Fattorizzazione LU

$A = L \cdot U$

L: triangolare inferiore con 1 su diagonale

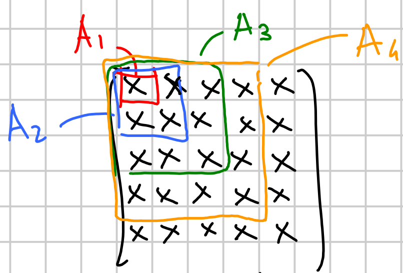
U: triangolare superiore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 1 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & \boxed{x} & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{bmatrix} = A$$

Scrivo i moltiplicatori usati nella matrice L — eliminaz. Gauss su matrice A

Possibile problema: lungo l'algoritmo, mi serve che i "pivot" siano diversi da 0.

<u>Definizione</u>: la <u>sottomatrice principale di testa</u> di ordine k di A è la matrice $A(1:k, 1:k)$ (elementi con indici di riga e colonna in $1, 2, \dots k$)



<u>Teo</u>: Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se le sottomatrici principali di testa $A_1, A_2, A_3, \dots$ $\dots A_{n-1}$ sono tutte invertibili, riusciamo a portare a termine il processo di fattorizzazione LU senza mai incontrare pivot uguali a 0.

<u>Dim</u>: Supponiamo di aver portato a termine i primi $k-1$ passi dell'eliminazione di Gauss; quindi abbiamo

$$L_{k-1} \cdots L_2 L_1 A = A_k \iff L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{k-1}^{-1} A_k = A$$

ES ($k=3$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 1 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1^{-1} L_2^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & \boxed{x} & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{bmatrix}}_{A_k} = A$$

prime k righe di L — prime k righe di U

Le prime k righe e k colonne di queste matrici non cambieranno più!

Posso scrivere

$$L_{1:k,1:k} \cdot U_{1:k,1:k} = A_{1:k,1:k} \qquad (*)$$

l'elemento $U_{k,k}$ è il pivot per cui voglio andare a dividere nel passo k dell'eliminazione.

Dalla $(*)$,

$$0 \neq \det A_{1:k,1:k} = \det\left(L_{1:k,1:k} U_{1:k,1:k}\right) = \det\left(L_{1:k,1:k}\right) \det\left(U_{1:k,1:k}\right)$$

$$= \underbrace{1\cdot 1\cdot 1 \cdots 1}_{k} \cdot U_{11} U_{22} \cdots U_{kk}$$

Quindi, in particolare, $U_{kk} \neq 0$ ⇝ posso effettuare il passo k dell'elim. di Gauss, pivot non nullo.

Questo per ogni $k = 1, 2, \dots n-1$.

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non importa se al passo n questo elemento è nullo o no, non devo più fare divisioni

□

Oss: questo in realtà è un "se e solo se": se l'elim. di Gauss si blocca al passo k, incontrando (per la prima volta) un pivot nullo U_{kk}, allora $\det A_{1:k,1:k} = 0$

Esistono categorie di matrici per cui possiamo dimostrare che questa condizione è soddisfatta ⇒ esiste fattorizzazione LU.

Def: una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice dominante diagonale (per righe) se per ogni $i = 1, 2, 3, \dots n$

$$|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |A_{ij}|$$

A si dice dominante diagonale per colonne se A^T è dom. diag. per righe

$j = 1, \dots n$, $$|A_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |A_{ij}|$$

Teo: una matrice dominante diagonale è invertibile

dim: supponiamo per assurdo che A non sia invertibile ⇒ esiste $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tale che $Ax = 0$ ⇝

Prendiamo l'entrata di x che ha valore assoluto massimo, x_m

$$|x_m| = \max_{i=1,2,\dots n} |x_i|$$

m-esima →
$$\begin{bmatrix} x & x & \cdots & x \\ \hline \\ \vdots & & & \vdots \\ x & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = 0$$
valore ass. massimo

$$0 = (Ax)_m = \sum_{j=1}^{n} A_{mj} x_j$$

$$-\frac{A_{mm} x_m}{x_m} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} \frac{A_{mj} x_j}{x_m}$$

$$|A_{mm}| = \left| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} A_{mj} \frac{x_j}{x_m} \right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} |A_{mj}| \cdot \underbrace{\frac{|x_j|}{|x_m|}}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} |A_{mj}|$$

$$|A_{mm}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} |A_{mj}| \quad \longleftrightarrow \quad |A_{mm}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} |A_{mj}|$$

in contraddizione con la def. di matrice dom. diagonale

$\square$

Se A è dominante diagonale per righe, allora lo sono anche le sottomatrici pr. di testa $A_{1:k,1:k}$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$|A_{ii}| > |A_{i1}| + |A_{i2}| + \dots + |A_{i,i-1}| + |A_{i,i+1}| + \dots + |A_{in}| \qquad |A_{ii}| > |A_{i1}| + \dots + |A_{i,i-1}| + |A_{i,i+1}| + \dots + |A_{ik}|$$

Se A è dom. diag. per righe $\Rightarrow$ le sottomatrici di testa sono invertibile

$\Rightarrow$ posso portare a termine la fattorizzazione LU.

Stesso discorso per matrici dom. diag. per colonne

ES:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-5} & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$|-5| > |1| + |1|$ $\quad$ $|3| \cancel{>} |2| + |1|$ no!

$\Rightarrow A$ non è dom. diag. per colonne.

$|5| > |2| + |2|$
$|3| > |1| + |-1|$
$|3| > |1| + |1|$

ok! A dom. diag. per righe.

$\Downarrow$

A invertibile

$A_{1:2,1:2}$ è anche essa dominante diagonale per righe

$|-5| > |2|$
$|3| > |1|$

$A_{1:1,1:1} = [-5]$ è dom. diagonale

$$|A_{11}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{1} |A_{1j}| = 0.$$

Pivot $\neq 0$ ma piccoli causano problemi!

ES:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = 2^{-60} \approx 10^{-20}$$

dopo 1 passo,
$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 1-\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & -1-\frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

⚠ Il numero di macchina più vicino a $1-\frac{1}{\varepsilon}$ e $-1+\frac{1}{\varepsilon}$ è $-2^{60} = -\frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ ottengo una matrice A_2 singolare

Soluzione: scambio righe in modo da avere un pivot il più grande possibile

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrice di permutazione

scambi di righe $\Leftrightarrow$ moltiplicazioni per matrici di permutazione (identità con righe permutate)

Strategia: come pivot scelgo a ogni passo l'elemento con il valore assoluto più alto.

Eliminazione di Gauss con pivoting (parziale)

$$U = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & a & x & x \\ 0 & 0 & b & x & x \\ 0 & 0 & c & x & x \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ x & 1 & & & \\ x & x & 1 & & \\ x & x & & 1 & \\ x & x & & & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

scambio righe in modo da portare quello tra a,b,c con v.a. massimo in posizione pivot

Se parto da una matrice PA ottenuta scambiando le righe k_1, k_2 della matrice A, il risultato dell'elim. di Gauss fino al passo $k < \min(k_1, k_2)$ sono le stesse matrici L, U con le righe k_1, k_2 scambiate.

Ottengo

$$L \cdot U = \underbrace{P_{n-1} \cdots P_3 P_2 P_1}_{P \text{ matrice di permutazione}} A = PA$$

$$\Leftrightarrow A = P^{-1} L \cdot U = P^T L U.$$

$$A(k:n,k) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftarrow pos = 3$$

Uso di $LU = PA$ per risolvere sistemi lineari

$$b = Ax = P^T \underbrace{L \underbrace{U x}_{y}}_{z}$$

$$O(n^2) \begin{cases} b = P^T z \rightsquigarrow z = Pb \\ z = Ly \rightsquigarrow y = L^{-1} z \text{, sost. in avanti.} \\ y = Ux \rightsquigarrow x = U^{-1} y \text{, sost. all'indietro.} \end{cases}$$

□

Matlab: $[L,U,P] = lu(A)$ $\qquad x = A \backslash b$

Errore algoritmico: non vediamo un'analisi completa, ma

1) errore algoritmico basso (al livello dell'errore inerente) a patto che $\|L\|$, $\|U\|$ siano limitate (rispetto alla $\|A\|$)
2) Questo vale per quasi tutte le matrici
3) Esempi molto rari in cui $\|U\| \sim 2^n \|A\|$

Costo computazionale: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ operazioni aritmetiche

(le parti aggiunte per il pivoting non contengono operazioni)

Matrici simmetriche: esiste una variante dell'el. Gauss che si chiama fattorizzazione LDL^T

Scrive $A = A^T$ come $A = L D L^T$

L: triang. inf. con 1 sulla diag.

D: diagonale

L^T: trasposta della L.

Dopo il primo passo dell'elim. di Gauss,

$L_1 A$ non è più simmetrica, ma

$$L_1 A L_1^T = \left[\begin{array}{c|ccccc} \times & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & \times & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \times & \times & \times & \cdots & \times \end{array}\right]$$

è di nuovo simmetrica e con zeri nella prima colonna/riga

$$L_k L_{k-1} \cdots L_1 A L_1^T L_2^T L_3^T \cdots L_k^T = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \times & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \times & \cdots & \cdots & \times \end{bmatrix}\right\}}_{k} k$$

Dopo $n-1$ passaggi

$$L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 A L_1^T L_2^T \cdots L_{n-1}^T = D$$

$$A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L} D \underbrace{(L_{n-1}^{-1})^T (L_{n-2}^{-1})^T \cdots (L_1^{-1})^T}_{L^T} = L D L^T$$

Al passo k, l'aggiornamento

$$\underbrace{A_{k+1:n,k+1:n}}_{\text{simmetrica}} \leftarrow \underbrace{A_{k+1:n,k+1:n}}_{\text{simmetrica}} - \underbrace{L_{k+1:n,k} \; A_{k,k+1:n}}_{\text{simmetrica}}$$

$$L_{k+1:n,k} = A_{k+1:n,k} / A_{k,k}$$

$$\begin{array}{cc} & \quad\quad (1,3) \\ (3,1) & \begin{bmatrix} \times & \times & \boxed{\times} & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \boxed{\times} & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ metà degli elementi possono essere riempiti per simmetria senza ulteriori operazioni

$2(n-k)^2$ operazioni $\rightsquigarrow \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

$(n-k)^2 + O(n-k)$ operazioni $\rightsquigarrow \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$

costo dimezzato rispetto all'elim. di Gauss!