)$

$p = (a,b)$

$h = (u,v)$

$E(u,v) = f(a+u, b+v) - f(a,b) - \partial_x f(a,b) \cdot u - \partial_y f(a,b) \cdot v$

$f(a+u, b+v) - f(a+u, b) +$

$+ f(a+u, b) - f(a,b)$ $\underset{=}{\text{LAGRANGE}}$

$= \partial_y f(a+u, \xi) \cdot v +$ $(0 < |\xi - b| < |v|)$

$\partial_x f(\eta, b) \cdot u$ $(0 < |\eta - a| < |u|)$

$|E(u,v)| \le |\partial_x f(a,b) - \partial_x f(\eta, b)||u| +$

$|\partial_y f(a,b) - \partial_y f(a+u, \xi)||v|$

Esempio 1: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} x \neq 0 \\ 0 x = 0 \end{cases}$: $\exists f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x) - f(0)x = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, ma per $x \neq 0$ si ha $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ che per $x \to 0$ non ha limite.

La funzione differenziale: Sia A aperto di $\mathbf{R}^M$. Sia $D^1(A)$ lo spazio vettoriale delle funzioni differenziabili in ogni punto di A. Sia f una funzione a valori in $\mathbf{R}^m$ e differenziabile in ogni punto di A.
- La funzione che associa ad un punto $x \in A$ la funzione lineare differenziale $D_x f$ di f in quel punto si dice **funzione differenziale** o *funzione tangente* della funzione f:
Tale funzione è del tipo

$$Df : A \to \mathcal{L}in(\mathbf{R}^M, \mathbf{R}^m),\ x \mapsto D_x f.$$

- Associando alle funzioni lineari da $\mathbf{R}^M$ in $\mathbf{R}^m$ ($\mathcal{L}in(\mathbf{R}^M, \mathbf{R}^m)$) la corispondente matrice $m \times M$ si ha la **funzione Jacobiana** da A in $\mathcal{M}_{m\times M}$ data da

$$x \in A \mapsto Jf(x) \in \mathcal{M}_{m\times M} \sim (\partial_1 f_1(x), \ldots, \partial_M f_1(x), \ldots, \partial_1 f_m(x), \ldots, \partial_k f_m(x)) \in \mathbf{R}^{mM}.$$

- Trasponendo si ha la **funzione gradiente**

$$x \mapsto \nabla f(x) \in \mathcal{M}_{M\times m}.$$

Esempi: 2 - $A = \mathbf{R}^M$, e si la funzione $f(x) = Lx$ lineare da $\mathbf{R}^M$ in $\mathbf{R}^m$. La funzione differenziale è costante:

$$\text{per ogni } x \in A \text{ si ha } D_x f = L.$$

3 - si consideri in $\mathbf{R}^M$ la distanza dall'origine: $r(x) = |x|_M = \sqrt{\langle x \cdot x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_M^2}$.

$\nabla |x|^2 = 2x$

- - Si ha che $r^2(x) = |x|_M^2 = \langle x \cdot x\rangle = x_1^2 + \cdots + x_M^2$ è continua con derivate parziali continue $\frac{\partial r^2}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, quindi è differenziabile in $\mathbf{R}^M$ e $\nabla r^2(x) = 2x$.
Quindi la *funzione differenziale di* r^2, è il doppio dell'identità su $A = \mathbf{R}^M$:

$$Dr^2 = 2Id_{\mathbf{R}^M}, \quad D_x r^2 = 2\,{}^t x$$

che associa ad ogni $x \in A = \mathbf{R}^M$ il *differenziale* di r^2 *in* x, che è la funzione lineare da $\mathbf{R}^M$ ad $\mathbf{R}$, data dal prodotto scalare con $2x$:

$$v \mapsto D_x r^2(v) = 2\langle v \cdot \nabla r^2(x)\rangle = 2\langle v \cdot x\rangle.$$

- - La funzione r è continua, ha derivate parziali $\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2r}\frac{\partial r^2}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|_M}$ continue in $A = \mathbf{R}^M \setminus \{\vec{0}_{\mathbf{R}^M}\}$. Quindi è ivi differenziabile, e $\nabla r(x) = \frac{x}{|x|_M} = \widehat{x}$, il *versore posizione.*

$\nabla |x| = \frac{x}{|x|}$

La *funzione differenziale* è quindi

$$A \ni x \mapsto \frac{{}^t x}{|x|_M}, \text{ con azione lineare } v \mapsto \frac{{}^t x}{|x|_M} v = \left\langle v \cdot \frac{x}{|x|_M}\right\rangle.$$

$S = \frac{Q + {}^tQ}{2}$

4- Analogamente per una forma quadratica in $\mathbf{R}^M$: $\mathcal{Q}(x) = \langle x \cdot Qx\rangle = \sum_{h,k=1}^{M} Q_{hk} x_h x_k =$
$= \sum_{h=1}^{M} Q_{hh} x_h^2 + \sum_{h<k} (Q_{hk} + Q_{kh}) x_h x_k$, si ha $\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x_i}(x) = 2Q_{ii}x_i + \sum_k (Q_{ik} + Q_{ki}) x_k = ((Q + {}^tQ)x)_i$.
Per il teorema del differenziale totale è differenziabile, e $\nabla \mathcal{Q}(x) = (Q + {}^tQ)x$, cioè $D\mathcal{Q} = (Q + {}^tQ)$, $D_x \mathcal{Q}(v) = \langle v \cdot (Q + {}^tQ)x\rangle$.

$\nabla x \cdot_2 x = (Q + {}^tQ)x = 2Sx$

5- $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ha derivate parziali continue $\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$. Quindi è differenziabile $J_{(r,\varphi)}f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{f} \mid f^{\perp} \end{pmatrix}$.

Teorema 2, di Schwarz, seconda versione: se f è differenziabile in p, esistono le sue derivate parziali in ogni punto di un intorno di p, differenziabili in p, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dimostrazione: - come nella prima versione del teorema (FT 10 teorema 1) ci si riduce a una funzione $g(x,y) = f(p + xe_i + ye_j) = f(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i + x, \ldots, p_j + y, \ldots, p_M)$, di due variabili, con $p = (0,0)$. Basta quindi dimostrare che se esistono $\partial_x g$, $\partial_y g$, in un intorno di $(0,0)$, differenziabili in $(0,0)$, allora $\partial_y \partial_x g(0,0) = \partial_x \partial_y g(0,0)$.

- Si considerino le due espressioni del doppio rapporto incrementale:

$$RR(x,y) =: \frac{\frac{g(x,y)-g(0,y)}{x} - \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x}}{y} =$$

$$= \frac{g(x,y) - g(0,y) - g(x,0) + g(0,0)}{xy} = \frac{g(x,y) - g(x,0) - g(0,y) + g(0,0)}{xy} =$$

$$= \frac{\frac{g(x,y)-g(x,0)}{y} - \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y}}{x}, \text{ e } \quad \begin{array}{l} RR(x,y) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{\partial_x g(0,y) - \partial_x g(0,0)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} \partial^2_{yx} g(0,0), \\ RR(x,y) \xrightarrow[y\to 0]{} \dfrac{\partial_y g(x,0) - \partial_y g(0,0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \partial^2_{xy} g(0,0) \end{array}$$

- Per evitare lo studio di tali limiti iterati, si considerano i numeratori delle due espressioni del doppio rapporto incrementale usando Lagrange per esprimerli con le derivate prime, e quindi ci si restringe a $x = y$ e si usa la differenzibilità di queste in $(0,0)$.

$$xyRR(x,y) = \begin{cases} g(x,y) - g(0,y) - (g(x,0) - g(0,0)) \\ g(x,y) - g(x,0) - (g(0,y) - g(0,0)) \end{cases} =$$

fissato y, applicando il teorema di Lagrange alle funzioni
$\psi(x) = g(x,y) - g(0,y) - g(x,0) + g(0,0)$, nulle per $x = 0$,
e fissato x, alle funzioni $\phi(y) = g(x,y) - g(x,0) - g(0,y) + g(0,0)$, nulle per $y = 0$,

$$= \begin{cases} x\partial_x g(\sigma,y) - x\partial_x g(\sigma,0) & |\sigma| = |\sigma(x,y)| \le |x| \\ y\partial_y g(x,\theta) - y\partial_y g(0,\theta) & |\theta| = |\theta(x,y)| \le |y| \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x[(\partial_x g(\sigma,y) - \partial_x g(0,0)) - (\partial_x g(\sigma,0) - \partial_x g(0,0)) & |\sigma| \le |x| \\ y[(\partial_y g(x,\theta) - \partial_y g(0,0)) - (\partial_y g(0,\theta) - \partial_y g(0,0))] & |\theta| \le |y| \end{cases}.$$

- In particolare ponendo $\underline{x = y}$ si ottiene

$$x^2 RR(x,x) = \begin{cases} x[(\partial_x g(\sigma,x) - \partial_x g(0,0)) - (\partial_x g(\sigma,0) - \partial_x g(0,0)) & |\sigma(x,x)| \le |x| \\ x[(\partial_y g(x,\theta) - \partial_y g(0,0)) - (\partial_y g(0,\theta) - \partial_y g(0,0))] & \theta(x,x)| \le |x| \end{cases}$$

quindi per differenziabilità delle derivate parziali prime in $(0,0)$

$$= \begin{cases} x[\underline{\sigma\partial^2_{xx} g(0,0)} + x\partial^2_{yx} g(0,0) + o(\sqrt{\sigma^2 + x^2}) - \underline{\sigma\partial^2_{xx} g(0,0)} + o(\sigma)] & |\sigma| \le |x| \\ x[x\partial^2_{xy} g(0,0) + \underline{\theta\partial^2_{yy} g(0,0)} + o(\sqrt{x^2 + \theta^2}) - \underline{\theta\partial_{yy} g(0,0)} + o(\theta)] & |\theta| \le |x| \end{cases}$$

- Per unicità del limite si conclude: infatti poichè $|\sigma(x,x)|$, $|\theta(x,x)| \le |x|$ comporta che $o(\sqrt{\sigma^2 + x^2})$, $o(\sqrt{x^2 + \theta^2})$, $o(\sigma)$, $o(\theta) = o(x)$ per $x \to 0$, si ha:

$$R(x,x) = \begin{cases} \partial^2_{yx} g(0,0) + o(1) \\ \partial^2_{xy} g(0,0) + o(1) \end{cases} \quad x \to 0.$$

<u>Osservazione 2:</u> le due versioni del teorema di scambio delle derivate seconde, questa e quella in FT10, non sono direttamente confrontabili.

Matrice Hessiana: nel caso in cui una funzione a valori reali e le sue derivate parziali prime siano differenziabili in p (*e.g.* $f \in C^2$) si considera la matrice *simmetrica* delle derivate parziali seconde in p, detta *matrice Hessiana* di f in p:

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_M}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_M}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_M^2}(p) \end{pmatrix} = (\nabla(\nabla f))(p).$$

- Nel caso, iterando l'applicazione della regola della catena per composizione con cammini (cfr. FT 10), si ottiene, se u e v sono costanti non nulli, $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(p) = \langle u \cdot Hf(p)v \rangle$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = {}^t u\, Hf\, v$$

- Con le stesse ipotesi, nel caso in cui $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ è a valori vettoriali, con $Hf(p)$ si indica la "matrice con componenti vettoriali" $\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \le h \le m \, {1 \le i \le M \atop 1 \le j \le M}}$.

- Se $\gamma(t)$ è un cammino in $\mathbf{R}^M$ per il cammino trasformato $\eta(t) = f(\gamma(t))$ in $\mathbf{R}^m$ si ha

$$\eta_h'' = \langle \gamma'' \cdot \nabla f_{h(\gamma)} \rangle + \langle \gamma' \cdot Hf_{h(\gamma)} \gamma' \rangle,$$

ovvero se $\gamma'' \neq \vec{0}$, $\gamma' \neq \vec{0}$: $\eta'' = \frac{\partial f}{\partial \gamma''}(\gamma) + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma' \partial \gamma'}(\gamma).$

Laplaciano: se f è differenziabile con derivate parziali prime differenziabili in x, la *traccia della matrice Hessiana* si dice *Laplaciano* di f. È la somma delle derivate parziali seconde non miste. Si indica con $\Delta f(x) =: \mathrm{tr} Hf(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_M^2}(x)$.

<u>Osservzione 3:</u> - l'importanza della trasformazione lineare tra funzioni $f \mapsto \Delta f$, deriva dall'invarianza della traccia per cambiamenti di coordinate lineari: è l'unica trasformazione che associa ad una funzione una combinazione lineare delle sue derivate parziali seconde che non cambia per cambiamenti di *coordinate ortonormali*. L'unica per cui se R è la matrice di un cambiamento di coordiate $x = Ry$ ortonormale ($R^{-1} = {}^tR$), data $f(x)$, si ha

$$(a \otimes b)_i^j = a_i b_j$$

<u>Esercizio 1</u> $\Delta_y(f_\circ R)(y) = (\Delta_x f)(Ry).$

$$(a \otimes b)[v] = a \langle b \cdot v \rangle$$

<u>Esempi:</u> 6 - $r(x) = |x|_M = \sqrt{\langle x \cdot x \rangle}$: $\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(2x_J) = \begin{cases} 2, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} =: 2\delta_{ij}.$

$$H|x|^2 = 2\, Id_{M \times M}$$

Quindi $Hr^2(x) = 2Id_{\cancel{\mathbf{R}^M}}$ è costante, e $\Delta r^2(x) = 2M$.

- - $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{|x|_M}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}\right) = \frac{r\delta_{ij} - x_j \frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{1}{r}(\delta_{ij} - \frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r}).$

$$H|x| = \frac{1}{|x|}\left(Id_{M \times M} - \hat{x} \otimes \hat{x}\right)$$

Quindi $H|x|_M = \frac{1}{|x|_M}(Id_{\cancel{\mathbf{R}^M}} - \widehat{x} \otimes \widehat{x})$, e $\Delta |x|_M = \frac{M}{|x|} - \frac{\frac{x_1^2}{|x|} + \dots + \frac{x_M^2}{|x|}}{|x|} = \frac{M-1}{|x|_M}$.

nota $\nabla Id_{\mathbb{R}^M}(x) = Id_{M \times M}$

7 - Per $\mathcal{Q}(x) = \langle x \cdot Qx \rangle = \sum_{h,k=1}^{M} Q_{hk} x_h x_k$: $\nabla(\nabla \mathcal{Q})(x) = \nabla\Big((Q + {}^tQ)x\Big) = Q + {}^tQ$, essendo lineare $x \mapsto (Q + {}^tQ)x$. Quindi $H\mathcal{Q}(x) = Q + {}^tQ$ è costante, e $\Delta \mathcal{Q}(x) = 2\mathrm{tr}Q$.

Diseguaglianza del valor medio. - Se una funzione $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, nei punti di un segmento $S(p,q) \subseteq D$ di estremi p e q, ha derivata nella direzione $v = q - p$ e allora:

$$|f(p) - f(q)|_m \le \sup_S \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|_m$$

- Se poi f è differenziabile nei punti di S ($\|A\| = \sup \frac{|Av|}{|v|}$ norma di operatore di una matrice):

$$|f(p) - f(q)|_m \le |p-q|_M \sup_S \|\nabla f\| \le |p-q|_M \sup_S |\nabla f|_{\mathbf{R}^{Mm}}$$

.

Dimostrazione: - posto $u = f(q) - f(p)$: $|f(p) - f(q)|_m^2 = \langle (f(q) - f(p)) \cdot u \rangle$ si applica il Teorema di Lagrange alla funzione $g(t) = \langle (f(p + t(q-p))) \cdot u \rangle : [0;1] \to \mathbf{R}$. Per ipotesi: $p+t(q-p) \in D$, $f(p+t(q-p))$ è derivabile per ogni $t \in [0;1]$. Quindi g è combinazione lineare di funzioni derivabili. Posto $v = q - p$ è $g'(\tau) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(p + \tau v) \cdot u \right\rangle$. Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz $\langle \partial_v f \cdot u \rangle \le |\partial_v f|_m |u|_m$

$$|u|_m^2 = |f(p) - f(q)|_m^2 = \langle (f(q) - f(p)) \cdot u \rangle = g(1) - g(0) = g'(\tau) \le \sup_S \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|_m |u|_m$$

Se f è differenziabile nei punti di S è $g'(\tau) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(p + \tau v) \cdot u \right\rangle = \langle (Jfv) \cdot u \rangle = \langle v \cdot \nabla f u \rangle \le$ (Cauchy-Schwarz) $\le |v|_M |\nabla f u|_M$ (def. norma di operatori)$\le |v|_M \|\nabla f\| |u|_m$. Quindi: $|f(p) - f(q)|_m \le \sup_S \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|_m \le |p-q| \sup_S \|\nabla f\|$ (cfr. lemma FT 2) $\le |p-q| \sup_S \sqrt{\sum_{j=1}^m |\nabla f_j|_M^2}$.

Analogamente in ipotesi di integrabilità si ha:

Diseguaglianza del valor medio integrale. - Se una funzione $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, nei punti di un segmento $S = S(p,q) \subseteq D$ di estremi p e q ha derivata nella direzione $v = q - p$ *continua su* S, allora: $\quad |f(p) - f(q)|_m \le \frac{1}{|p-q|_M} \int_S \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|_m ds.$ MEDIA SU S.

sul segmento parametrico

$p + t(q-p) = S(t)$

$ds = |q-p|\, dt$

- Se poi f è $C^1(D)$: $\quad |f(p) - f(q)|_m \le \int_S \|\nabla f\| \, ds = |p-q|_M \int_0^1 \|\nabla f(p + t(q-p))\| \, dt.$

In particolare se $\|\nabla f\|$ è limitato in D la funzione f è $\sup_D \|\nabla f\|$-Lipschitziana.

Dimostrazione: posto $v = q - p$, e $u = f(q) - f(p)$: $|f(q) - f(p)|_m^2 = \langle (f(q) - f(p)) \cdot u \rangle$, si considera $G(t) = f(p+t(q-p))$, che è derivabile con continuità con $G'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q-p))$. Integrando per componenti per la diseguaglianza triangolare per integrali vettoriali, FT5:

$$|f(q) - f(p)|_m^2 = |G(1) - G(0)|_m^2 = \left|\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q-p)) \, dt\right|_m^2 \le \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q-p))\right|_m dt\right)^2$$

- Se f è C^1 si ha $G'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + t(q-p)) = Jf(p + t(q-p))(q-p)$, e si conclude come nella precedente dimostrazione usando Cauchy-Schwarz.

Con gli stessi calcoli si ha:

Resto in forma integrale. sia $f : D = D^o \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, C^1. Se $x, z \in D$ e il segmento S con tali estremi è contenuto in D si ha:

$$f(x) - f(z) - J_z f(x-z) = \int_0^1 \left(J_{z+t(x-z)} f - J_z f\right) dt (x-z) = \int_S (J_s f - J_z f) \, ds \frac{x-z}{|x-z|}.$$

Dimostrazione: sia $G(t) = f(z + t(x - z))$, per la regola della catena per composizione con funzioni di una variabile, cfr. FT10 proposizione 2, $G'(t) = J_{z+t(x-z)}f(x - z)$. Si ha

$$f(x) - f(z) - J_z f(x - z) = G(1) - G(0) - G'(0) = \int_0^1 \left(J_{z+t(x-z)}f - J_z f\right) dt(x - z).$$

Funzioni positivamente omogenee: - un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice *cono di centro* c se per ogni $v \in C,\ v \neq c$ si ha $c + t(v - c) \in C$ per $t > 0$ (se contiene un punto contiene la semiretta aperta per c e il punto).
- Una funzione f si dice positivamente omogena di centro c e grado $\alpha \in \mathbf{R}$ se è definita su un cono di centro c e vale: $f(c+t(v-c)) = t^\alpha f(v)$ per ogni $v \in \mathrm{Dom}f \setminus \{c\}$, $t > 0$

Teorema 3 di Eulero: Sia f differenziabile in $\mathbf{R}^M \setminus \vec{0}_{\mathbf{R}^M}$.

f è positivamente omogenea con centro $\vec{0}$ e grado $\alpha \in \mathbf{R}$ ($f(tx) = t^\alpha f(x),\ x \neq \vec{0}$)
se e solo se
$x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x),\ x \neq \vec{0}$.

Dimostrazione: se $\alpha = 0$ da una parte la funzione è costante sulle semirette aperte dall'origine. Dall'altra ha derivata nella direzione della semiretta dall'origine nulla sulla stessa semiretta.
$\Downarrow$) $\alpha \neq 0$, dato $x \neq \vec{0}$ posto $\phi(t) = f(tx)$, $t > 0$, per la regola della catena per composizione con funzioni di una variabile, cfr. FT10 proposizione 2, si ha $\phi'(t) = x \cdot \nabla f(tx)$.
Ma si ha anche $\phi(t) = t^\alpha f(x)$ per cui $\phi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. Per $t = 1$ si ha l'eguaglianza.
$\Uparrow$) $\alpha \neq 0$, dato $x \neq \vec{0}$ sia $\psi(t) = \dfrac{f(tx)}{t^\alpha}$. Si ha $\psi(1) = f(x)$. Ancora per la regola della catena con cammini: $\psi'(t) = \dfrac{t^\alpha x \cdot \nabla f(tx) - \alpha t^{\alpha-1} f(tx)}{t^{2\alpha}} = \dfrac{t^\alpha x \cdot \nabla f(tx) - t^{\alpha-1} tx \cdot \nabla f(tx)}{t^{2\alpha}} = 0$.

Funzioni convesse e differenziabilità, cfr. FT3, FT6.7

Grazie al fatto che negli spazi euclidei la convessità si riduce a problemi di una variabile, valgono risultati di collegamento tra differenziabilità e convessità analoghi a quelli che si ottengon per funzioni di una variabile.

Monotonia di campi: $V : D \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ si dice *monotono* se $\langle \big(V(z) - V(x)\big) \cdot (z - x) \rangle \geq 0$, per ogni $x,\ z \in D$.

Teorema C2 - sia $f : C \subseteq \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ differenziabile su C aperto convesso:

f è convessa
$\Updownarrow$
il *grafico sta sopra i suoi piani tangenti*, cioè $f(z) \geq (z - x) \cdot \nabla f(x) + f(x)$ per ogni $x,\ z \in C$
$\Updownarrow$
∇f è monotono, cioè $\langle \big(\nabla f(z) - \nabla f(x)\big) \cdot (z - x) \rangle \geq 0$ per ogni $x,\ z \in C$.

- Se f è due volte differenziabile:
f è convessa $\Leftrightarrow Hf(x)$ è semidefinita positiva per ogni $x \in C$.

2 Generazione di funzioni differenziabili regola della catena

Generazione funzioni differenziabili 0: le funzioni di una variabile reale derivabili in p sono differenziabili in p: $D_pf(t) = tf'(p)$.
Generazione funzioni differenziabili 1: le funzioni costanti da $\mathbf{R}^M$ ad $\mathbf{R}^m$ sono differenziabili in ogni punto e il loro differenziale è la funzione lineare nulla.
Generazione funzioni differenziabili 2: Le funzioni lineari affini $x \mapsto Ax + b =: f(x)$ da $\mathbf{R}^M$ ad $\mathbf{R}^m$ con A lineare sono differenziabili in ogni punto p il loro differenziale è indipendente dal punto ed è la parte lineare della funzione stessa $v \mapsto Av$. In coordinate si avrà

$$(x_1 \dots x_k) \mapsto (a_{11}x_1 + \dots a_{1k}x_k + b_1, \dots a_{m1}x_1 + \dots a_{mk}x_k + b_m) = Ax + b =: f(x)$$
$$D_pf(v) = {}^t(a_{11}v_1 + \dots a_{1k}v_k, \dots, a_{m1}v_1 + \dots a_{mk}v_k) = Av.$$

In effetti si ha $f(x) = f(p) + A(x - p)$ con resto nullo. Per funzioni a valori reali di due variabili affini $ax + by + c$ le derivate parziali sono rispettivamente le funzioni costanti a e b.
Generazione funzioni differenziabili 3: se f, g sono funzioni di M variabili reali rispettvamente a valori in R^med $\mathbf{R}^n$ sono differenziabili in p lo è la funzione $(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$. Ciè segue direttamente dalla definzione di differenzibilità (cfr. FT10 teorema 2).
Generazione funzioni differenziabili 4: Il prodotto di coordinate $f_{ij}(x) = x_ix_j,\ x \in \mathbf{R}^M$ è differenziabile in ogni punto p e si ha: $\nabla(x_ix_j)(p) = p_ie_j + p_je_i$. Conseguenza diretta del teorema del differenziale totale.
<u>Esercizio 2:</u> $\det : \mathcal{M}_{m\times m} \sim \mathbf{R}^{m^2} \to \mathbf{R}$ è differenziabile, cfr. paragrafo dedicato in FT. 10.

Lemma 1. cfr. FT 2: $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le h}}$: $\qquad \|L\| =: \sup\limits_{v\neq\vec{0}} \dfrac{|Lv|_{\mathbf{R}^k}}{|v|_{\mathbf{R}^h}} \le |L|_{\mathbf{R}^{\mathbf{hk}}}$.

Dim. $$|Lv|_{\mathbf{R}^k} = \left| \sum_{j=1}^h v_jL^j \right|_{\mathbf{R}^\mathbf{k}} \le \sum_{j=1}^h |v_j| \left|L^j\right|_{\mathbf{R}^\mathbf{k}} \le \text{ (Cauchy-Schwarz) } |v|_{\mathbf{R}^\mathbf{h}} |L|_{\mathbf{R}^{\mathbf{hk}}}.$$

Lemma 2. $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le h}}$: $\quad L[o_{\mathbf{R}^\mathbf{h}}(r)] = o_{\mathbf{R}^\mathbf{k}}(r)$, cioè se $\dfrac{|v|_{\mathbf{R}^\mathbf{h}}}{r} \xrightarrow[x\to p]{} 0$ allora $\dfrac{|Lv|_{\mathbf{R}^\mathbf{k}}}{r} \xrightarrow[x\to p]{} 0$

Generazione funzioni differenziabili 5. Regola della catena:
Dati $A = \overset{\circ}{A} \subseteq \mathbf{R}^M$, $B = \overset{\circ}{B} \subseteq \mathbf{R}^m$, $p \in A$, e due funzioni $A{\ni}x \xrightarrow{f} B{\ni}f(x){=}y \xrightarrow{g} \mathbf{R}^N{\ni}g(y){=}z$ differenziabili rispettivamente in p e in $q = f(p)$. Allora $g{\circ}f$ è differenziabile in p e:

$$D_pg{\circ}f \;=\; D_{f(p)}gD_pf, \text{ come composizione di funzioni lineari, cioè}$$

$$J^xg{\circ}f\ (p) = J^yg\ (f(p))J^xf\ (p)\ ,\quad \nabla^xg{\circ}f\ (p) \;=\; \nabla^xf\ (p)\nabla^yg\ (f(p)) \text{ come prodotto di matrici,}$$

ovvero $$\frac{\partial g_i{\circ}f}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(p))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p), \qquad \text{in breve} \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$$

Dimostrazione.

$$g(f(x)) - g(f(p)) = D_qg[f(x) - f(p)] \;+\; o_N(|f(x) - f(p)|_m)$$

poichè $\quad f(x) - f(p) = D_pf[x - p] + o_m(|x - p|_M) \quad$ si ha $\quad g(f(x)) - g(f(p)) =$

$$= D_qgD_pf[x - p] \;+\; D_qg[o_m(|x - p|_M)] \;+\; o_N\left(|D_pf|_{Mm}\,|x - p|_M + |o_m(|x - p|_M)|_m\right),$$

quindi $g(f(x)) - g(f(p)) = D_qgD_pf[x - p] + o_N(|x - p|_M)$.
Essendo tutti gli errori relativi infinitesimi uniformemente nella direzione tale è l'errore relativo nella formula finale.

Corollario: composizione di funzioni C^K è C^K.

Osservazione 4: con queste regole di genarazione di funzioni differenziabili, in particolare la differenziabilità della composizione, e con il teorema del differenziale totale, partendo dalle funzioni derivabili di una variabile reale a valori reali, si ottengo e si riconoscono molte funzioni differenziabili e si calcolano i loro differenziali e i piani tangenti ai loro grafici.

Esempio 8, funzioni radiali: $f(x) = \phi(|x|_M)$, $x \in \mathbf{R}^M$, $r = |x|_M$, $\widehat{r} = \widehat{x} = \dfrac{x}{|x|_M}$.

Se $\phi :]0; +\infty[\to \mathbf{R}$ è derivabile allora f è differenziabile in $\mathbf{R}^M \setminus \{\vec{0}_{\mathbf{R}^M}\}$ e si ha per la regola della catena e per quanto calcolato nel primo paragrafo:

$$\nabla f(x) = \phi'(|x|_M)\frac{x}{|x|_M} = \phi'(r)\widehat{r}.$$

Se poi ϕ è derivabile due volte

$$Hf(x) = \phi''(|x|_M)\frac{x}{|x|_M} \otimes \frac{x}{|x|_M} + \phi'(|x|_M)\frac{|x|_M Id_{\mathbf{R}^M} - x \otimes \frac{x}{|x|_M}}{|x|_M^2} =$$

$$= \phi''(|x|_M)\left(\frac{x_i x_j}{|x|_M^2}\right)_{i,j} + \frac{\phi'(|x|_M)}{|x|_M}\left(\delta_{i,j} - \frac{x_i x_j}{|x|_M^2}\right) = \phi''(r)\widehat{r} \otimes \widehat{r} + \frac{\phi'(r)}{r}\left(Id_{\mathbf{R}^M} - \widehat{r} \otimes \widehat{r}\right)_{i,j}$$

$$Hf(x) = \nabla(\nabla f)(x)$$

$$\nabla \frac{x}{|x|} = \frac{1}{|x|}\nabla x + x \otimes \nabla \frac{1}{|x|}$$

$$= \frac{1}{|x|} Id_{M\times M} - x \otimes \frac{x}{|x|^3}$$

$v \otimes v(w)$
$\shortparallel$
proiezione ortogonale
di w su tv, $t \in \mathbb{R}$
moltiplicata $|v|^2$

quindi la matrice Hessiana di una funzion radiale ha l'autovalore "radiale" $\phi''(r)$ di molteplicità geometrica 1, e quello "tangenziale" $\dfrac{\phi'(r)}{r}$ di molteplicità $M - 1$:

per cui
$$\Delta f(x) = \mathrm{tr} Hf(x) = \phi''(r) + \frac{M-1}{r}\phi'(r).$$

Generazione funzioni differenziabili 6. Differenziale dell'inversa:

Lemma 3 sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$, C^K, $K \geq 1$. Se $J_x f$ è invertibile allora $[J_x f]^{-1}$ è C^{K-1}.
Dimostrazione: s'identifichino le matrici $M \times M$ con $\mathbf{R}^{M^2}$.
- Essendo $A \mapsto \det A$ una funzione polinomiale nei coefficienti della matrice, è continua su $\mathbf{R}^{M^2}$. Pertanto l'insieme delle matrici invertibili $\mathcal{I}$, definito da $\det A \neq 0$, è preimmagine di un aperto mediante una funzione continua, quindi un insieme aperto per le matrici quadrate.
- Essendo $A \mapsto A^{-1}$ una funzione, da $\mathcal{I}$ in sè, con componenti rapporti di polinomi (nei coefficienti di A) con denominatore ($\det A$) non nullo, è C^∞.
- Quindi $[(J_x f)]^{-1}$ è composizione di funzioni C^{K-1} (l'inversione di matrici, le derivate di f).

Teorema 4: siano $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to B \subseteq \mathbf{R}^M$ *bigettiva*, A e B aperti.

i - Se f è differenziabile in p ed f^{-1} lo è in $f(p)$, allora $D_p f$ è invertibile e
$D_{f(p)}(f^{-1}) = (D_p f)^{-1}$, ovvero $Jf^{-1}(f(p))$ *è la matrice inversa di* $Jf(p)$.

ii - Se inoltre f è $C^K(A)$, ed f^{-1} è differenziabile, allora anche f^{-1} è $C^K(B)$.

Dimostrazione: **i -** Per la regola della catena $f^{-1}(f(x)) = x \ \Rightarrow\ \left[D_{f(x)}f^{-1}\right][D_x f] = Id_{\mathbf{R}^M}$.

ii - Per il precedente punto $J(f^{-1})(b) = \left[(Jf)(f^{-1}(b))\right]^{-1}$.
- Pertanto $J_b(f^{-1})$ è composizione di funzioni continue (l'inversione di matrici, le derivate parziali di f ed f^{-1}): quindi è continua. Quindi f^{-1} è C^1.
- Se $K \geq 2$ allora $J_b(f^{-1})$ è composizione di funzioni C^1, per cui (regola della catena) è C^1 e quindi f^{-1} è C^2. Induttivamente si conclude.

Osservazione 5: il teorema di *invertibilità locale*, FT 12, dà un viceversa: se f è C^1 e $J_p f$ è invertbile allora f è una bigezione tra intorni di p e di $f(p)$, con f^{-1} differenziabile in $f(p)$.

3 Cambi di coordinate non lineari

Diffeomorfismi: $f : A \subseteq \mathbf{R}^M \to B \subseteq \mathbf{R}^M$ bigettiva tra insiemi aperti, differenziabile in A con inversa differenziabile in B (Jf invertibile), si dice *diffeomorfismo* tra A e B.

Notazione: sia $f : A_{\ni x} \subseteq \mathbf{R}^M \to B_{\ni y} \subseteq \mathbf{R}^M$ un diffeomorfismo che rappresenta un cambiamento di coordinate non lineare $y = f(x)$.
- Data $G : B \to \mathbf{R}$, $G = G(y)$, che esprime una grandezza nelle "vecchie" coordinate y, la funzione composta $\widetilde{G}(x) = G(f(x)))$, $\widetilde{G} : A \to \mathbf{R}$ la esperime nelle "nuove" coordinate x.

Proposizione 1, cambiamenti di coordinate non lineari:
sia $f : A_{\ni x} \subseteq \mathbf{R}^M \to B_{\ni y} \subseteq \mathbf{R}^M$ un diffeomorfismo.
Sia $F : B \to \mathbf{R}$ differenziabile in $f(x)$ si ha

$$D_x\widetilde{F} = D_{f(x)}F D_x f,$$

ovvero considerando la fuzione Jacobiana e la funzione gradiente a valori matrici

$$J^x\widetilde{F} = \widetilde{J^y F} J^x f \ , \quad \nabla^x\widetilde{F} = \nabla^x f \widetilde{\nabla^y F},$$

- ovvero con le derivate parziali

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{M} (\nabla^x f)_i^j \widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}} = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}} = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}},$$

e reciprocamente (sempre in x)

$$\widetilde{\frac{\partial F}{\partial y_j}} = \sum_{i=1}^{M} \left((\nabla^x f)^{-1}\right)_j^i \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial \widetilde{f_i^{-1}}}{\partial y_j}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_i}.$$

Dimostrazione: conseguenza diretta della regola della catena.

<u>Osservazioni:</u> 6 - nella pratica, spesso (data esplicitamente $f(x)$, e quindi la matrice $\nabla f(x)$), non riuscendo ad esplicitare f^{-1}, per le relazioni reciproche tra le derivate in x ed y, conviene usare la prima uguaglianza, che coinvolge $(\nabla^x f)^{-1}$. Infatti si tratta di invertire la matrice nota $\nabla f(x)$.

7 - Sinteticamente (cfr. FT8 derivata rispetto alla lunghezza d'arco), omettendo la grandezza F, queste relazioni tra le derivate parziali di funzioni diventano relazioni tra "operatori di derivazione":

$$\frac{\partial \widetilde{\ }}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}}; \qquad \widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}} = \sum_{i=1}^{M} \left((\nabla^x f)^{-1}\right)_j^i \frac{\partial \widetilde{\ }}{\partial x_i}, \quad \text{cioè} \quad \widetilde{\nabla^y} = (\nabla^x f)^{-1} \nabla^x \widetilde{\ }.$$

Alcuni esempi notevoli, illustrati nelle pagine seguenti, sono le coordinate polari in $\mathbf{R}^2$, cilindriche e sferiche in $\mathbf{R}^3$.

Esempio 9, coordinate polari: - come calcolato nel primo paragrafo
$f(r,\phi)=(r\cos\phi, r\sin\phi):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ è differenziabile, $J_{(r,\phi)}f=\begin{pmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}$.
- Restringendosi a $(0;+\infty)\times[0;2\pi)$ si ottiene un *diffeomorfismo* tra la striscia aperta e $\mathbf{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$: $\begin{cases}x(r,\phi)=r\cos\phi\\ y(r,\phi)=r\sin\phi\end{cases}$, che dà un cambiamento di coordinate. Le linee coordinate $r=$ costante: sono le circonferenze centrate nell'origine, e le linee coordinate $\phi=$ costante: sono le semirette di vertice l'origine. In particolare $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e nel primo quadrante $\phi=\operatorname{artan}\frac{y}{x}$: ivi $f^{-1}(x,y)=(r(x,y),\phi(x,y))=(\sqrt{x^2+y^2},\operatorname{artan}\frac{y}{x})$, differendo $\phi(x,y)$ negli altri quadranti per una costante.
- Si adotta la notazione $\widehat{r}=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$, $\widehat{\phi}=\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ (posizione).
Come vettori applicati in (x,y) la coppia $(\widehat{r},\widehat{\phi})$ è un sistema di riferimento "locale" ortonomale, orientato come la base canonica $\det\left(\widehat{r}\mid\widehat{\phi}\right)=1>0$.

- Come visto $\widehat{r}=\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\phi=\dfrac{x}{r}=\dfrac{\partial r}{\partial x}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\phi=\dfrac{y}{r}=\dfrac{\partial r}{\partial y}\end{cases}$ e $r\widehat{\phi}=\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial \phi}= & -r\sin\phi=-y & =r^2\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r}= & r\cos\phi=x & =r^2\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\end{cases}$,
ovvero $Jf=\begin{pmatrix}\partial_r x & \partial_\phi x\\ \partial_r y & \partial_\phi y\end{pmatrix}=\left(\widehat{r}\mid r\widehat{\phi}\right)$.
- Osservando che le colonne di Jf sono ortogonali è immediato calcolare l'inversa che avrà come righe gli opportuni multipli delle colonne di Jf:
$(Jf)^{-1}=\begin{pmatrix}{}^t\widehat{r}\\ \dfrac{{}^t\widehat{\phi}}{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\dfrac{\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r}\end{pmatrix}=\widetilde{J\left(f^{-1}\right)}=\begin{pmatrix}\widetilde{\partial_x r} & \widetilde{\partial_y r}\\ \widetilde{\partial_x\phi} & \widetilde{\partial_y\phi}\end{pmatrix}$ confermando che
$J\left(f^{-1}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$.
- Pertanto le relazioni tra gli operatori di derivazione nelle diverse coordinate sono:
- - diretto $\begin{cases}\partial_r\tilde{} = & \cos\phi\,\widetilde{\partial_x}+\sin\phi\,\widetilde{\partial y}\\ \partial_\phi\tilde{} = & -r\sin\phi\,\widetilde{\partial_x}+r\cos\phi\,\widetilde{\partial y}\end{cases}$ ovvero $(\nabla^{r\phi}f)\widetilde{\nabla^{xy}}=\nabla^{r\phi}\tilde{}$, cioè

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -r\sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\partial_x}\\ \widetilde{\partial_y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_r\tilde{}\\ \partial_\phi\tilde{}\end{pmatrix},$$

nella pratica di solito conviene sostituire a x e y, nella funzone $F(x,y)$ da derivare, le loro espressioni in coordinate polari e derivare direttamente rispetto a queste;

- - inverso $\begin{cases} \widetilde{\partial_x} = & \cos\phi\,\partial_r{}^{\sim} - \dfrac{\sin\phi}{r}\,\partial_\phi{}^{\sim} \\ \widetilde{\partial_y} = & \sin\phi\,\partial_r{}^{\sim} + \dfrac{\cos\phi}{r}\,\partial_\phi{}^{\sim} \end{cases}$ ovvero $(\nabla^{r\phi}f)^{-1}\nabla^{r\phi\sim} = \widetilde{\nabla^{xy}}$, cioè

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\dfrac{\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r{}^{\sim} \\ \partial_\phi{}^{\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\partial_x} \\ \widetilde{\partial_y} \end{pmatrix},$$

che invece, nei casi pratici, può esser comoda da usare, data $\Psi(r,\phi)$, per trovare le sue derivate in x in y, piuttosto che sostituire a r e ϕ le loro espressioni in x e y e derivarle, il che è più oneroso.

- Quest'ultima relazione contiene anche la decomposizione del gradiente di $F(x,y)$ rispetto al sistema di coordinate locali $\widehat{r}$, $\widehat{\phi}$:

$$\widetilde{\frac{\partial F}{\partial \widehat{r}}}\widehat{r} \;+\; \widetilde{\frac{\partial F}{\partial \widehat{\phi}}}\widehat{\phi} = \widetilde{\nabla^{xy}F} = (\nabla^{r\phi}f)^{-1}\nabla^{r\phi}\widetilde{F} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\dfrac{\sin\phi}{r} \\ \sin\phi & \dfrac{\cos\phi}{r} \end{pmatrix} \nabla^{r\phi}\widetilde{F} = \left(\widehat{r} \,\middle|\, \frac{\widehat{\phi}}{r} \right) \nabla^{r\phi}\widetilde{F} =$$

$$= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}\widehat{r} \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi}\widehat{\phi}.$$

- Iterando la relazione $\begin{cases} \widetilde{\partial_x} = & \cos\phi\,\partial_r{}^{\sim} - \dfrac{\sin\phi}{r}\,\partial_\phi{}^{\sim} \\ \widetilde{\partial_y} = & \sin\phi\,\partial_r{}^{\sim} + \dfrac{\cos\phi}{r}\,\partial_\phi{}^{\sim} \end{cases}$ si ottiene l'espressione in coordinate polari del Laplaciano:

$$\widetilde{\Delta^{xy}} = \widetilde{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \;+\; \widetilde{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}^{\sim} \;+\; \frac{1}{r}^2\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}^{\sim} \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r}^{\sim}.$$

si procede come segue

$$\widetilde{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\widetilde{\frac{\partial F}{\partial x}} = \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi}\right) =$$

$$= \cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\phi\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi}\right) - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi}\right) =$$

$$= \cos^2\phi\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2} + \frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi} - \frac{\cos\phi\sin\phi}{r}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r\partial \phi} -$$

$$\left(-\frac{\sin^2\phi}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \phi\partial r} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi} - \frac{\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \phi^2}\right) = \dots$$

$$= \cos^2\phi\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\phi}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \phi^2} + 2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi} - 2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \phi\partial r},$$ analogamente:

$$\widetilde{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}} = \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi}\right) = \dots$$

$$\dots = \sin^2\phi\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\phi}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} + \frac{\cos^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \phi^2} - 2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi} + 2\frac{\cos\phi\sin\phi}{r}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \phi\partial r}.$$

Esempio 10, coordinate cilindriche: si tratta delle coordinate polari sui piani orizzontali, z =costante. La terza coordinata rimane quella cartesiana: $f:(0;+\infty)\times(0;2\pi)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$, $f(r,\phi,z)=(r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, $\begin{cases} x(r,\phi,z)=r\cos\phi \\ y(r,\phi,z)=r\sin\phi \\ z(r,\phi,z)=z \end{cases}$, che è un diffeomorfismo con $\mathbf{R}^3\setminus\{(x,0,z):x\geq 0\}$.

$J_{(r,\phi,z)}f=\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esempio 11, coordinate sferiche: - si considerano le coordinate sferiche " geografiche":
$f:(0;+\infty)\times(-\pi;\pi)\times(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R}^3$, $f(r,\phi,\theta)=(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$

$\begin{cases} x(r,\phi,\theta)=r\cos\theta\cos\phi \\ y(r,\phi,\theta)=r\cos\theta\sin\phi \\ z(r,\phi,\theta)=r\sin\theta \end{cases}$. È un diffeomorfismo con $\mathbf{R}^3\setminus\{(x,0,z):x\leq 0\}$.

- Si adottano le notazioni seguenti: $p=(x,y,z)$; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=r\cos\theta$;

$\widehat{p}=\widehat{r}=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}$, versore direzione dall'origine normale alla sfera unitaria in $\widehat{p}$;

$\widehat{\rho}=\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\widehat{\phi}=\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, versore latitudine "orizzontale" tangente alla sfera unitaria e alla circonferenza del "parallelo" in $\widehat{p}$;

$\widehat{\theta}=\begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} -\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$, versore longitudine tangente alla sfera unitaria e alla circonferenza massima del "meridiano" in $\widehat{p}$.

- Come vettori applicati in $\widehat{p}$ i versori mutuamente ortogonali nell'ordine $(\widehat{r},\widehat{\phi},\widehat{\theta})$ individuano una base ortonormale locale, orientata come la base canonica di $\mathbf{R}^3$: $\det(\widehat{r}\mid\widehat{\phi}\mid\widehat{\theta})=1>0$.

- Si ha $J_{(r,\phi,\theta)}f = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix} = \left(\widehat{r} \mid r\widehat{\phi}\cos\theta \mid r\widehat{\theta}\right)$ con colonne ortogonali, pertanto è agevole calcolare l'inversa per righe: $\left(J_{(r,\phi,\theta)}f\right)^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t\widehat{r} \\ \dfrac{1}{r\cos\theta}\,{}^t\widehat{\phi} \\ \dfrac{1}{r}\,{}^t\widehat{\theta} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\phi}{r\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{r\cos\theta} & 0 \\ -\dfrac{\sin\theta\cos\phi}{r} & -\dfrac{\sin\theta\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \widetilde{J\left(f^{-1}\right)} = \begin{pmatrix} \widetilde{\partial_x r} & \widetilde{\partial_y r} & \widetilde{\partial_z r} \\ \widetilde{\partial_x \phi} & \widetilde{\partial_y \phi} & \widetilde{\partial_z \phi} \\ \widetilde{\partial_x \theta} & \widetilde{\partial_y \theta} & \widetilde{\partial_z \theta} \end{pmatrix}, \quad \text{per cui:}$$

- - diretto $\begin{cases} \dfrac{\partial^{\sim}}{\partial r} = \cos\theta\cos\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x} + \cos\theta\sin\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y} + \sin\theta\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial^{\sim}}{\partial \phi} = -r\cos\theta\sin\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x} + r\cos\theta\cos\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^{\sim}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\cos\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x} - r\sin\theta\sin\phi\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y} + r\cos\theta\,\dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial z} \end{cases}$ cioè $(\nabla^{r\phi\theta}f)\widetilde{\nabla^{xyz}} = \nabla^{r\phi\theta\sim}$,

$$\frac{\partial^{\sim}}{\partial r} = \langle \widehat{r}\cdot\widetilde{\nabla^{xyz}}\rangle = \frac{\widetilde{\partial}}{\partial\widehat{r}} \quad , \quad \frac{\partial^{\sim}}{\partial \phi} = r\cos\theta\langle\widehat{\phi}\cdot\widetilde{\nabla^{xyz}}\rangle = r\cos\theta\frac{\widetilde{\partial}}{\partial\widehat{\phi}} \quad , \quad \frac{\partial^{\sim}}{\partial \theta} = r\langle\widehat{\theta}\cdot\widetilde{\nabla^{xyz}}\rangle = r\frac{\widetilde{\partial}}{\partial\widehat{\theta}};$$

- - inverso: $\begin{pmatrix} \widetilde{\partial}_x \\ \widetilde{\partial}_y \\ \widetilde{\partial}_z \end{pmatrix} = \widetilde{\nabla^{xyz}} = (\nabla^{r\phi\theta}f)^{-1}\nabla^{r\phi\theta\sim} = \left(\widehat{r}\;\middle|\;\dfrac{1}{r\cos\theta}\widehat{\phi}\;\middle|\;\dfrac{1}{r}\widehat{\theta}\right)\begin{pmatrix} \partial_r{}^{\sim} \\ \partial_\phi{}^{\sim} \\ \partial_\theta{}^{\sim} \end{pmatrix} =$

$$= \widehat{r}\,\frac{\partial^{\sim}}{\partial r} + \frac{\widehat{\phi}}{r\cos\theta}\,\frac{\partial^{\sim}}{\partial\phi} + \frac{\widehat{\theta}}{r}\,\frac{\partial^{\sim}}{\partial\theta}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial x} = \cos\theta\cos\phi\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial r} - \dfrac{\sin\phi}{r\cos\theta}\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial\phi} - \dfrac{\sin\theta\cos\phi}{r}\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial\theta} \\ \dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial y} = \cos\theta\sin\phi\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial r} + \dfrac{\cos\phi}{r\cos\theta}\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial\phi} - \dfrac{\sin\theta\sin\phi}{r}\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial\theta} \\ \dfrac{\widetilde{\partial}}{\partial z} = \sin\theta\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\,\dfrac{\partial^{\sim}}{\partial\theta} \end{cases}$$

- Quest'ultima relazione contiene anche la decomposizione del gradiente di $F(x, y, z)$ rispetto al sistema di coordinate locali:

$$\widetilde{\frac{\partial F}{\partial \widehat{r}}}\,\widehat{r} + \widetilde{\frac{\partial F}{\partial \widehat{\phi}}}\,\widehat{\phi} + \widetilde{\frac{\partial F}{\partial \widehat{\theta}}}\,\widehat{\theta} = \widetilde{\nabla^{xyz} F} = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}\,\widehat{r} + \frac{1}{r\cos\theta}\,\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \phi}\,\widehat{\phi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \theta}\,\widehat{\theta},$$ e quindi riottenendo

$$\frac{\partial^{\sim}}{\partial r} = \widetilde{\frac{\partial}{\partial \widehat{r}}}\,, \quad \frac{\partial^{\sim}}{\partial \phi} = \widetilde{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial}{\partial \widehat{\phi}}\,, \quad \frac{\partial^{\sim}}{\partial \theta} = \widetilde{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\frac{\partial}{\partial \widehat{\theta}}\,.$$

- Valgono inoltre
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{r}}{\partial r} = \vec{0}\,, & \dfrac{\partial \widehat{r}}{\partial \phi} = \cos\theta\,\widehat{\phi}\,, & \dfrac{\partial \widehat{r}}{\partial \theta} = \widehat{\theta} \\ \dfrac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} = \dfrac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \theta} = \vec{0}\,, & \dfrac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\widehat{\rho}, & \\ \dfrac{\partial \widehat{\theta}}{\partial r} = \vec{0}\,, & \dfrac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} = -\sin\theta\,\widehat{\phi}\,, & \dfrac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \theta} = -\widehat{r} \end{cases}$$