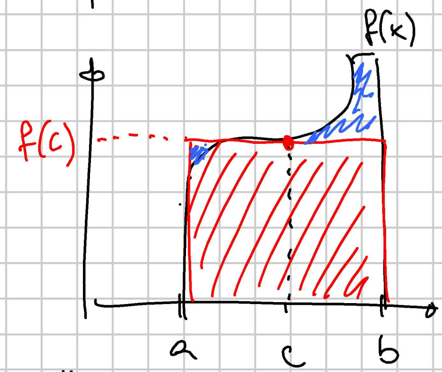
Integrazione numerica (quadratura)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

x_i nodi

w_i pesi

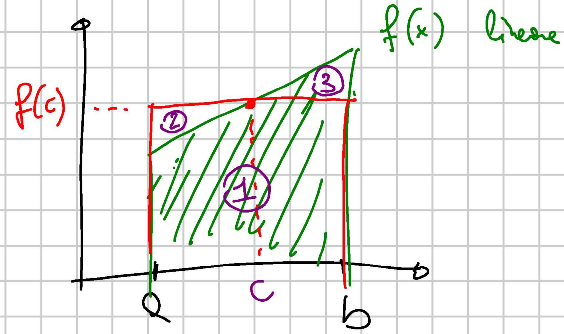
Metodo del punto medio



$$I \approx I_M = (b-a)\,f(c)$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Il metodo del punto medio fornisce il valore esatto se $f(x)$ è una funzione lineare:



$I = ① + ③$

$I_M = ① + ②$, ma $② = ③$

Grado di precisione (esattezza, accuratezza): è il più grande m tale che la formula di quadratura restituisce un valore esatto per tutte le f che sono polinomi di grado al più m.

Il risultato non è più esatto se $f(x)$ è un polinomio di grado 2: ad es. $f(x) = x^2$

$$I = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \neq (1-0)\,f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = I_M$$

Teorema: sia $f \in C^2([a,b])$, allora

$$|I_M - I| \leq \frac{1}{24} C_2 (b-a)^3 \qquad C_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Dim: sviluppo di Taylor:

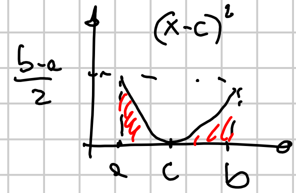
$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-c)^2$$

$$I_M - I = \underbrace{f(c)(b-a) - \int_a^b f(c) + f'(c)(x-c)\,dx}_{} - \int_a^b \frac{1}{2} f''(\xi)(x-c)^2\,dx$$

La diff. fra i primi due termini fa 0 perché $\int_a^b \overbrace{f(c)+f'(c)(x-c)}^{g(x)}\,dx$ è l'integrale di una funzione polinomiale $g(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$ di grado 1 tale che $g(c)=f(c)$.

La formula del punto medio è esatta su $g(x)$ $\Rightarrow$

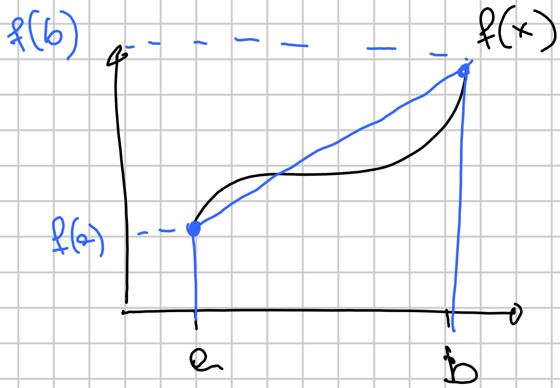
$$f(c)(b-a)=g(c)(b-a)=\int_a^b g(x)\,dx.$$



$$|I_M-I|=\left|\int_a^b \frac12 f''(\xi)(x-c)^2\,dx\right| \le \frac12\int_a^b |f''(\xi)|(x-c)^2\,dx$$

$$\le \frac12 C_2\underbrace{\int_a^b (x-c)^2\,dx}_{=\frac{1}{12}(b-a)^3} = \frac{1}{24}C_2(b-a)^3. \qquad c=\frac{a+b}{2}$$

Formula dei trapezi $\quad I=\int_a^b f(x)\,dx \approx I_T=\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+f(b)\right)$



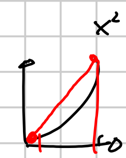
$W_1=W_2=\frac{b-a}{2} \qquad x_1=a,\quad x_2=b$

Area del trapezio $=\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$

semisomma basi

Anche questa formula è esatta se $f(x)$ è una funzione lineare.

Grado di precisione $=1$



$$I=\frac13=\int_0^1 x^2\,dx \neq I_T=\frac{0+1}{2}(1-0)=\frac12$$

Teorema: Sia $f(x)\in C^2([a,b])$. Allora,

$$|I_T-I|\le\frac{1}{12}C_2(b-a)^3 \qquad C_2=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Dim: Il metodo dei trapezi calcola $I_T=\int_a^b \phi(x)\,dx$, dove $\phi(x)$ è il polinomio di interpolazione di f di grado 1 con nodi $x_1=a$, $x_2=b$, cioè il polinomio di grado 1 il cui grafico passa per $(a,f(a))$, $(b,f(b))$. $\phi(a)=f(a)$, $\phi(b)=f(b)$.

Dalla formula del resto dell'interpolazione polinomiale, $\forall x \in [a,b]$

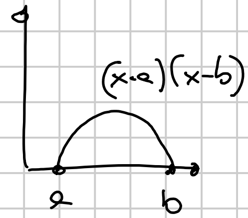
$$f(x)-\phi(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

ξ dipende da x

$$I_T - I = \int_a^b \phi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \big(\phi(x)-f(x)\big)\,dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0}\,dx$$

$$|I_T - I| = \left|\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(b-x)\,dx\right| \leq \int_a^b \frac{1}{2}\,|f''(\xi)|\,(x-a)(b-x)\,dx$$

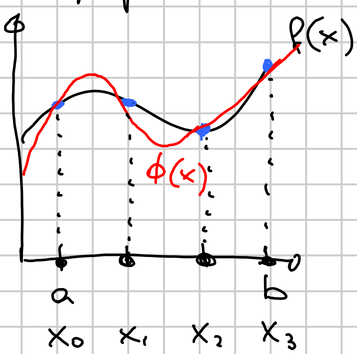
$$\leq \frac{1}{2}C_2 \underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{=\frac{1}{6}(b-a)^3} = \frac{1}{12}C_2(b-a)^3$$



Idea generale: possiamo prendere $I_n = \int_a^b \phi(x)\,dx$, dove $\phi(x)$ è il polinomio di interpolazione di f su $n+1$ nodi equispaziati tra a e b

Otteniamo le

<u>Formule di Newton-Cotes</u>.



$n=3$

$h=\frac{b-a}{n}$ ampiezza di ogni intervallo

$x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ \dots,\ x_k=a+kh,\ \dots$

$\dots\ x_n=a+nh=b$

$n=1 \to$ formula dei trapezi

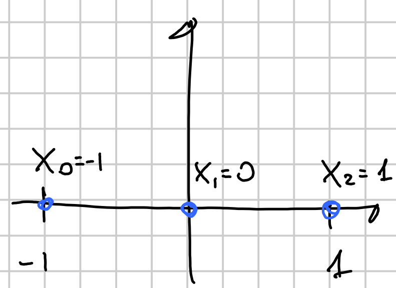
$n=2 \to$ vediamo cosa accade

$$I_n = \int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k)\,dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \underbrace{\int_a^b L_k(x)\,dx}_{W_k}$$

Possiamo calcolare W_k esplicitamente, ad es. per $n=2$, $[a,b]=[-1,1]$

$$L_0(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x(x-1)}{2} \qquad W_0=\int_{-1}^{1}\frac{x(x-1)}{2}\,dx=\frac{1}{3}$$

$$L_1(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=1-x^2 \qquad W_1=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3}$$



$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2} \qquad w_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x(x+1)}{2}\,dx = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1)$$ ⇝ formula di N-C con $n=2$ su $[-1,1]$

<u>Cambio di variabile</u>: possiamo ricondurre un integrale $\int_a^b L_k(x)\,dx$ a un integrale su $[-1,1]$

$c = \frac{a+b}{2}$ punto medio di $[a,b]$

$$x = c + \frac{b-a}{2} y \qquad y=-1 \Rightarrow x=a$$
$$dx = \frac{b-a}{2}\,dy \qquad y=1 \Rightarrow x=b$$

$n+1$ pti equispaziati $x_0, x_1, \dots x_n$ su $[a,b]$ corrispondono a $n+1$ pti equispaziati $y_0, y_1, \dots y_n$ su $[-1,1]$

$$\int_a^b L_k(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \underbrace{\int_{-1}^{1} L_k\left(c + \frac{b-a}{2} y\right) dy}_{\text{integrale che abbiamo calcolato in precedenza}}.$$

Per un intervallo generico $[a,b]$, i pesi della formula I_2 diventano $w_0 = \frac{1}{6}(b-a)$, $w_1 = \frac{4}{6}(b-a)$, $w_2 = \frac{1}{6}(b-a)$

Su un intervallo $[a,b]$,

$$I \approx I_2 = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right)$$

$\boxed{\text{Formula di Cavalieri-Simpson}}$

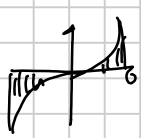
<u>ES</u>

$$I = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \approx I_2 = \frac{1}{6}\left(0^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{1}{6}\left(0 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

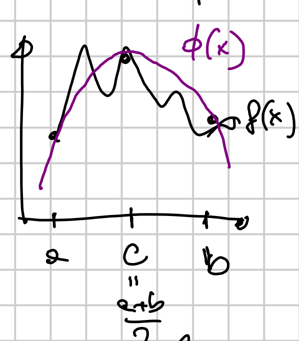
La formula di Cavalieri-Simpson I_2 ha grado di precisione 3

<u>ES:</u>

$$I = \int_{-1}^{1} x^3 = 0$$



$$I_2 = \frac{2}{6}\left(-1 + 4 \cdot 0 + 1\right) = 0.$$



<u>Teo:</u>

1) La formula di Newton-Cotes di grado n ha grado di esattezza $m = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n+1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$

$I_1 \quad m=1$

$I_2 \quad m=3$

2) $\left| I_n - I \right| = K_n C_{m+1} (b-a)^{m+2}$

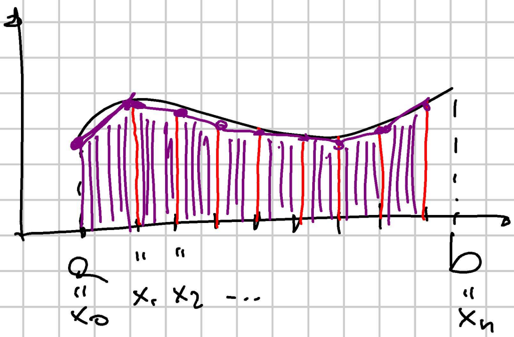
$I_1 = \frac{1}{12} C_2 (b-a)^3$

$I_2 = \frac{1}{90} C_4 (b-a)^5$

$\vdots$

Queste formule però sono usate solo con gradi bassi xo problemi di condizionamento

Formule composite



Divido $[a,b]$ in N intervallini della stessa lunghezza $\frac{b-a}{N} = h$

tramite punti equispaziati $\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{x_0}, x_1, x_2, \dots \underset{\overset{\shortparallel}{b}}{x_n}$

e approssimo $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$ con una delle formule viste.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{n=1}^{N} I_*(f, x_{n-1}, x_n)$$

ES Metodo del punto medio composito

$$I_{MC} = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{= h} f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) = h \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right).$$

Metodo dei trapezi composito

$$I_{TC} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n - x_{n-1}}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Metodo di Cavalieri-Simpson composito

$$I_{2C} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n - x_{n-1}}{6}\left(f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n)\right) = \frac{h}{6} \sum \left(f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n)\right)$$

$$= \frac{2}{3} I_{MC} + \frac{1}{3} I_{TC}$$

Costo computazionale: I_{MC}: N valutazioni di funzione + $O(N)$ op. aritm.

I_{TC}: $N+1$ valutazioni di funzione, perché

$$\sum_{n=1}^{N} \left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) = f(x_0) + \underbrace{f(x_1) + f(x_1)} + \underbrace{f(x_2) + f(x_2)} + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)$$

$$= f(x_0) + 2\sum_{n=1}^{N-1} f(x_n) + f(x_N)$$

$$I_{TC} = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_N)}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n)\right)$$

e analogamente per I_{2C} posso riscriverne con $N+(N+1) = \boxed{2N+1}$ valutazioni di funzione

(formule chiuse = se tra i nodi $x_1, \dots x_n$ di $\sum w_i f(x_i)$ ci sono a e b)

__Teo:__ Se I_C è una formula composita costruita a partire da una formula semplice con una stima dell'errore del tipo

$$|I_S - I| \leq k_n C_{m+1} (b-a)^{m+2}, \qquad (m = \text{grado di accuratezza})$$

allora per le formule composite vale

$$|I_C - I| \leq k_n C_{m+1} \frac{(b-a)^{m+2}}{N^{m+1}} = k_n C_{m+1} (b-a) \cdot h^{m+1}$$

__Dim:__ basta sommare le stime sugli errori sugli N sottointervalli:

$$|I_C - I| = \left|\sum_{n=1}^{N}\left(I_S(x_{n-1}, x_n) - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{N} k_n C_{m+1} h^{m+2} = k_n C_{m+1} N h^{m+2}$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

In particolare, se applichiamo una formula composita su 2N sottointervalli anziché su N, ci aspettiamo che l'errore scende di un fattore 2^{m+1}.

Trapezi, punto medio composito: raddoppiando i punti, l'errore scende a $\frac{1}{4}$.

Cavalieri-Simpson composito: scende $\frac{1}{16}$

__Stima dell'errore:__ Sia N pari. Allora,

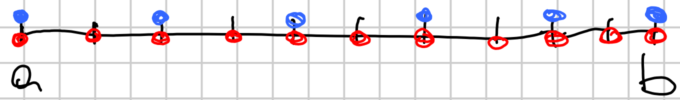
$$I_N = I + E_N \qquad I_{N/2} = I + E_{N/2} \approx I + 2^{m+1} E_N$$

$$\boxed{\frac{I_{N/2} - I_N}{2^{m+1}-1}} \approx \frac{\cancel{I} + 2^{m+1} E_N - (\cancel{I} + E_N)}{2^{m+1}-1} = \frac{2^{m+1} E_N - E_N}{2^{m+1}-1} = E_N$$

↳ non richiede valutazioni di funzione aggiuntive per I_T, I_2

I_T, $N=5$

I_T, $N=10$



$$I_{T,N=10} = \frac{b-a}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)+\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right)$$

$$I_{T,N=5} = \frac{b-a}{5}\left(\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)+\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i})\right)$$