Analisi Matematica II, Anno Accademico 2021-2022.
Ingegneria

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 14
SVILUPPI DI TAYLOR

1 DERIVATE DIREZIONALI ITERATE

Se $v \in \mathbf{R}^d$ è non nullo è definito *l'operatore differenziale di derivazione* rispetto a v, che associa ad una funzione f di d variabili la sua eventuale derivata direzionale lungo v, cfr. FT10.1:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f\right)(x) \;=\; \frac{\partial f}{\partial v}(x) =: \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho v}(x) = \rho\frac{\partial f}{\partial v}(x)\,,\ \rho\neq 0.$$

Se una funzione f è differenziabile in x si ha: $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; D_x f\, v \;=\; \langle \nabla f(x)\cdot v\rangle \;=\; \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$

Se $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena: $\displaystyle g'(t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial v}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla) f(x+tv).$
Si osserva che si ottiene *un polinomio omogeneo di primo grado*, cioè un *funzione lineare omogenea*, nelle variabili $v_1,\dots,v_d$ delle coordinate di v. Nel caso si usa la notazione:

$$\frac{\partial}{\partial v} \;=\; v\cdot\nabla\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; v\cdot\nabla f(x) \;=\; (v\cdot\nabla)f(x).$$

Se f è due volte differenziabile iterando questo tipo di derivata, e per v indipendente da x :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, x_i}(x)$$

cioè, denotando con $Hf(x)$ la matrice Hessiana delle derivate parziali seconde in x:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;\;=\;\; \langle v\cdot Hf(x)v\rangle \;=\; {}^t v\cdot Hf(x)v.$$

Si osserva che si ottiene un *polinomio omogeneo di secondo grado*, cioè *una quadrica omogenea* nelle d variabili $v_1,\dots,v_d$ che danno le coordinate di v.

Si useranno quindi anche le notazioni: $\displaystyle\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 \;=\; \frac{\partial^2}{\partial v^2} \;=\; (v\cdot\nabla)^2\,.$
Se si definisce $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena:

$$g''(t) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}f\right)(x+tv) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla)^2 f(x+tv).$$

Iterando h volte si useranno le notazioni: $\displaystyle\frac{\partial}{\partial v}\cdots\frac{\partial}{\partial v} \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^h \;=\; \frac{\partial^h}{\partial v^h} \;=\; (v\cdot\nabla)^h\,.$
Se si definisce $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena iterata h volte :

$$\frac{d^h g}{dt^h}(t) \;=\; \left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^h f\right)(x+tv) \;=\; \frac{\partial^h f}{\partial v^h}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla)^h f(x+tv)\,, \quad \text{quindi per } t=0$$

$$(v\cdot\nabla)^h f = \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+v_d\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^h f = (v\cdot\nabla)^{h-1}\left(\sum_{i=1}^d v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^d v_i\,(v\cdot\nabla)^{h-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Anche in questo caso si ottiene un *polinomio omogeneo di grado* h, nelle d variabili $v_1,\dots,v_d$ che danno le coordinate di v.

Per metter in evidenza la natura polinomiale, nelle coordinate della direzione, di queste derivate direzionali successive conviene usare anche le notazioni relative ai multi-indici.

2 MULTINDICI

Un vettore $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbf{N}^d$ a componenti intere non negative, si dice *d-multi-indice*

La dimensione d si dice *lunghezza* del multi-indice. Cfr. FT10.1.

Si dice *peso* o *norma* (è in effetti la norma l^1): $\quad |\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^{d} p_i\,.$

Dati due multindici di egual lunghezza si scrive $\mathbf{q} \le \mathbf{p}$ per $q_1 \le p_1\,, \ \ldots, q_d \le p_d$.

Si definiscono: $\mathbf{p}! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!\,,\quad \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \binom{p_1}{q_1} \cdot \ldots \cdot \binom{p_d}{q_d}\,,\quad \mathbf{p} \le \mathbf{q},$

e per d variabili $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ si pone $\mathbf{y}^{\mathbf{p}} =: y_1^{p_1} \cdot \ldots y_d^{p_d}$.

LEMMA 1:(Sviluppo multinomiale) Si considerino le variabili $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_d)$, per cui $A_i + A_j = A_j + A_i, A_iA_j = A_jA_i,\ A_i(A_j + A_k) = A_iA_j + A_iA_k$. Allora

$$\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h = (A_1 + \ldots A_d)^h = \sum_{i=1}^{d} (A_1 + \ldots A_d)^{h-1} A_i = \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{h!}{\mathbf{p}!}\ A_1^{p_1} \cdot \cdots \cdot A_d^{p_d} = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!}\ \mathbf{A}^{\mathbf{p}}.$$

DIM. Il prodotto: $\quad \left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h = (A_1 + \cdots + A_d) \cdot \ldots h \text{ fattori} \cdots (A_1 + \ldots A_d +)$

per *distributività* e *commutatività* è un polinomo omogeneo di grado h del tipo $\sum_{|\mathbf{p}|=h} c_{\mathbf{p}} \mathbf{A}^{\mathbf{p}}$.

Si tratta, fissato il multindice $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ di lunghezza d e peso h, di calcolare $c_{\mathbf{p}}$, cioè di contare quante diverse scelte di addendi negli h fattori danno il monomio $\mathbf{A}^{\mathbf{p}}$. Si tratta di contare:

quante volte si sceglie: A_1 in p_1 fattori, A_2 in p_2 fattori , $\ldots$ A_d in p_d fattori.

Tale numero "di volte" è appunto il coefficiente $c_{\mathbf{p}}$ di $\mathbf{A}^{\mathbf{p}}$ nello sviluppo di $\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)^h$.

Nell'ordine dato delle variabili: per A_1 si hanno $\binom{h}{p_1}$ scelte di p_1 fattori, quindi per A_2 ne rimangono $\binom{h-p_1}{p_2}$, per A_3 $\binom{h-p_1-p_2}{p_3}$,..., per A_{d-1} $\binom{p_d+p_{d-1}}{p_{d-1}}$, per A_d rimane *una* scelta di p_d fattori. Ma $\binom{h}{p_1}\binom{h-p_1}{p_2}\binom{h-p_1-p_2}{p_3}\ldots\binom{p_d+p_{d-1}}{p_{d-1}} = \frac{h!}{p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!} = \frac{h!}{\mathbf{p}!}$.

La relazione tra le derivate direzionali e i monomi è chiarita dalla seguenti convenzioni:

$$D^{\mathbf{p}} = D_1^{p_1} D_2^{p_2} \ldots D_d^{p_d} = \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}} =: \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}};$$

quindi la relazione con le derivate e i multi-indici è messa in evidenza da:

COROLLARIO: Qualora si possa scambiare l'ordine di derivazione si ha:

$$\frac{\partial^h}{\partial \mathbf{v}^h} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right)^h = (\mathbf{v} \cdot \nabla)^h = \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_d \frac{\partial}{\partial x_d}\right)^h = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!}\ \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \frac{\partial^h}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}$$

DIM. Posto $A_i = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ piuttosto che il prodotto tra numeri si considera come prodotto l'iterazione successiva di due derivazioni, e come somma la somma delle due derivazioni. Si osserva che per ipotesi le derivate commutano e per linearità si distribuiscono sulla somme. L'asserto segue dallo sviluppo multinomiale. Equivalentemente

$$\frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{v}^h}(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)^h f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}) = \quad \sum_{i_1=1}^{d}\cdots\sum_{i_h=1}^{d} \frac{\partial^h f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_h}}(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}) \;\; v_{i_1}\ldots v_{i_h} =$$

$$= \; h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!}\,\frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}) \;\; \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \; = \; h! \sum_{p_1+\cdots+p_d=h} \frac{1}{p_1!\ldots p_d!}\;\frac{\partial^h f}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_d^{p_d}}(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}) \;\; v_1^{p_1}\ldots v_d^{p_d}.$$

Il *differenziale di ordine* h si definisce come il polinomio omogeneo di grado h nelle variabili $v_1,\ldots,v_d$ dato da $D^{(h)}_{\mathbf{x}} f[v] = (\mathbf{v}\cdot\nabla)^h f(\mathbf{x}) = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!}\; \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x})$.

3 IL TEOREMA DI TAYLOR PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

TEOREMA 1 Sia $f:\Omega\to\mathbf{R}$, $\mathbf{x}^0\in\Omega$ aperto in $\mathbf{R}^d$, $f\in C^{k-2}(\Omega)$, differenziabile $k-1$ volte in Ω, e differenziabile k volte in $\mathbf{x}^0$ (le derivate di ordine $k-1$ differenziabili in $\mathbf{x}^0$). Allora

a- esiste un polinomio $P(\mathbf{x})$, di grado minore o eguale a k, per cui $\dfrac{|f(\mathbf{x})-P(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k} \xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0]{} 0$

cioè
$$f(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)\;, \quad \text{per} \quad \mathbf{x}\to\mathbf{x}^0.$$

b- Tale polinomio è **unico** ed è il *polinomio di Taylor di ordine* k *e centro* $\mathbf{x}^0$: $\quad P_k(\mathbf{x}) =$

$$= \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}\; \left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla\right)^h f(\mathbf{x}^0) \; = \; \sum_{h=0}^{k}\sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!}\frac{\partial^{|\mathbf{p}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} = \sum_{|\mathbf{p}|=0}^{k} \frac{1}{\mathbf{p}!}\frac{\partial^{|\mathbf{p}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}.$$

L'identità $f(\mathbf{x}) = P_k(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$ si dice *sviluppo di Taylor di ordine* k *e centro* $\mathbf{x}^0$, e la differenza $f(\mathbf{x})-P_k(\mathbf{x})$ *errore o resto all'ordine* k nello sviluppo. Si ha inoltre

c- Se f è una funzione di classe C^{k+1} in Ω allora il k-simo resto di Taylor di centro $\mathbf{x}^0$ per f può essere scritto nella forma

$$f(\mathbf{x}) - P_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{(k+1)!}\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f\right)^{k+1}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!}\frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{u})(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}},$$

ove $\mathbf{u}$ è un punto del segmento di estremi $\mathbf{x}^0$ e $\mathbf{x}$, da essi diverso.

OSSERVAZIONE • Come osservato inizialmente riguardo alle derivate direzionali seconde:
$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)^2 f(\mathbf{x}^0) = \;\; \langle \mathbf{v}\cdot Hf(\mathbf{x}^0)\mathbf{v}\rangle \;=\; {}^t\mathbf{v}\cdot Hf(\mathbf{x}^0)\mathbf{v}.$$
Pertanto i polinomi di Taylor del secondo ordine si scrivono:

$$P_2(\mathbf{x}) = \; f(\mathbf{x}^0) \;+\; (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) \;+\; \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot Hf(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \;=$$
$$= \;\; f(\mathbf{x}^0) \;+\; (x_1-x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) + \cdots + (x_d-x_d^0)\frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}^0) \;+$$
$$+\;\; \frac{1}{2}\left((x_1-x_1^0)^2\frac{\partial f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^0) + \ldots (x_d-x_d^0)^2\frac{\partial f}{\partial x_d^2}(\mathbf{x}^0)\right) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{i<j}^{d}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x}^0)$$

• L'unicità del polinomio di Taylor è, tra l'altro, utile nella pratica per ricavare polinomi di Taylor di funzioni di più variabili, da quelli notevoli di funzioni di una variabile, dalle quali sono ottenute le prime per composizione.

• Dal polinomio di Taylor di centro $\mathbf{x}^0$ e grado k, altrimenti calcolato, si ottengono, per $|\mathbf{p}|\le k$, le derivate parziali $\frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0)$ moltiplicando per $\mathbf{p}!$ il coefficiente del monomio $(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}$.

DIM. caso particolare $d = 2$, $k = 2$ polinomio di Taylor di ordine 2 in 2 variabili. Ci si riduce al caso $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0) = (0, 0)$: $h(x, y) = f(x^0 + x, y^0 + y)$. Si denota h ancora con f.

- b *Si mostra l'unicità a priori*: dati due polinomi P e Q, in 2 variabili di grado 2, con tale proprietà di approssimazione per f, il polinomio $R = P - Q$, $R(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, di grado minore eguale a 2, verifica $\dfrac{|R(x, y)|}{x^2 + y^2} \to 0$, $(x, y) \to (0, 0)$. Ovvero

$$\sup_{x^2+y^2=r^2} \left| a\frac{x^2}{x^2 + y^2} + b\frac{y^2}{x^2 + y^2} + c\frac{xy}{x^2 + y^2} + d\frac{x}{x^2 + y^2} + e\frac{y}{x^2 + y^2} + f\frac{1}{x^2 + y^2} \right| =$$

$$= \sup_{\theta\in\mathbf{R}} \left| a\cos^2\theta + \; b\sin^2\theta + \quad \frac{c}{2}\sin 2\theta + \quad d\frac{\cos\theta}{r} + \quad e\frac{\sin\theta}{r} + \quad f\frac{1}{r^2} \right| \to 0,\ r \to 0^+,$$

quindi $f = 0$, per $\theta = 0$ si ha $d = 0$, per $\theta = \frac{\pi}{2}$ $e = 0$, ancora per tali θ si ottiene $a = b = 0$, quindi per $\theta = \frac{\pi}{4}$ si ha $c = 0$.

- a 1: candidato polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $(0, 0)$:

Sia $g(t) = g_{(a,b)}(t) = f((ta, tb))$. Per $(x, y) \neq (0, 0)$ si pone $(a, b) = \dfrac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $t = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pertanto $f(x, y) = g(t))$. Se per tali t e (a, b) si usa lo sviluppo usuale di $g(t)$ in t=0:

$f(x, y) = g(t) = g(0) + g'(0)t + \dfrac{1}{2}g''(0)t^2 + o_{(a,b)}(t^2) =$

$= f(0, 0) + t((a, b) \cdot \nabla f(0, 0)) + \dfrac{1}{2}t^2(a, b) \cdot Hf(0, 0)(a, b) + o_{(a,b)}(t^2)$: quindi $f(xy) =$

$= f(0,0)+x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\dfrac{1}{2}x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+\dfrac{1}{2}y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)+xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)+o_{(a,b)}(x^2+y^2)$

con resto $o_{(a,b)}$ a priori dipendente dalla direzione (a, b). Il polimnomio candidato è $P(x, y) = f(0, 0) + x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \dfrac{1}{2}x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + \dfrac{1}{2}y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) + xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0) =$
$= (x, y) \cdot \nabla f(0, 0) + \frac{1}{2}(x, y) \cdot Hf(0, 0)(x, y)$.

Nel seguito si indicano le derivate parziali semplicemente con indici: *e.g.* $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2,y}$ con f_{xxy}.

- Per mostare che l'errore non dipende dalla direzone (a, b) si può procedere come segue:

2 $f(x, y)$ e $P(x, y)$ hanno stesse derivate in $(0, 0)$, dall'ordine 0 all'ordine 2: $P(0, 0) = f(0, 0)$, $P_x(x, y) = f_x(0, 0) + xf_{xx}(0, 0) + yf_{xy}(0, 0)$, $P_y(x, y) = f_y(0, 0) + yf_{yy}(0, 0) + xf_{xy}(0, 0)$, $P_{xx}(x, y) = f_{xx}(0, 0)$, $P_{yy}(x, y) = f_{yy}(0, 0)$, $P_{yx}(x, y) = f_{xy}(0, 0)$

3 sia $\varphi(x, y) = f(x, y) - P(x, y)$, con tutte le derivate nulle in $(0, 0)$. Come sopra si sviluppa ad ordine 0, ma con *resto di Lagrange*, in $t = 0$ la funzione $\gamma(t) = \varphi(t(a, b)) = f(ta, tb) - P(ta, tb)$, $t \leq \sqrt{x^2 + y^2}$: vi è $\tau = \tau(x, y) \in (0; t) = (0; \sqrt{x^2 + y^2})$:

$$\varphi(x, y) = \varphi(t(a, b)) = t\gamma'(\tau) = ta\varphi_x(\tau(a, b)) + tb\varphi_y(\tau(a, b)).$$

Per differenziabilità in $(0, 0)$ d φ_x ed φ_y vi è $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ per cui

$\varphi_x(x, y) = x\varphi_{xx}(0, 0) + \varphi_{xy}(0, 0) + \varepsilon_1 = \varepsilon_1$, $\varphi_y(x, y) = \varepsilon_2$, con $\displaystyle\sup_{x^2+y^2\leq r^2} \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0,\ r \to 0^+$,

quindi $\varphi(x, y) = at\varepsilon_1(\tau(a, b)) + bt\varepsilon_2(\tau(a, b)) = x\varepsilon_1\left(\dfrac{\tau}{t}(x, y)\right) + y\varepsilon_2\left(\dfrac{\tau}{t}(x, y)\right)$,

ove $0 < \tau = \tau(x, y) < t = \sqrt{x^2 + y^2}$. Quindi:

$$\sup_{x^2+y^2=t^2} \frac{|\phi(x, y)|}{t^2} \leq \sup_{x^2+y^2=t^2} \frac{|x|}{t} \frac{\left|\varepsilon_1\left(\frac{\tau}{t}(x, y)\right)\right|}{\tau} + \sup_{x^2+y^2=t^2} \frac{|y|}{t} \frac{\left|\varepsilon_2\left(\frac{\tau}{t}(x, y)\right)\right|}{\tau} \leq$$

$$\leq \sup_{u^2+v^2\leq t^2} \frac{|\varepsilon_1(u, v)|}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \sup_{u^2+v^2\leq t^2} \frac{|\varepsilon_2(u, v)|}{\sqrt{u^2 + v^2}} \to 0,\ t \to 0^+.$$

DIM. caso generale - b *Si mostra l'unicità a priori .* Dati due polinomi P e Q, in d variabili di grado k, con tale proprietà di approssimazione per f, il polinomio $R = P - Q$, $R(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}:|\mathbf{p}|\le k} \mathbf{c}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}$, di grado minore o eguale a k, verifica: $\dfrac{R(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k} \to 0$, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$. Fissato $\mathbf{v}$, il polinomio di grado k di una variabile $r(t) = R(\mathbf{x}^0 + \mathbf{v}t) = \sum_{1\le h\le k} t^h \sum_{\mathbf{p}:|\mathbf{p}|=h} \mathbf{c}_{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$ è $o(t^k)$ per $t \to 0$. Deve avere coefficienti nulli, lo si mostra per induzione su k:

- - sia $p(t) = a_k t^k + \cdots + a_1 t + a_0$, $o(t^k)$ $t \to 0$, allora $a_k = \cdots = a_0 = 0$

- - - si ha $p(t) = t(a_k t^{k-1} + \cdots + a_1) + a_0 = tq(t) + a_0$ quindi $\frac{p(t)}{t^k} = \frac{a_0}{t^k} + o(\frac{1}{t^k}) \to 0$, $t \to 0$, se e solo se $a_0 = 0$. Si procede con l'induzione:

- - - per $k = 0$, $p(t) = a_0 = 0$, altrimenti, per $k \ge 1$, $\frac{p(t)}{t^k} == \frac{q(t)}{t^{k-1}} \to 0$, per ipotesi induttiva $a_k = \cdots = a_1 = 0$.

I coefficienti $S_h(\mathbf{v}) =: \sum_{\mathbf{p}:|\mathbf{p}|=h} \mathbf{c}_{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$ (polinomi omogenei di grado h in $\mathbf{v}$) di $r(t)$ calcolano la funzione nulla. Poichè $R(\mathbf{x}) = \sum_{h=0}^{k} S_h(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ anch'esso calcola la funzione nulla. Per dimostrare che i coefficienti $\mathbf{c}_{\mathbf{p}}$ di R sono nulli, si procede per induzione su d, il numero di variabili:

- - per $d = 1$ si fa una seconda induzione su k del polinomio simile alla precedente: per $k = 0$ il polinomio calcola il valore del suo unico coefficiente che è il termine noto. Passo induttivo: si calcola il polinomio in 0 e si ottiene che il termine noto è nullo, quindi si divide per la variabile e si ottiene un polinomio di grado minore che si annulla per i valori diversi da 0, ma la funzione calcolata dal polinomio è continua quindi si annulla anche in 0, per ipotesi induttiva ha tutti i coefficienti nulli, che sono i rimanenti del polinomio dato.

- - per il passo induttivo si considera $S_h(\mathbf{v})$, si fissa, con valore A non nullo, una delle variabili che compare elevata ad esponente non nullo, per fissare le idee la prima. Si ottiene un polinomio Σ di $\underline{d-1 \text{ variabili}}$ che calcola la funzione nulla, e che è somma di: un polinomio omogeno di grado h con coefficienti $\mathbf{c}_{(0,\mathbf{q})}$ (dovuto agli addendi in cui non compare la prima variabile), e uno di grado al più $h-1$ con coefficienti $\mathbf{c}_{\mathbf{p}}A^{\mathbf{p}_1}$, $\mathbf{p}_1 \ne 0$. Dovendo per ipotesi induttiva essere nulli i coefficienti di Σ si ha: $\mathbf{c}_{(0,\mathbf{q})} = 0$, e $\mathbf{c}_{\mathbf{p}}A^{\mathbf{p}_1} = 0$, se $\mathbf{p}_1 \ne 0$. Essendo $A \ne 0$ si ha che tutti i $\mathbf{c}_{\mathbf{p}}$ sono nulli.

a- *Si mostra che il polinomio di Taylor soddisfa la proprietà di approssimazione.*
Sia $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Per $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}^0$ si pone $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^0}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|}$, $t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$. Pertanto $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$. Se per tali t e $\mathbf{v}$ si usa lo sviluppo usuale di $g(t)$ in $t = 0$: $f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) = g(t) = g(0)+g'(0)t+\ldots \dfrac{1}{k!}g^k(0)t^k+o_{\mathbf{v}}(t^k) = f(\mathbf{x}^0)+(\mathbf{v}\cdot\nabla)f(\mathbf{x}^0)t+\cdots+\dfrac{1}{k!}\left((\mathbf{v}\cdot\nabla)\right)^k f(\mathbf{x}^0)t^k+o_{\mathbf{v}}(t^k)$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla f(\mathbf{x}^0) + \cdots + \frac{1}{k!}\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla\right)^k f(\mathbf{x}^0) + o_{\mathbf{v}}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$$

con resto $o_{\mathbf{v}}$ a priori dipendente dalla direzione $\mathbf{v}$, ovvero da $\mathbf{x}$ oltre che da $\mathbf{x}^0$ e $t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$, in quanto g dipende da sia da $\mathbf{x}^0$ che da $\mathbf{x}$. Per l'indipendenza dalla direzione $\mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$, di $o_{\mathbf{v}}$, si usa la definizione di (Frechet) differenziabilità in $\mathbf{x}^0$ delle derivate di ordine $k-1$.

LEMMA 2 la differenza tra $f(\mathbf{x})$ e il polinomio di Taylor di ordine k centrato in $\mathbf{x}^0$ ha tutte le derivate parziali sino all'ordine k nulle in $\mathbf{x}^0$.

DIM. si tratta di calcolare, per ogni multindice $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$, $|\mathbf{p}| = h = p_1+\cdots+p_d \le k$, le derivate parziali di ordine minore eguale a k in $\mathbf{x}^0$ dei monomi

$$M_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) =: \frac{1}{\mathbf{p}!}\ \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0)\ \ (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}\ =\ \frac{1}{p_1!\dots p_d!}\ \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{p_1}\dots\partial x_d^{p_d}}(\mathbf{x}^0)\ (x_1-x_1^0)^{p_1}\dots(x_d-x_d^0)^{p_d}$$

$$\frac{\partial^{|\mathbf{q}|} M_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}}}(\mathbf{x}^0),\ \mathbf{q}=(q_1,\dots,q_d),\ |\mathbf{q}|\le k.$$

Se qualche i si ha $q_i > p_i$, per il teorema di Schwarz, facendo per ultime le derivate $\frac{\partial^{q_i}}{\partial x_i^{q_i}}$, si ottiene la funzione nulla. Invece se per qualche i si ha $q_i < p_i$ rimane qualche fattore $x_i - x_i^0$ che si annulla quando si calcola in $\mathbf{x}^0$. Quindi per linearità delle derivate, qualle che non danno contributo nullo sono quelle per cui $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ e sempre per Schwarz si conclude.
Ci si riconduce quindi a provare il seguente lemma basato sulla defինzione di differenziabilità:
LEMMA 3 Se φ è $C^{k-2}(\Omega)$ con derivate parziali di ordine $k-1$ in Ω che siano differenziabili in $\mathbf{x}^0$, e tutte le derivate parziali sino all'ordine k sono nulle in $\mathbf{x}^0$ allora $\varphi(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$.

DIM. Per $k = 1$ è la definizone di differenziabilità di φ. Come sopra, con le stesse notazioni, si considera lo sviluppo di Taylor di $\varphi(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v})$ di ordine $k-2$ con resto di Lagrange, tenendo presente che tutte le derivate sino all'ordine k sono nulle in $\mathbf{x}^0$, e quindi il polinomio di Taylor in $\mathbf{x}^0$ di ordine $k-2$ di φ è nullo, vi è τ, $0 < \tau = \tau(x, y) < t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left((\mathbf{v}\cdot\nabla)\right)^{k-1}\varphi(\mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v}) = t^{k-1}\sum_{|\mathbf{p}|=k-1}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}\frac{\partial^{k-1}\varphi}{\partial\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v}),$$

per differenziabilità in $\mathbf{x}^0$ delle derivate di ordine $k-1$, che hanno derivate parziali prime nulle in $\mathbf{x}^0$, considerando che $|\tau\mathbf{v}| \le |t||\mathbf{v}| = t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$, si ha che vi sono $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ tali che

$$\lim_{r\to0^+}\sup_{0<|\mathbf{w}|\le r}\frac{|\varepsilon(\mathbf{w})|}{|\mathbf{w}|} = 0 \text{ per cui}\quad |\varphi(\mathbf{x})| =\le t^{k-1}\sum_{|\mathbf{p}|=k-1}|\mathbf{v}^{\mathbf{p}}|\left(\sum_{1\le i\le d}\left|\tau\mathbf{v}_i\frac{\partial^k\varphi}{\partial\mathbf{x}_i\partial\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0)\right| + |\varepsilon_{\mathbf{p}}(\tau\mathbf{v})|\right)\le$$

$$\le |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^{k-1}\sum_{|\mathbf{p}|=k-1}\left|\varepsilon_{\mathbf{p}}\left(\frac{\tau}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\right)\right|\ =\ o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k).$$

c- Se $f \in C^{k+1}(\Omega)$ si ha la seguente dimostrazione, indipendente da quella del punto **a**, che prova direttamente l'approssimazione con i polinomi di Taylor di ordini sia k che $k+1$.
Sia $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}^0$, $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^0}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|}$, $t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$. Pertanto $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v})$. Sia $g(t) = f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v})$.
Usando il resto di Lagrange dello sviluppo di ordine k di g vi è τ, $0 < |\tau| < t$ per cui:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{v}) = g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)t^k + \frac{1}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\tau)t^{k+1} =$$

$$= f(\mathbf{x}^0) + \dots + \frac{1}{k!}\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\right)^k f(\mathbf{x}^0) + \frac{1}{(k+1)!}\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\right)^{k+1} f(\mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v}).$$

Per i teoremi di Schwarz e multinomiale si ha

$$\frac{\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\right)^{k+1} f(\mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v})}{(k+1)!}\ =\ \sum_{|\mathbf{p}|=k+1}\frac{1}{\mathbf{p}!}\ \frac{\partial^{k+1}f}{\partial\mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v})\ \ (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}\ =:\ L_k.$$

Tale resto L_k è $o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$. Basta dimostrarlo per ogni singolo addendo, poichè somma finita di $o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$ è $o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k)$: per continuità in un intorno compatto di $\mathbf{x}^0$ le derivate di ordine $k+1$ sono limitate. I rapporti $\dfrac{|(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k} = \dfrac{|(t\mathbf{v})^{\mathbf{p}}|}{|t\mathbf{v}|^k} \le (|v_i^{p_i}| \le |v|^{p_i} = 1)\,\dfrac{t^{k+1}}{t^k} = t$ sono infinitesimi per $\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0$, *i.e.* $t\to0^+$.

Ciò conclude la dimostrazione con $\mathbf{u} = \mathbf{x}^0+\tau\mathbf{v}$. Proseguendo si ha, una dimostrazione meno riposta della proprietà di approssimazione anche del polinomio di Taylor di grado $k+1$ nell'ipotesi più forte $f \in C^{k+1}(\Omega)$: $f(\mathbf{x}) = P_k + L_k = P_{k+1} + L_k - \frac{\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\cdot\nabla)\right)^{k+1} f(\mathbf{x}^0)}{(k+1)!}$,
si stima la differenza:

$$\frac{\left| \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0 + \tau \mathbf{v}) \ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} - \sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0) \ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}} \right|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{k+1}} \to 0 \ , \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}^0,$$

infatti tale rapporto è minore uguale a: $\displaystyle\sum_{|\mathbf{p}|=k+1} \frac{1}{\mathbf{p}!} \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0 + \tau \mathbf{v}) \ - \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}^0) \ \right| \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\mathbf{p}}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{k+1}}$,
e il primo e il terzo fattore (caclolo precedente) di ogni addendo son limitati, mentre il secondo fattore è infinitesimo per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$ grazie all'ipotesi di continuità delle derivate parziali di ordine $k+1$ di f poichè $|\tau \mathbf{v}| \le t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] pagg.71-73 (secondo ordine in due variabili), pag.85 (secondo ordine in piu' variabili);

[B] pag. 295 (secondo ordine in due variabili), pagg.360-362;

[F] pagg.159-165.