Ingegneria dell'energia, A.A. 2020/21
ALGEBRA LINEARE F.Acquistapace, V.M.Tortorelli
Quarto foglio di esercizi Bis

Domande di introduzione

Domanda 1 Se A, B, U sono sottospazi vettoriali per cui $U \oplus A = U \oplus B$ allora $dim\, A = dim\, B$.

Domanda 2 Si consideri in $\mathbf{R}^4$ il sottospazio P definito da $\begin{cases} x+y & = & 0 \\ \\ x-y+z+u & = & 0 \end{cases}$.
a- Si determini $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare per cui $ImA = KerA = P$.
b- Si scriva la matrice della A determinata.

Domanda 3 Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore, con 0 sulla diagonale. Mostrare che $T^n = \mathbf{O}_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 4 (cfr. domanda 10 del quarto foglio) Si considerino r e π i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da $\begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ \\ x \ + \ 2z & = & 0 \end{cases}$, $2x+y+3z=0$.
a- Determinare quali sono le funzioni $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineari per cui $KerL = r$, $ImL = \pi$?
b- Calcolare per una di esse la matrice che la identifica nella base canonica e quindi L^2 ed L^3.
c- Vi sono tali L per cui, per ogni m, L^m non è la matrice nulla?
d- In generale esprimere L^m, $m \geq 2$, in termini di L^2.

Domanda 5 (cfr. esercizio 2 del quarto foglio) Data due matrici reali $M \in \mathcal{M}(n, m, \mathbf{R})$, $n \times m$, $L \in \mathcal{M}(m, n, \mathbf{R})$, $m \times n$, per cui

per ogni $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ si abbia $\langle Mx \cdot y \rangle_{\mathbf{R}^n} = \langle x \cdot \, Ly \rangle_{\mathbf{R}^m}$.

Si mostri che $L = {}^tM$.

Domanda 6 (cfr. domanda 19b ed esercizio 2 del quarto foglio) (pseudo inversa di Moore-Penrose nel caso di rango massimo)

Si consideri una matrice $A \in \mathcal{M}(n, k, \mathbf{R})$, $n \times k$, con $k < n$.
a- La matrice $A\,{}^tA$, non è mai invertibile.
b- La matrice ${}^tAA$ è invertibile se e solo se A è di rango massimo.
c- Se A è di rango massimo la matrice $A\,({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ dà la proiezione ortogonale su ImA.

Domanda 7 (cfr. domanda 5 del quinto foglio) Quali sono le matrici $M \in \mathcal{M}(n)$ per cui

a- per ogni $N \in \mathcal{M}(n)$ invertibile si abbia $M = NMN^{-1}$?

b- per ogni altra $N \in \mathcal{M}(n)$ si abbia $NM = MN$?

(sugg. trovare delle matrici che sicuramente soddisfano la condizione in b-. Quindi per rispondere ad a- fare opportuni cambiamenti di base).

Domanda 8 (cfr. domanda 18 quarto foglio di esercizi) Sia T una matrice $n \times n$ triangolare superiore con 1 sulla diagonale.
Provare che se per qualche $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ si ha $T^k = Id_{\mathcal{M}(n)}$ allora $T = Id_{\mathcal{M}(n)}$.

Domanda 9 Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{K}$.
Se vi sono $a \neq b$ in $\mathbf{K}$, per cui $(A - aI_{n\times n})(A - bI_{n\times n}) = \mathrm{O}_{n\times n}$, allora:

$$\mathbf{K}^n = Ker\,(A - aI_{n\times n}) \oplus Ker\,(A - bI_{n\times n}) \text{ e } Ker\,(A - aI_{n\times n}) = Im\,(A - bI_{n\times n})$$