ESERCITAZIONE del 10/11/2021

SOMME DIRETTE

Due sottospazi non nulli A e B di V si dicono in somma diretta se: per ogni $a, \alpha \in A$ e $b, \beta \in B$ se $a+b=\alpha+\beta$ allora $a=\alpha$, $b=\beta$ (unicità della decomposizione)

Ciò è equivalente a dire $A \cap B = (0_V)$.

Nel caso lo $\operatorname{span}(A \cup B) = A+B$ si scrive $A \oplus B$.

Osservazione: se $A=\operatorname{span}(v)$, $B=\operatorname{span}(w)$, $v \neq 0_V$, $w \neq 0_W$ si ha

$$A \cap B = (0_V) \iff v \text{ e } w \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

Più in generale

dati $(V_i)_{i\in I}$ sottospazi di V non nulli essi si dicono in somma diretta se

1) dati $i_1, \dots, i_k \in I$ diversi, e $v_{i_1} \in V_{i_1}, \dots v_{i_k} \in V_{i_k}$ per cui $v_{i_1} + \dots + v_{i_k} = 0_V$

allora $v_{i_1} = \dots = v_{i_k} = 0$

Ciò è equivalente a dire $\forall i \in I \quad V_i \cap \operatorname{span}\left(\bigcup_{j\neq i} V_j\right) = (0_V)$ cioè

2) $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = (0_V)$

1) $\Rightarrow$ 2) se $v_i \in V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j$ vi sono $i_1, \dots, i_h \in I$ diversi da i

per cui $v_i = v_{i_1} + \dots + v_{i_h}$, cioè $v_i - v_{i_1} - \dots - v_{i_h} = 0_V$ allora

$v_i = -v_{i_1} = \dots = -v_{i_h} = 0_V$

2) $\Rightarrow$ 1) poiché gli $i_1, \dots, i_k$ son tra loro diversi $v_{i_1} = -v_{i_2} \dots - v_{i_k} \in V_{i_1} \cap \sum_{j\neq i_1} V_j$.

Nel caso $\operatorname{span}(\bigcup V_i) = \sum V_i$ si scrive $\bigoplus_{i\in I} V_i$

Proposizione 1 se i sottospazi $(V_i)_{i\in I}$ sono in somma diretta allora

$$\dim \bigoplus V_i = \sum \dim V_i$$

<u>DIM</u> per ogni $i\in I$ sia $\mathcal{B}_i$ base di V_i. $\mathcal{B}_i = (b_i^l)_{l\in L_i}$

1) $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$ genera $\bigoplus V_i = \operatorname{span}(\bigcup V_i)$: ogni elemento di $\bigoplus V_i$ è somma di un numero finito di elementi $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ con $v_{i_1}\in V_{i_1}, \dots, v_{i_k}\in V_{i_k}$. ognuno di essi è combinazione lineare di elementi della rispettiva base $\mathcal{B}_j$. Somma finita di combinazioni lineari è combinazione lineare.

2) $\mathcal{B}$ è una famiglia di vettori indipendenti: infatti una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$ è una somma finita di combinazioni lineari di elementi dei $\mathcal{B}_i$: $\sum_{j=1}^{h} \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_j^k b_{i_j}^{l_k}$. Si pone $v_{i_j} = \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_j^k b_{i_j}^{l_k}$.
Quindi una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$ è una somma finita di elementi dei V_i: $v_{i_1} + \dots + v_{i_h}$ con $i_1, i_2, \dots, i_h$ diversi e $v_j \in V_{i_j}$: se fosse nulla per definizione $v_{i_1} = \dots = v_{i_h} = 0_V$ e quindi i corrispettivi $(\alpha_1^k)_k, \dots, (\alpha_h^k)$ sarebbero tutti nulli.

Somme dirette ortogonali

Siano $V_1, \dots, V_N$ sotospazi non nulli di $\mathbb{R}^n$.

1) se per ogni i si ha $V_i \perp \sum_{j \neq i} V_j$ (cioè per ogni $v \in V_i$ e $v_{i_1} \in V_{i_1}, \dots v_{i_k} \in V_{i_k}$ con $V_{i_1}, \dots, V_{i_k} \neq V_i$ si ha $\langle v \cdot (v_{i_1} + \dots + v_{i_k}) \rangle = 0$)

allora $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = (0_V)$

Infatti se $V_i \ni v = v_{i_1} + \dots + v_{i_k}$, $v_j \in V_j$ con $V_{i_1} \dots V_{i_k}$ diversi da V_i moltiplicando scalarmente per v si ha

$$|v|^2 = \langle v \cdot v \rangle = \langle v \cdot (v_{i_1} + \dots + v_{i_k}) \rangle = 0 \quad \text{cioè} \quad |v| = 0 \quad \text{cioè} \quad v = 0_{\mathbb{R}^n}$$

2) In tal caso i $V_1, \dots, V_N$ sono in somma diretta che si indica con $\bigoplus_{i \perp} V_i$

Osservazione

A è sottospazio di B sottospazio di V
se $\dim A = \dim B = k$ è finita allora $A = B$

Infatti una base di A ha $\dim A = k$ elementi ma essi sono anche $k = \dim B$ elementi di B linearmente indipendenti, quindi per il teorema di completamento sono una base di B.

Osservazione

$\dim V = n$ finita, se A e B sono sottospazi non nulli in somma diretta con $\dim B = n - \dim A$ allora

$$\mathbb{R}^n = A \oplus B$$

Infatti per la proposizione 1 $\dim A \oplus B = \dim A + \dim B = n$
d'altronde $A \oplus B \subseteq \mathbb{R}^n$ per la precedente osservazione
$A \oplus B = \mathbb{R}^n$.

Proposizione 2 Se A è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ non nullo.

1) $A^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v \cdot a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

2) $\mathbb{R}^n = A \oplus_\perp A^\perp$ equivalentemente $\dim A^\perp = n - \dim A$

DIM. Sia $k = \dim A > 0$ e sia data una base di A:

$a_1 = (a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, a_k = (a_k^1, \dots, a_k^n)$ Si ha

$\therefore A^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v \cdot a_1 \rangle = \dots = \langle v \cdot a_k \rangle = 0\}$ infatti:

se $\langle v \cdot a \rangle = 0 \ \forall a \in A$ in particolare $\langle v \cdot a_1 \rangle = 0, \dots, \langle v \cdot a_k \rangle = 0$;

viceversa se $\langle v \cdot a_1 \rangle = \dots = \langle v \cdot a_k \rangle = 0$, dato $a \in A$ esso è combinazione lineare degli $a_1, \dots, a_k$: $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, per cui:

$$\langle v \cdot a \rangle = \langle v \cdot (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) \rangle = \lambda_1 \langle v \cdot a_1 \rangle + \dots + \lambda_k \langle v \cdot a_k \rangle = 0 + \dots + 0 = 0$$

$\therefore$ 1) $A^\perp$ è l'insieme delle soluzioni $v = (x_1, \dots, x_n)$ del sistema lin. om. $\begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_1^n x_n = 0 \\ \vdots \\ a_k^1 x_1 + \dots + a_k^n x_n = 0 \end{cases}$

quindi è un sottospazio $A^\perp = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ a_k^1 & \dots & a_k^n \end{pmatrix}$.

$\therefore$ 2) Poiché le righe dei coefficienti della matrice associata sono indipendenti:

le sue ridotte hanno k pivots. Quindi: $\dim A^\perp = n - k = n - \dim A$