(MULTISTEP)

METODI A PIÙ PASSI PER ODE

Note Title 2021-12-06

Calcolo approssimato: $y_n \approx y(t_n)$ $\quad n \in 1, 2, \dots, N$ $\qquad y:[a,b] \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$a = t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{N-1} \quad b = t_N$

Metodi di Runge-Kutta forniscono errore locale di troncamento

$$\tau_n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n))}{h} = O(h^{p})$$

Abbiamo visto un teorema che dice che

$$e_n = y_n - y(t_n) = O(h^{p})$$

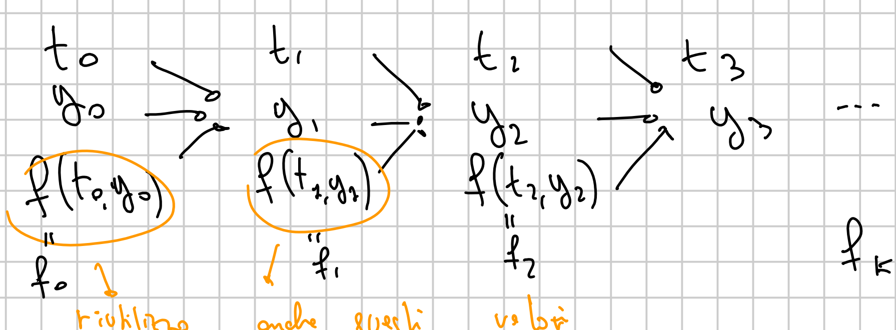
Aumentando il numero di stadi s del metodo, → più valutazioni della funzione f, costo computazionale più alto

e scegliendo opportunamente i coefficienti, è possibile raggiungere ordini p più alti di quelli dei metodi di Eulero/trapezi

es Dormand-Prince, $s=7$ stadi, $p=5$

Idea dei metodi multistep: posso aumentare ordine di convergenza p senza inserire valutazioni nuove della $f(\,)$, ma riutilizzando quelle fatte ai passi precedenti

ES nel metodo di Eulero esplicito,



$$f_k = f(t_k, y_k)$$

ES: (metodo Adam-Bashforth a 2 passi)
ADAM - BASHFORTH

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{3}{2} f_{n+1} - \frac{1}{2} f_n\right) \qquad n = 0, 1, 2, \dots N-1$$

Supponendo di conoscere y_0, y_1

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	$\dots$
f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	

Se $y_{n+1} = y(t_{n+1}, y_{n+1})$, $y_n = y(t_n, y_n)$, allora l'errore locale

$$\frac{y(t_{n+2}) - y(t_{n+1}) - h\left(\frac{3}{2} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n))\right)}{h} = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ Errore di ordine $p=2$, meglio di Eulero esplicito, ma facendo sempre 1 valutazione nuova delle f per ogni passo

dim: sviluppi di Taylor nel punto t_{n+1}:

$$y(t_{n+2}) = y(t_{n+1}+h) = y(t_{n+1}) + h\, y'(t_{n+1}) + h^2 y''(t_{n+1}) + O(h^3)$$

$$f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = y'(t_{n+1})$$

$$f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n) = y'(t_{n+1} - h) = y'(t_{n+1}) - h\, y''(t_{n+1}) + O(h^2)$$

sostituisco nell'espressione sopra

Come calcolo y_1? Con un metodo a un passo, ad es. Eulero esplicito

$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0).$$

Struttura generale dei metodi a più passi (multistep) lineari

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \dots + \alpha_k y_{n+k} = h\left(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_k f_{n+k}\right)$$

per scelte opportune dei coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \dots \beta_k \in \mathbb{R}$

ES $\quad y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(-\frac{1}{2} f_n + \frac{3}{2} f_{n+1}\right) \qquad k=2$

$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1 \qquad \beta_0 = -1/2, \ \beta_1 = \frac{3}{2}, \ \beta_2 = 0$ esplicito

Solitamente, per evitare casi degeneri si prende α_0, β_0 non entrambi nulli α_k, β_k non entrambi nulli

k = numero di passi del metodo.

Generalizzano i metodi ad un passo, ad es. metodo dei trapezi

$k=1 \qquad y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f_{n+1}\right)$

$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_0 = -1 \qquad \beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2} \qquad$ "$f(t_{n+1}, y_{n+1})$" $\Rightarrow$ implicito

Se $\beta_k = 0$, posso risolvere per y_{n+k} esplicitamente conoscendo $y_n, y_{n+1}, \dots y_{n+k-1}$ $\Rightarrow$ il metodo si dice esplicito

Se $\beta_k \neq 0$, l'incognita y_{n+k} compare anche dentro $f_{n+k} = f(t_{n+k}, y_{n+k})$ e devo risolvere implicitamente $\Rightarrow$ il metodo si dice implicito

I valori iniziali $y_1, y_2, \dots y_{n+k-1}$ vanno calcolati con un metodo diverso, ad es. un metodo a un passo

Notiamo che se il passo h tende a zero, $(N \to \infty)$ $\qquad h = \frac{b-a}{N}$

$t_1 = a + h, \dots \quad t_{k-1} = a + (k-1)h$ tendono tutti a $t_0 = a$

Quindi $y(t_1), \dots y(t_{k-1}) \to y(t_0) = y_0$

Diciamo che una scelta dei valori iniziali di un metodo a più passi è compatibile se $y_1, y_2 \dots y_{k-1} \to y_0$

Famiglie di metodi $\qquad y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(-\frac{1}{2} f_n + \frac{3}{2} f_{n+1}\right)$

- Adams - Bashforth $\qquad y_{n+k} - y_{n+k-1} = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \dots + \beta_{k-1} f_{n+k-1})$

  $\beta_k = 0 \Rightarrow$ metodo esplicito

- Adams - Moulton $\qquad y_{n+k} - y_{n+k-1} = h(\beta_0 f_n + \dots + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \underbrace{\beta_k}_{\neq 0} f_{n+k})$

  ADAMS - MOULTON

  metodi impliciti

- BDF, backward differentiation formulas

  $\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \dots + \alpha_{n+k} y_{n+k} = h(\qquad f_{n+k})$

  implicito

Polinomi caratteristici (o associati) di un metodo a più passi

$p_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_k z^k$ primo polinomio caratteristico

$P_2(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_k z^k$ <u>secondo polinomio caratteristico</u>

Applichiamo un metodo multistep al problema

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad [a,b] = [0,1]$$

ES numeri di Fibonacci

$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n \quad y_0 = 0,\ y_1 = 1$

$\Updownarrow$

$y_n + y_{n+1} - y_{n+2} = 0$

$$\boxed{\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \dots + \alpha_k y_{n+k} = 0 \quad (*)}$$

equazione alle differenze (lineare a coefficienti costanti)

Assomigliano alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y'' + \dots + \alpha_k y^{(k)} = 0 \qquad \alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y'' = 0$$

Teoria molto simile: esistono soluzioni della forma $y_n = \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Una formula di questo tipo è soluzione se e solo se

$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_k \lambda^k = 0 \iff \lambda$ è una radice del primo polinomio caratteristico

$$P_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k$$

Una soluzione generica è una combinazione lineare delle soluzioni di questo tipo $y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n$ se le radici del polinomio sono distinte, più altre soluzioni del tipo $y_n = n \lambda_i^n$, $y_n = n^2 \lambda_i^n, \dots$ se λ_i è una radice multipla.

Le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate (cioè $|y_n| \le M$, per un certo M che dipende dai valori iniziali) a patto che valga la <u>condizione delle radici</u>:

- tutte le radici del polinomio $\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k$ hanno modulo minore o uguale a 1
- le radici λ_i con modulo 1 sono semplici (molteplicità = 1).

Un metodo a più passi si chiama <u>zero-stabile</u> se il suo primo polinomio caratteristico $P_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k$ soddisfa la condizione delle radici, e quindi la soluzione prodotta dal metodo applicato a $\begin{cases} y' = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

è limitata indipendentemente dalla scelta di $y_2, y_3, \dots y_{k-1}$.

Vedremo che questa condizione compare nel teorema di convergenza per questi metodi. Idea: in metodo 0-stabile, piccoli cambiamenti nella scelta dei valori iniziali $y_0, y_1, \dots y_{k-1}$ hanno un impatto che si mantiene limitato al crescere di n.

Def: un metodo a più passi si dice consistente di ordine p se

$$\frac{1}{h}\left(\alpha_0 y(t_n) + \alpha_1 y(t_{n+1}) + \dots + \alpha_k y(t_{n+k}) - h\left(\beta_0 f(t_n, y(t_n)) + \beta_1 f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + \dots + \beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k})\right)\right) = O(h^p) \boxed{=: \tau_n}$$

errore locale di troncamento $T = \max|\tau_n|$

(Generalizza la condizione $\dfrac{y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Phi(t_n, y(t_n))}{h} = O(h^p)$ per i metodi a un passo.)

Def: un metodo a più passi si dice convergente di ordine p se

$$\boxed{e_n =} \, y(t_n) - y_n = O(h^p) \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \dots N$$

errore globale di convergenza $E = \max|e_n|$

Teo (teorema di equivalenza di Dahlquist):
DAHLQUIST

Un metodo lineare a più passi con una scelta compatibile dei valori iniziali è convergente se è consistente e 0-stabile.

Su un problema con soluzione $y \in C^{p+1}([a,b])$, se un metodo è consistente di ordine p, allora è convergente di ordine p.

I metodi usati in pratica sono tutti 0-stabili.

ES: METODO A-B a 2 PASSI:

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(\frac{3}{2} f_{n+1} - \frac{1}{2} f_n\right)$$

$$p_1(z) = z^2 - z \qquad p_2(z) = 0 \cdot z^2 + \frac{3}{2} z - \frac{1}{2}$$

$\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_0 = 0$

Radici di $z^2 - z$: $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ zero-stabile: tutte le radici hanno modulo ≤ 1, e la radice 1 ha molteplicità 1 (semplice)

<u>Oss</u>: tutti i metodi consistenti di ordine almeno 1 hanno sempre $\lambda = 1$ tra le loro radici, altrimenti (considerando per esempio il problema $\begin{cases} y' = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$) che ha soluzione costante $y(t) = 1$ avremmo

$$T_n = \frac{1}{h}(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k) = \frac{\text{costante} \neq 0}{h}$$ che non è $O(h^p)$