Esercizio teorico (fattorizzazione LU)

$\alpha \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & & \\ & -\alpha & 1 & & \\ & & -\alpha & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad A_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ -\alpha & \text{se } (i,j)=1,n \\ -\alpha & i-j=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Valgono per questa matrice le ipotesi del teorema che assicura esistenza della fattorizzazione LU?

<u>Condizione</u>: se le sottomatrici principali di testa $A_{1:k,1:k}$ sono invertibili per ogni $k=1,2,3,\dots n-1$, allora esiste la fattorizzazione LU

$$A_{1:1,1:1} = [1] \qquad A_{1:2,1:2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{1:k,1:k}$ sono tutte triang. inferiori con 1 sulla diagonale per $k=1,\dots,n-1$
$\Rightarrow$ sono tutte invertibili $\boxed{\checkmark}$

2. Calcolare la fattorizzazione LU della matrice A

Elim. Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & & \\ & -\alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{II+\alpha I} \begin{bmatrix} 1 & & & & & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha^2 \\ & -\alpha & 1 & & & \\ & & -\alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III+\alpha II} \begin{bmatrix} 1 & & & & & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha^2 \\ & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha^3 \\ & & -\alpha & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & & & -\alpha \\ 0 & 1 & & & & & -\alpha^2 \\ & 0 & 1 & & & & -\alpha^3 \\ & & 0 & 1 & & & -\alpha^4 \\ & & & -\alpha & 1 & & 0 \\ & & & & -\alpha & \ddots & \vdots \\ & & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & & -\alpha \\ 0 & 1 & & & & -\alpha^2 \\ & 0 & 1 & & & -\alpha^3 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & -\alpha^{n-1} \\ & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & -\alpha \\ 0 & 1 & & & & -\alpha^2 \\ & 0 & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & -\alpha^{n-1} \\ & & & & 0 & 1-\alpha^n \end{bmatrix}}_{U}$$

diverso dagli altri passaggi per la presenza di 1 nella pos. (n,n).

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\alpha & 1 & & & 0 & \\ 0 & -\alpha & \ddots & & & \\ 0 & 0 & -\alpha & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Controlliamo che $A = L \cdot U$:

$$\to \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\alpha & 1 & & & & \\ & -\alpha & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 \cdots 0 & & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & -\alpha \\ 0 & 1 & & & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \ddots & & -\alpha^3 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & & & 1-\alpha^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & 0 & & \alpha^2-\alpha^2=0 \\ 0 & -\alpha & 1 & & & \alpha^3-\alpha^3=0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & 1 & \alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}=0 \\ 0 & 0 & 0 & & -\alpha & \cancel{\alpha^n}+1-\cancel{\alpha^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & & 0 \\ & -\alpha & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

coincidono con colonne dell'identità

Prime n-1 colonne coincidono con quelle della matrice L

Coincide con la matrice A, OK

$LU = A$

Ricordiamo che (dal teorema esistenza LU) $L_{1:k,1:k} \cdot U_{1:k,1:k} = A_{1:k,1:k}$

$k = n-1$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_{1:n-1,1:n-1} & -\alpha \\ \hline & 1 \end{array}\right]}_{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} L_{1:n-1,1:n-1} & \\ \hline & \end{array}\right]}_{L} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} U_{1:n-1,1:n-1} & \\ \hline & \end{array}\right]}_{U}$$

$$A_{1:n-1,1:n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -\alpha & 1 & & \\ & -\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & -\alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}}_{L = A_{1:n-1,1:n-1} = L_{1:n-1,1:n-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{U = I = U_{1:n-1,1:n-1}}$$

Posso trovare direttamente una fatt. LU di $A_{1:n-1,1:n-1}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & & \\ & -\alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ -\alpha & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -\alpha & 1 & 0 \\ \hline ? & ? ? ? & ? ? ? & ? & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & ? \\ & 1 & & & ? \\ & & 1 & & ? \\ & & & \ddots & ? \\ & & & 1 & ? \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & ? \end{array}\right]$$

1 (sotto la riga di $?$), 2 (accanto alla colonna di $?$), 3 (accanto all'ultimo $?$)

1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} ? ? ? ? \cdots ? & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{matrix} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} ? ? ? & \cdots & ? \end{bmatrix} \cdot I$$

$\Rightarrow$ sull'ultima riga della L devo avere $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$

② Confronto prodotti riguardo l'ultima colonna della matrice:

$$\begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -\alpha & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \left.\begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix}\right\} x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\alpha & 1 & & & \\ & -\alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

sostituzione in avanti:

$$x_1 = -\alpha$$

$$-\alpha x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \alpha x_1 = \alpha\cdot(-\alpha) = -\alpha^2$$

$$-\alpha x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \alpha x_2 = \alpha\cdot(-\alpha^2) = -\alpha^3$$

$$\vdots$$

$$-\alpha x_{n-2} + x_{n-1} = 0 \Rightarrow x_{n-1} = \alpha x_{n-2} = \alpha(-\alpha^{n-2}) = -\alpha^{n-1}$$

③

$$1 = A_{n,n} = (\text{ultima riga di } L)(\text{ultima colonna di } U) = [0\ 0 \cdots 0\ -\alpha\ 1] \cdot \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha^2 \\ \vdots \\ -\alpha^{n-1} \\ y \end{bmatrix}$$

incognita

$$1 = -\alpha\cdot(-\alpha^{n-1}) + y \qquad 1 = \alpha^n + y \qquad y = 1-\alpha^n$$

3. Per quali valori di α la matrice A è invertibile?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & -\alpha \\ & \ddots & & -\alpha^2 \\ & & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha^{n-1} \\ & & & 1-\alpha^n \end{bmatrix}$$

$$\det A = \det L \cdot \det U = (1\cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1)(1\cdot 1\cdot 1 \cdots 1(1-\alpha^n))$$

A invertibile $\Leftrightarrow 1-\alpha^n \neq 0$ $\qquad$ A singolare $\Leftrightarrow \alpha^n = 1$

$\Leftrightarrow \alpha$ radice n-esima dell'unità.

(Controllate che $\begin{bmatrix} 1 & & & & -1 \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$ è singolare!)

Elim. Gauss / Fattorizz. LU per matrici simmetriche:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{A_{21}}{A_{11}} & 1 & & \\ -\frac{A_{31}}{A_{11}} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ -\frac{A_{n1}}{A_{11}} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{L_1 A L_1^T}_{\text{simmetrica}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \times & \times & \times\times\cdots & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & & \times \end{bmatrix}$$

su blocco simmetrico

$$L_2 L_1 A L_1^T L_2^T = \begin{bmatrix} \times & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \times & & \vdots \\ 0 & 0 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \quad \cdots \quad L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 A L_1^T \cdots L_{n-1}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \times \end{bmatrix}}_{\text{diagonale} = D}$$

simmetrico

$$A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L} D \underbrace{(L_{n-1}^T)^{-1} \cdots (L_1)^{-T}}_{L^T} = L \cdot D L^T$$

$$\begin{bmatrix} \times & & \\ & \ddots & \\ & & \times \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Pivoting è più complicato! Bisogna scambiare righe e colonne con la stessa permutazione, $A \to PAP^T$, e anche questo non basta per assicurarci che gli elementi non crescano troppo nella fattorizzazione. Matlab ha $[L, D, P] = \mathrm{ldl}(A)$

$$LDL^T = PAP^T$$

Però, D a volte ha blocchi 2×2 sulla diagonale!

Matrici simmetriche e positive definite (SPD):

sono le matrici che sono:

1) simmetriche, $A = A^T$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
2) positive definite, cioè tali che $x^T A x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

(spesso (1) è "sottinteso", "positiva definita" di solito sottintende simmetrica).

Proprietà (qui non dimostrata): A simmetrica è positiva definita se e solo se tutti i suoi autovalori sono reali positivi (strettamente).

Proprietà:

1) una matrice SPD è invertibile
2) una matrice SPD ha tutti gli elementi sulla diagonale $A_{kk} > 0$. $k = 1, 2, \ldots, n$
3) se A SPD, M invertibile, allora MAM^T è SPD.

dim:

1) autovalori $> 0 \Rightarrow$ no autovalori 0, e la matrice è invertibile

2) Prendo $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_k$ (k-esimo elem. della base canonica)

Allora, $Ae_k = \begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \vdots \\ A_{nk} \end{bmatrix}$, $e_k^T A e_k = A_{kk} > 0$ per la definizione

3) Devo dimostrare che per ogni $x \neq 0$, $\underbrace{x^T M}_{y^T} A \underbrace{M^T x}_{y} > 0$.

Definisco $y = M^T x$, allora

(oss: $y = M^T x \neq 0$ perché M è invertibile)

$x^T (M A M^T) x = y^T A y > 0$ perché A è SPD

Oss: se A è SPD, non incontro mai pivot nulli durante la fattorizzazione LDL

1) $A_{11} > 0$ per la proprietà (2) (quindi $A_{11} \neq 0$)

2) $L_1 A L_1^T$ SPD per la proprietà (3)

3) $L_1 A L_1^T = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & x & x \cdots & x \\ 0 & x & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & x & & \cdots & x \end{bmatrix}$ $\qquad (L_1 A L_1^T)_{22} > 0$ perché $L_1 A L_1^T$ SPD

4) $L_2 (L_1 A L_1^T) L_2^T$ SPD per la (3)

5) $(L_2 (L_1 A L_1^T) L_2^T)_{33} > 0$ per la (2), e così via.

$\Rightarrow$ posso portare a termine la fattorizzazione, ottenendo

$$A = LDL^T, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$ con $d_{ii} > 0$ per $i = 1, \dots, n$.

Variante della fattorizzazione LDL^T per matrici SPD: fattorizzazione di Cholesky

Oss: posso scrivere $D = \begin{bmatrix} d_{11}^{1/2} & & & 0 \\ & d_{22}^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn}^{1/2} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11}^{1/2} & & & 0 \\ & d_{22}^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn}^{1/2} \end{bmatrix}}_{D^{1/2}}$

Allora, $A = LDL^T = \underbrace{L D^{1/2}}_{R^T} \underbrace{D^{1/2} L^T}_{R}$ triangolare superiore

Difatti, $\left(D^{1/2}L^T\right)^T = \left(L^T\right)^T\left(D^{1/2}\right)^T = L D^{1/2}$

Abbiamo mostrato che se A è SPD possiamo scriverla come

$$\boxed{A = R^T R \quad \text{con} \quad R \text{ triangolare superiore.}}$$

fatt. di Cholesky

$$D^{1/2}L^T = \begin{bmatrix} d_{11}^{1/2} & & 0 \\ & d_{22}^{1/2} \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ & 0 & & \ddots & l_{n,n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

triang. superiore, ma non più con 1 sulla diagonale

$$= \begin{bmatrix} d_{11}^{1/2} & l_{21}d_{11}^{1/2} & l_{31}d_{11}^{1/2} & \cdots & l_{n1}d_{11}^{1/2} \\ & d_{22}^{1/2} & l_{32}d_{22}^{1/2} & \cdots & l_{n2}d_{22}^{1/2} \\ & 0 & \ddots & d_{n-1,n-1}^{1/2} & l_{n,n-1}d_{n-1,n-1}^{1/2} \\ & & & & d_{nn}^{1/2} \end{bmatrix}$$

Costo: $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ ops $+$ n radici quadrate

sostanzialmente lo stesso della LDL^T

Matlab ha $R = \mathrm{chol}(A)$